

# Chapitre I : Préliminaires

Pour

- étudier des relations entre facteurs économiques
- résoudre des problèmes de gestion

- ...

→ **variables numériques**

→ **modèles mathématiques** : équations, inéquations, fonctions.

## I.1. Exemples de modèles mathématiques

Exemple 1 ( Théorie économique )

### ***Variables numériques***

Y = revenu national

C = dépenses liées à la consommation privée

I = dépenses liées à l'investissement privé

G = dépenses publiques (gouvernementales)

T = montant des impôts

} exprimés dans une  
même unité  
monétaire

### ***Modèle mathématique***

$$Y = C + I + G$$

$$C = \alpha + \beta \cdot (Y - T) \quad (\alpha > 0, 0 < \beta < 1)$$

$$T = \gamma + \delta \cdot Y \quad (\gamma > 0, 0 < \delta < 1)$$

$$(Y, C, I, G, T \geq 0)$$

## Exemple 2 ( gestion agricole )

Dans le but de minimiser ses coûts d'épandage d'engrais, un horticulteur a décidé de mélanger des engrais de marques A et B. Chaque are de terrain doit recevoir au minimum

12 kg de nitrate  
et 8 kg de phosphate.

Un sac de marque A procure 2 kg de nitrate, 1 kg de phosphate et coûte 3 €.

Un sac de marque B procure 1 kg de nitrate, 1 kg de phosphate et coûte 2 €.

Aidez-le à résoudre son problème de minimisation.

## **Modélisation**

### ***Variables numériques***

$x_A$  = quantité d'engrais de marque A à épandre par are de terrain (en sacs)

$x_B$  = quantité d'engrais de marque B à épandre par are de terrain (en sacs)

### ***Modèle mathématique :***

$$2 x_A + x_B \geq 12$$

$$x_A + x_B \geq 8$$

$$x_A \geq 0$$

$$x_B \geq 0$$

**Problème :** Minimiser  $3 x_A + 2 x_B$  ( $3 x_A + 2 x_B$  = coût de l'épandage, par are)

## **I.2. A propos des variables**

variable  $\equiv$  symbole ( représentant aspect, facteur )

qui peut prendre différentes modalités.

Si ces modalités sont des nombres, on parle de **variable numérique**.

Dans ce cours, uniquement variables numériques et nombres **réels**.

### I.3. Mesure de la variation d'une variable numérique

Soit  $P$  variable numérique représentant le poids d'une personne en kgs.

Supposons que :  $P_{\text{initial}} = 80 \text{ ( kg )}$

$$P_{\text{final}} = 84 \text{ ( kg )}$$

1°) **Variation absolue (ou en valeur)**

$$\Delta P = P_{\text{final}} - P_{\text{initial}} = 4 \text{ ( kg )}.$$

( $\Delta P$  s'exprime dans la même unité  $P$  ).

$\Delta P$  peut être  $< 0$  : si  $P_{\text{initial}} = 80 \text{ ( kg )}$

$$P_{\text{final}} = 76 \text{ kg,}$$

$$\text{on a } \Delta P = -4 \text{ ( kg )}.$$

2°) **Variation relative (ou en pourcentage)**

$$\frac{\Delta P}{P_{\text{initial}}} = \frac{P_{\text{final}} - P_{\text{initial}}}{P_{\text{initial}}} = \frac{4}{80} = \frac{5}{100} = 5\% :$$

(sans unité)

$$\frac{\Delta P}{P_{\text{initial}}} \text{ peut être } < 0 : \quad \text{si } \begin{cases} P_{\text{initial}} = 80 \text{ ( kg )} \\ P_{\text{final}} = 76 \text{ kg,} \end{cases}$$
$$\text{on a } \frac{\Delta P}{P_{\text{initial}}} = -5\%$$

Traditionnellement, variations relatives en « pourcentages ».

Parfois « variation en pourcentage »

ou « taux de variation en pourcentage ».

Attention aux opérations sur les taux de variation en pourcentage.

**Exemple** : si la valeur d'une action augmente de 30% un jour puis baisse de 25 % le lendemain, quel est l'effet global (baisse ou hausse de ...%) ?.

$$V_{\text{final}} = V_{\text{initial}} \times 1.3 \times 0.75 = 0.975 \times V_{\text{initial}}$$

Donc, globalement, **baisse de 2.5%**.

**Exemple** : dans un pays, le taux d'inflation ( variation relative des prix ) a été de

60% la première année

et 20% la deuxième année.

Calculez le **taux d'inflation moyen annuel** pendant ces deux ans.

$$\begin{aligned} P_{\text{initial}} \times 1.6 \times 1.2 &= P_{\text{initial}} \times 1.92 = P_{\text{initial}} \times \sqrt{1.92} \times \sqrt{1.92} \\ &= P_{\text{initial}} \times 1.386 \times 1.386 \end{aligned}$$

Donc, **taux d'inflation moyen annuel pendant ces deux ans = 38,6%**.

Définition :

« variation relative moyenne » annuelle (ou autre)  $\equiv$  variation relative théorique qui, appliquée **chaque** année, conduirait au même résultat global que la suite des variations relatives observées.

**Exercice 1.1.** Un capital de 10000 € est placé à « intérêts composés » pendant 3 ans. Le taux d'intérêt annuel est de 9% la première année, de 6% la deuxième et de 4% la troisième année. Calculez :

- la variation absolue du capital au bout des 3 ans ;
- la variation relative du capital au bout des 3 ans ;
- la variation relative annuelle moyenne du capital pendant ces 3 ans .

**A faire !**

**Exercice 1.2.** Un capital de 20000 € est placé à « intérêts composés ». Le taux d'intérêt annuel est de 8%. Calculez après combien de temps le capital aura doublé.

Solution : trouver  $z$  (exprimé en années) tel que

$$20000 \times (1.08)^z = 40000 \quad \text{c'est-à-dire} \quad (1.08)^z = 2$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \ln[(1.08)^z] = \ln(2)$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad z \times \ln(1.08) = \ln(2)$$

$$\text{On trouve } z = \frac{\ln(2)}{\ln(1.08)} = 9.006 \text{ années}$$

#### I.4. Nombres réels et couples, triples, ... , n-uples de nombres réels

$(2, -1)$  : « **couple** » de nombres réels

$(-4, -2, 5)$  : « **triple** » de nombres réels

$(0, 87, -54, 269)$  : « **4-uple** » de nombres réels

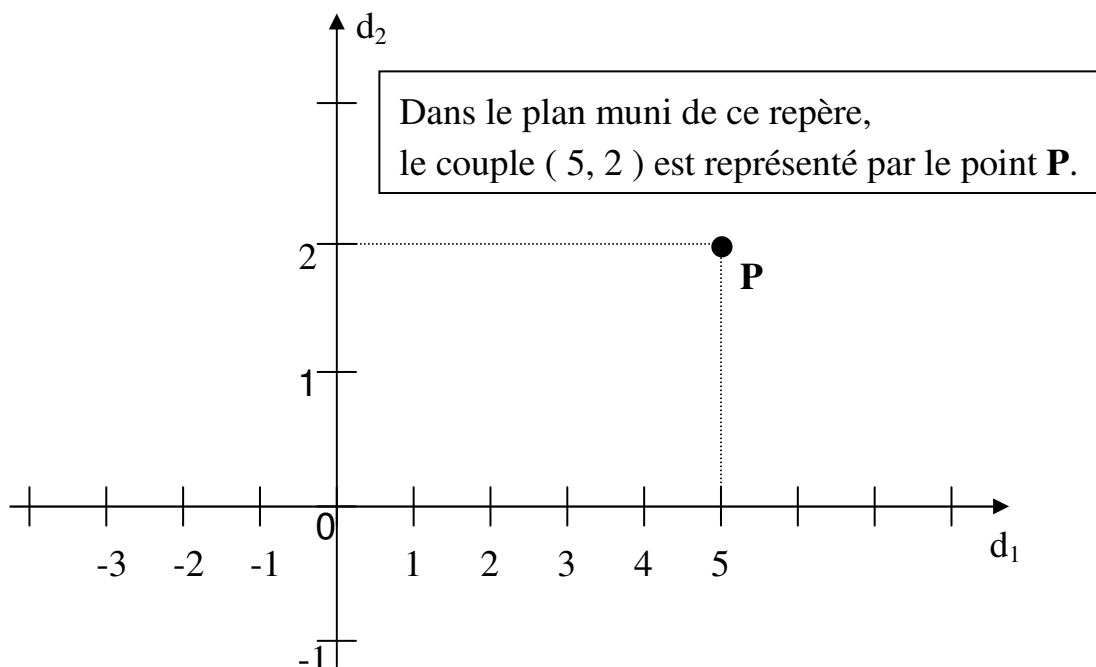
$(r_1, r_2, \dots, r_n)$  : « **n-uple** » de nombres réels (où  $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbf{R}$ )

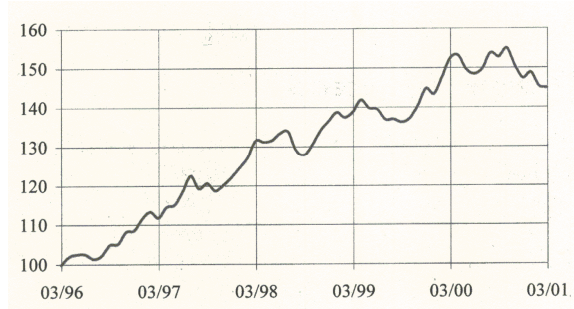
Notation :  $\mathbf{R}^n = \{ (r_1, r_2, \dots, r_n) \mid r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbf{R} \}$

Attention :  $(2, 1) \neq (1, 2)$

♦ **nombre** réel  $\rightarrow$  point d'une droite graduée

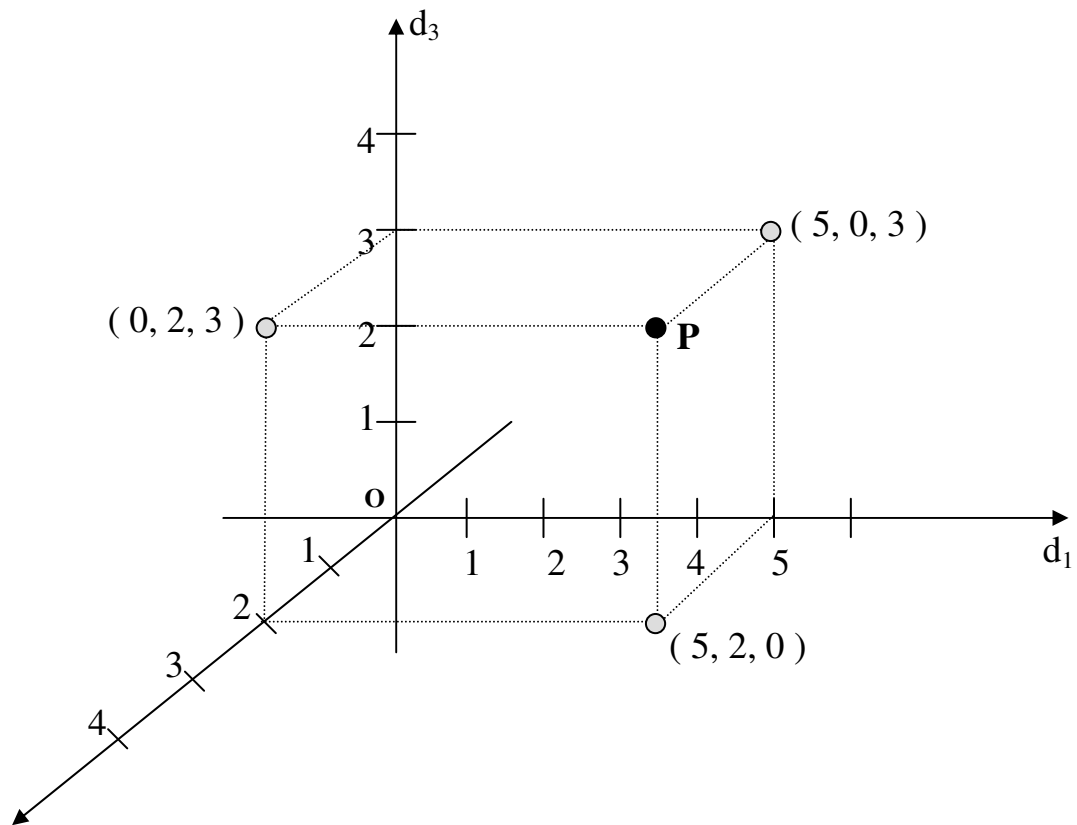
♦ **couple** de nombres réels  $\rightarrow$  point d'un plan muni d'un repère orthogonal





♦ **triple** de nombres réels  $\rightarrow$  point d'un espace à 3 dimensions muni d'un repère orthogonal

**Exemple** : le triple  $(5, 2, 3)$  est représenté par le point **P**.



## I.5. Équations et systèmes d'équations

- **équation** à  $n$  variables  $z_1, z_2, \dots, z_n$

≡ égalité entre expressions math. en ces  $n$  variables.

$z_1^2 - z_2^2 = z_3$  et  $2z_1 - 3z_2 + 0.z_3 = 6$  : équations à 3 variables  $z_1, z_2, z_3$

- **solution d'une équation** à  $n$  variables  $z_1, z_2, \dots, z_n$

≡ tout  $n$ -uplet  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  t.q.

si on remplace dans l'équation chaque  $z_i$  par  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  
alors l'égalité est vérifiée.

$(3, 2, 5)$  est une solution de l'équation à 3 variables  $z_1, z_2, z_3$  :  $z_1^2 - z_2^2 = z_3$

$(0, 0, 0)$  est une autre solution de cette équation.

Attention :  $(2, 3, 5)$  n'est **pas** une solution de cette équation.

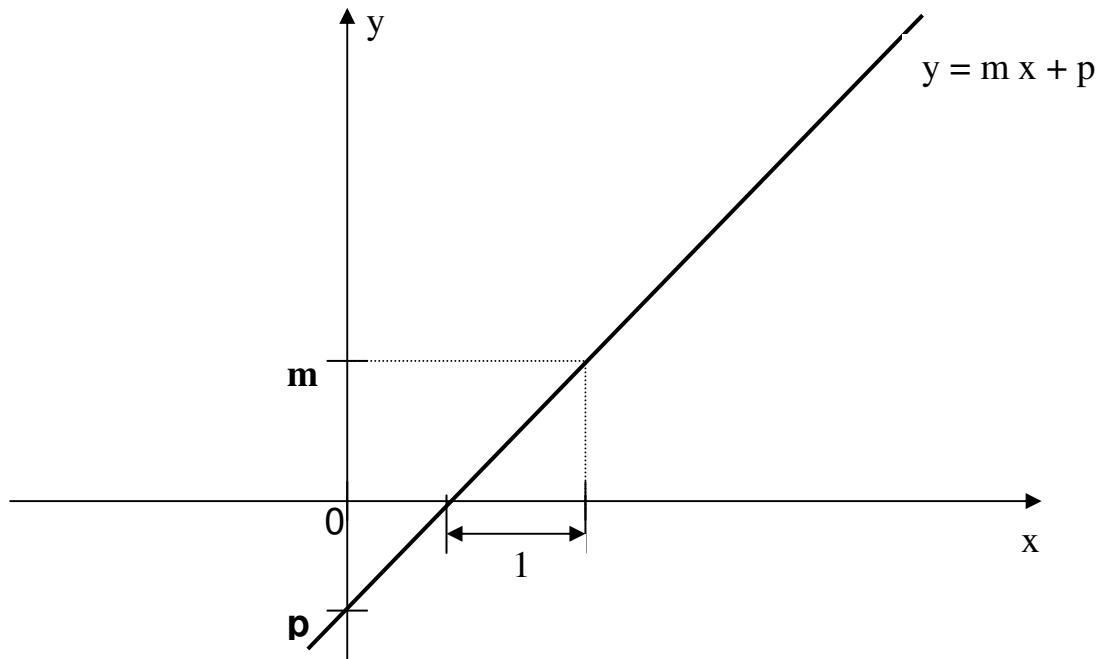
On écrira souvent  $\begin{cases} z_1 = 3 \\ z_2 = 2 \\ z_3 = 5 \end{cases}$  est une solution de l'équation  $z_1^2 - z_2^2 = z_3$

### Représentation graphique

L'ensemble des solutions d'une équation à 2 variables peut être représenté par un ensemble de points dans un plan muni d'un repère.

*Exemple* : représentation graphique de l'ensemble des solutions de l'équation à 2 variables x et y :

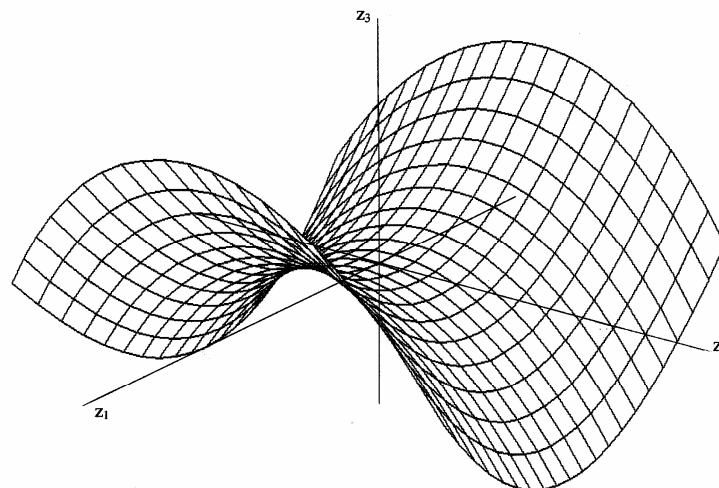
$$y = m x + p \quad (\text{où } m > 0)$$



L'ensemble des solutions d'une équation à 3 variables peut être représenté par un ensemble de points dans un espace à 3 dimensions muni d'un repère.

*Exemple* : représentation graphique ( obtenue avec le logiciel Derive ) de l'ensemble des solutions de l'équation à 3 variables  $z_1, z_2, z_3$  :

$$z_1^2 - z_2^2 = z_3$$



## Définition

deux **équations** sont **équivalentes** lorsqu'elles possèdent les mêmes solutions.

$2x - y = 1$  et  $2y - 4x + 2 = 0$  sont deux équations équivalentes.

$x - 1 = 0$  et  $2x - x^2 = 1$  sont deux équations équivalentes.

## Deux grandes règles d'équivalence

1.  $[ 2x - y = 1 ]$

et  $[ 2x - y + (x + 2) = 1 + (x + 2) ]$  sont équivalentes.

2.  $[ 2x - y = 1 ]$

et  $[ 5 * (2x - y) = 5 * 1 ]$  sont équivalentes.

**Exercice 1.3.** Résoudre les équations suivantes (trouver toutes les solutions) :

1)  $3x - x^2 = 2$  (variable x)

2)  $2x^2 - x + 1 = 0$  (variable x)

3)  $y^3 - 1 = 0$  (variable y)

4)  $\alpha x^2 - x - \alpha = 0$  (variable x)

## I.5.2. Systèmes d'équations

### - **système d'équations** à n variables

≡ ensemble d'équations en ces n variables

qu'il faut considérer **en même temps**.

### - **solution d'un système d'équations** à n variables $z_1, z_2, \dots, z_n$

≡ tout n-uple de nombre réels  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  tel que,

si on remplace dans chaque équation  $z_i$  par  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),

alors toutes les égalités sont vérifiées.

### - deux **systèmes d'équations** sont **équivalents** lorsqu'ils possèdent les mêmes solutions.

### Deux grands principes d'équivalence

$$1. \begin{cases} z_1 - 2z_2 = 1 \\ 4z_1 + z_2 = 4 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} z_1 = 2z_2 + 1 \\ 4(2z_2 + 1) + z_2 = 4 \end{cases} \text{ sont équivalents.}$$

→ **méthode de résolution « par substitution »**.

$$2. \begin{cases} z_1 = 2z_2 + 1 \\ 4z_1 + z_2 = 4 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} z_1 = 2z_2 + 1 \\ 4z_1 + z_2 - 4z_1 = 4 - 4(2z_2 + 1) \end{cases} \text{ sont équivalents}$$

→ **méthode de résolution « par combinaison d'équations »**.

### **Exemple**

Résoudre le système de 2 équations à 2 variables  $z_1$  et  $z_2$  suivant :

$$\begin{cases} 6.z_1 - 12.z_2 = 0 \\ 6.z_2^2 + 42.z_2 - 12.z_1 - 24 = 0 \end{cases}$$

Il est équivalent au système  $\begin{cases} z_1 = 2.z_2 \\ 6.z_2^2 + 18.z_2 - 24 = 0 \end{cases}$ ,

L'équation  $6.z_2^2 + 18.z_2 - 24 = 0$  admet deux solutions : 1 et -4 ,

Donc, **les 2 solutions du système de départ sont : ( 2, 1) et (-8, -4) .**

### Exemple

A partir du système de 3 équations à 5 variables Y, C, T, I et G suivant :

$$\begin{cases} Y = C + I + G \\ C = \alpha + \beta \cdot (Y - T) \\ T = \gamma + \delta \cdot Y \end{cases}$$

exprimer les variables Y, C et T en fonction des deux autres I et G .

1<sup>ère</sup> équation équivalente à  $C = Y - I - G$  .

3<sup>ème</sup> équation équivalente à  $T = \gamma + \delta \cdot Y$

D'où : 2<sup>ème</sup> équation équivalente à  $Y - I - G = \alpha + \beta \cdot Y - \beta \cdot (\gamma + \delta \cdot Y)$

équivalente à  $Y \cdot (1 - \beta + \beta \cdot \delta) = \alpha - \beta \cdot \gamma + I + G$

Le système de départ est donc équivalent au système

$$\begin{cases} C = Y - I - G \\ Y \cdot (1 - \beta + \beta \cdot \delta) = \alpha - \beta \cdot \gamma + I + G \rightarrow \text{une seule variable ( parmi Y, C et T )} \\ T = \gamma + \delta \cdot Y \end{cases}$$

(on supposera que  $1 - \beta + \beta \cdot \delta \neq 0$  )

En remplaçant Y par  $\frac{\alpha - \beta \cdot \gamma + I + G}{1 - \beta + \beta \cdot \delta}$  dans 1<sup>ère</sup> et 3<sup>ème</sup> équations, on

obtient :

$$\begin{cases} C = \frac{\alpha - \beta \cdot \gamma + (\beta - \beta \cdot \delta) \cdot (I + G)}{1 - \beta + \beta \cdot \delta} \\ Y = \frac{\alpha - \beta \cdot \gamma + I + G}{1 - \beta + \beta \cdot \delta} \\ T = \frac{\alpha \cdot \delta + (1 - \beta) \cdot \gamma + \delta \cdot (I + G)}{1 - \beta + \beta \cdot \delta} \end{cases}$$

Remarque : C , Y et T sont les variables **endogènes**  
I et G sont les variables **exogènes**

### I.5.3. Équations linéaires et systèmes d'équations linéaires

- **expression linéaire** en  $z_1, z_2, \dots, z_n$

≡ expression du type  $c_1 \cdot z_1 + c_2 \cdot z_2 + \dots + c_n \cdot z_n (+ c)$

où  $c_1, c_2, \dots, c_n$  et  $c$  représentent des constantes réelles.

*Exemple :*  $2x + 3y - z$  est une expression linéaire en  $x, y$  et  $z$

*Contre-exemple :*  $x - y^2$  n'est **pas** une expression linéaire en  $x$  et  $y$

- **équation linéaire**

≡ équation dont les 2 membres sont des expressions linéaires

- **système d'équations linéaires**

≡ système d'équations composé uniquement d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_{11} \cdot z_1 + a_{12} \cdot z_2 + \dots + a_{1n} \cdot z_n = d_1 \\ a_{21} \cdot z_1 + a_{22} \cdot z_2 + \dots + a_{2n} \cdot z_n = d_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1} \cdot z_1 + a_{m2} \cdot z_2 + \dots + a_{mn} \cdot z_n = d_m \end{cases}$$

$a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, n$ ) : **coefficients** des variables.

$d_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) : **termes indépendants**.

Lorsque tous les termes indépendants sont nuls, le système est dit **homogène**.

**Exercice 1.4.** Résoudre 
$$\begin{cases} x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0 \\ x_2^2 = x_2 \end{cases} \quad (\text{variables } x_1, x_2)$$

**Exercice 1.5.** Résoudre 
$$\begin{cases} 3x^2 + 3x + 4y - 4 = 0 \\ 2y - x = 1 \end{cases} \quad (\text{variables } x, y, z)$$

**Exercice 1.6.** Résoudre 
$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases} \quad (\text{variables } x, y \text{ et } z)$$

**Exercice 1.7.** A partir du système d'équations 
$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

exprimez, si possible, les variables  $x$  et  $y$  en fonction de la variable  $z$ .

**Exercice 1.8.** A partir du système d'équations 
$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 + t \\ x - y + 2z = 5 - t \end{cases}$$

exprimez, si possible, les variables  $x$  et  $y$  en fonction des variables  $z$  et  $t$ .

**Exercice 1.9.** A partir du système d'équations 
$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 + t \\ x - y + 2z = 5 - t \\ 5x + y = 7 + t \end{cases}$$

exprimez, si possible, les variables  $x$  et  $y$  en fonction des variables  $z$  et  $t$ .

# Chapitre II : Fonctions (rappels)

## II.1. Fonctions de R dans R.

**Rappel :** on parle de fonction de R dans R  
lorsqu'on dispose d'une règle permettant d'associer  
à chaque élément de R au maximum un élément de R.

Souvent, une fonction F de R dans R est définie comme suit :

$F(x) = [ \text{expression mathématique en la variable } x ]$

On définit le domaine de F , noté  $\text{dom } F$  , par

$\text{dom } F = \{ r \in \mathbb{R} \mid \text{l'expression est définie} \}$

**Exemple** ( fonction F de R dans R )

$$F(x) = \sqrt{x + 1}$$

Dans ce cas,

$\text{dom } F = \{ x \in \mathbb{R} \mid \text{l'expression } \sqrt{x + 1} \text{ est définie} \}$

c'est-à-dire que :

$\text{dom } F = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \} = [-1, +\infty [$

**Définition :**

on dira qu'une équation à 2 variables  $x$  et  $y$  *définit*  $y$  en fonction de  $x$   
lorsqu'elle est équivalente à une équation de la forme

$y = \ll \text{expression mathématique en } x \gg$

où, à toute valeur de  $x$ , correspond une et une seule valeur de  $y$

**Exemple 1**

L'équation  $x^2 + y^2 = 25$  ne définit pas  $y$  en fonction de  $x$

**Exemple 2**

L'équation  $2x - 3y = 6$  définit  $y$  en fonction de  $x$  :

l'équation  $2x - 3y = 6$  est équivalente à l'équation  $y = \frac{2}{3}x - 2$

On dit souvent que

« l'équation  $2x - 3y = 6$  définit (implicitement)  
la variable  $y$  en fonction de la variable  $x$  ».

### Représentation graphique.

Fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  : sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$

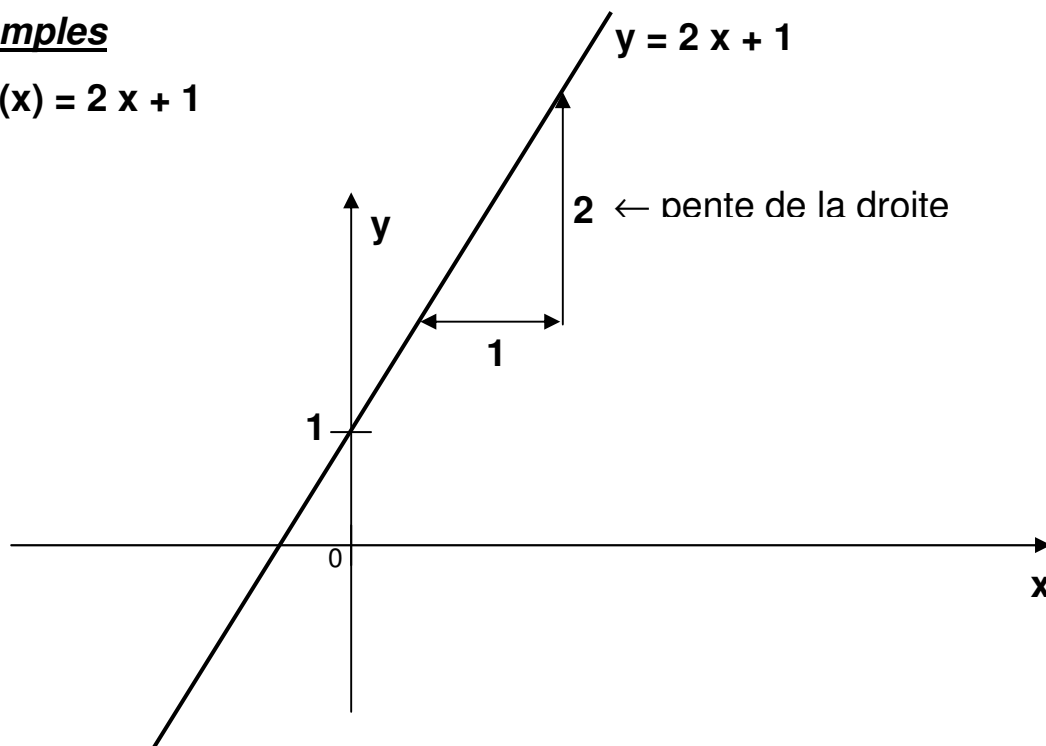
→ représentation graphique dans un plan (muni d'un repère).

Si la fonction est définie et « continue » sur un intervalle, son graphe est une courbe dans le plan

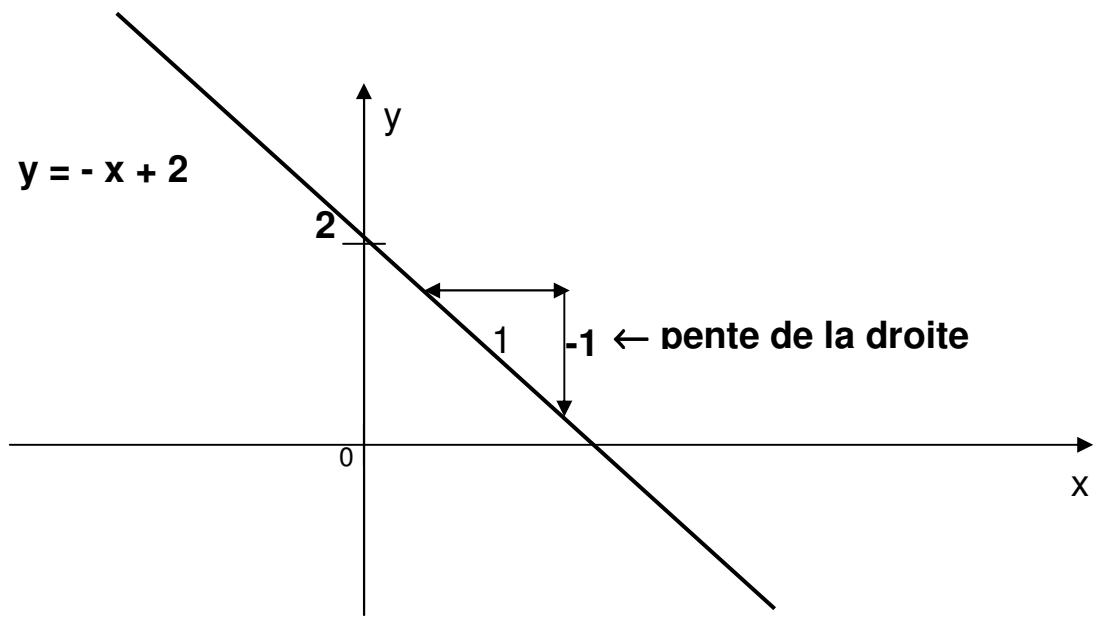
- qu'on peut tracer sans lever le crayon (continuité)
- qui rencontre chaque droite verticale au maximum en un point.

### Exemples

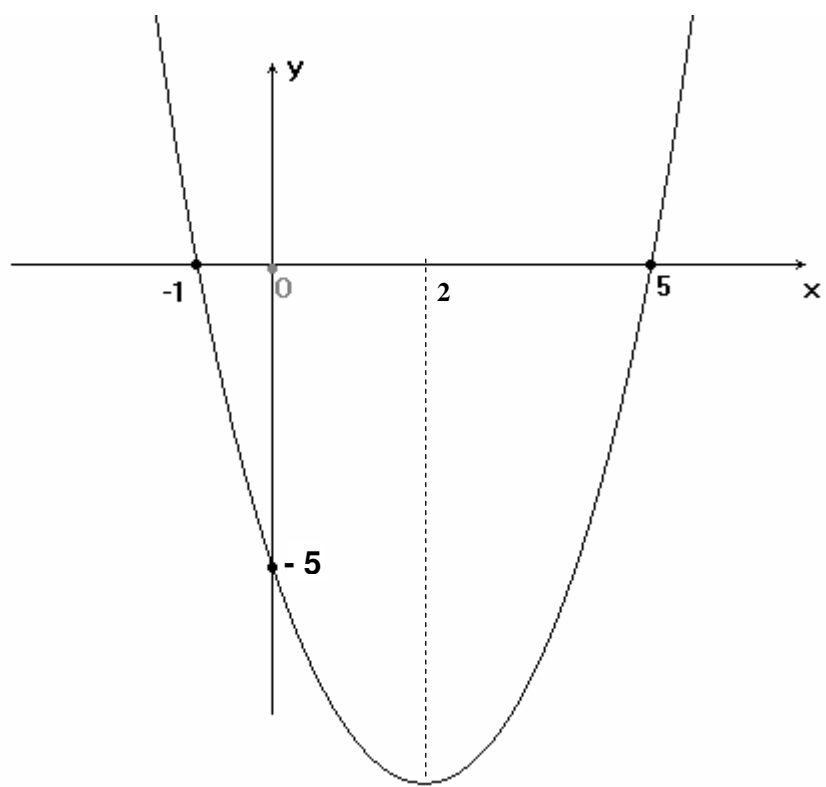
a)  $F(x) = 2x + 1$



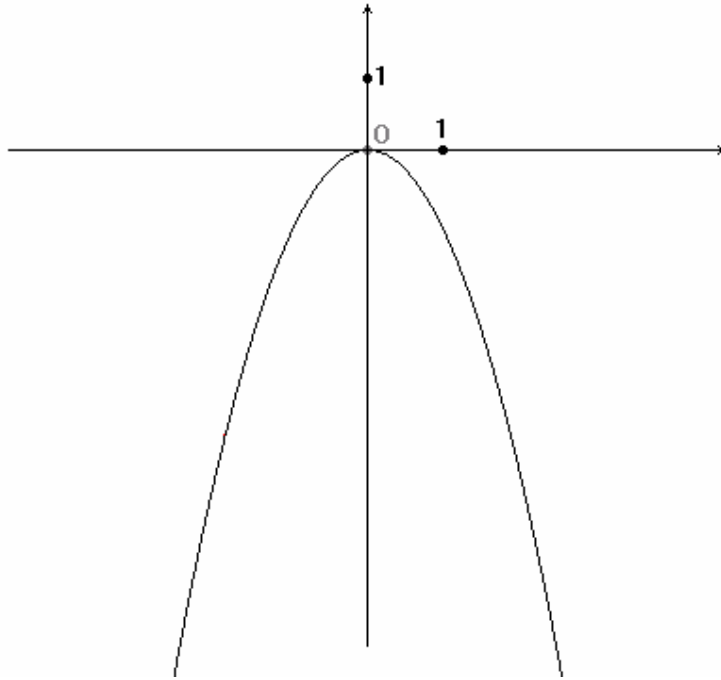
b)  $F(x) = -x + 2$



c)  $F(x) = x^2 - 4x - 5$



d)  $F(x) = -x^2$



**Exercice II.1** : représenter graphiquement les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  suivantes :

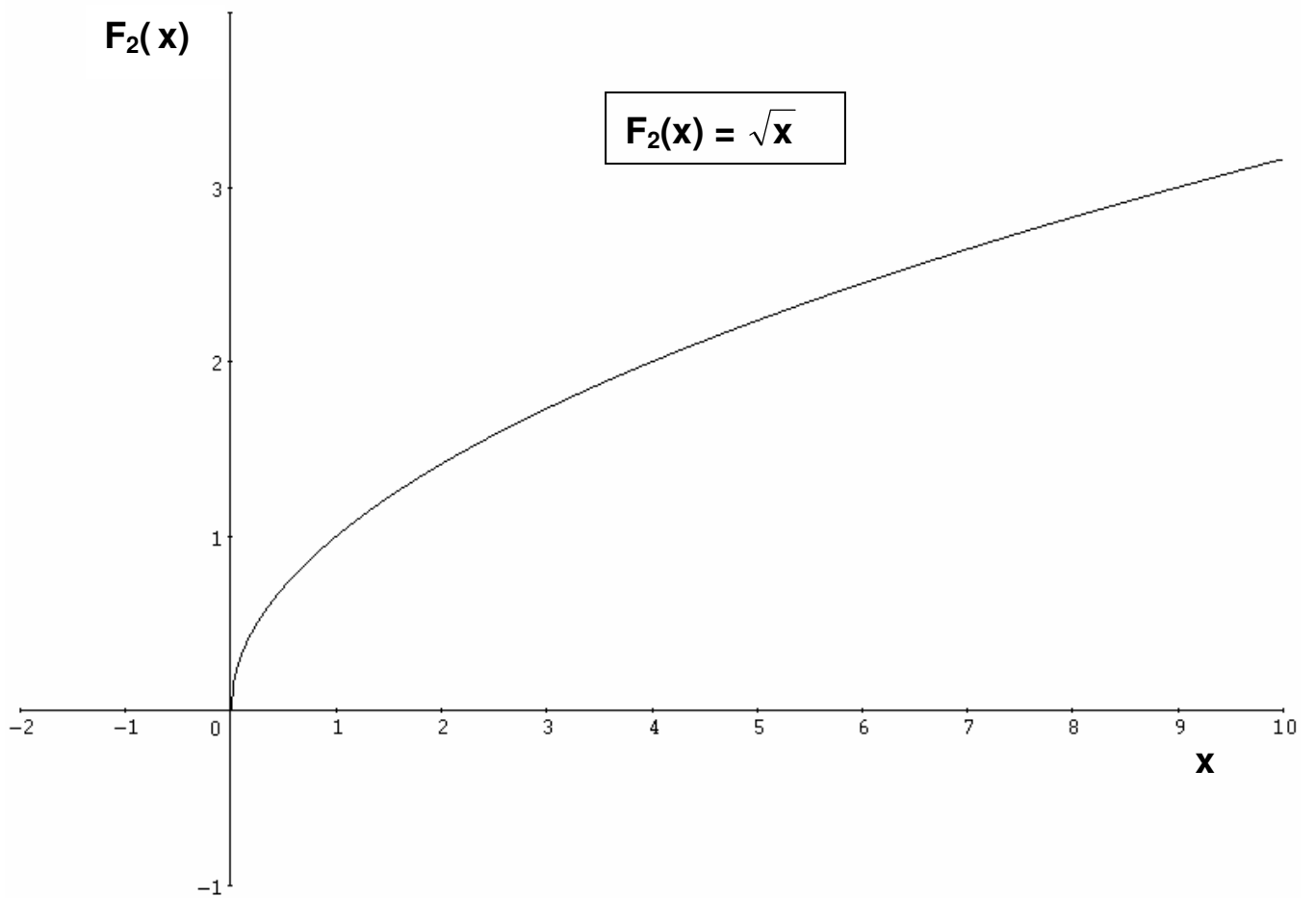
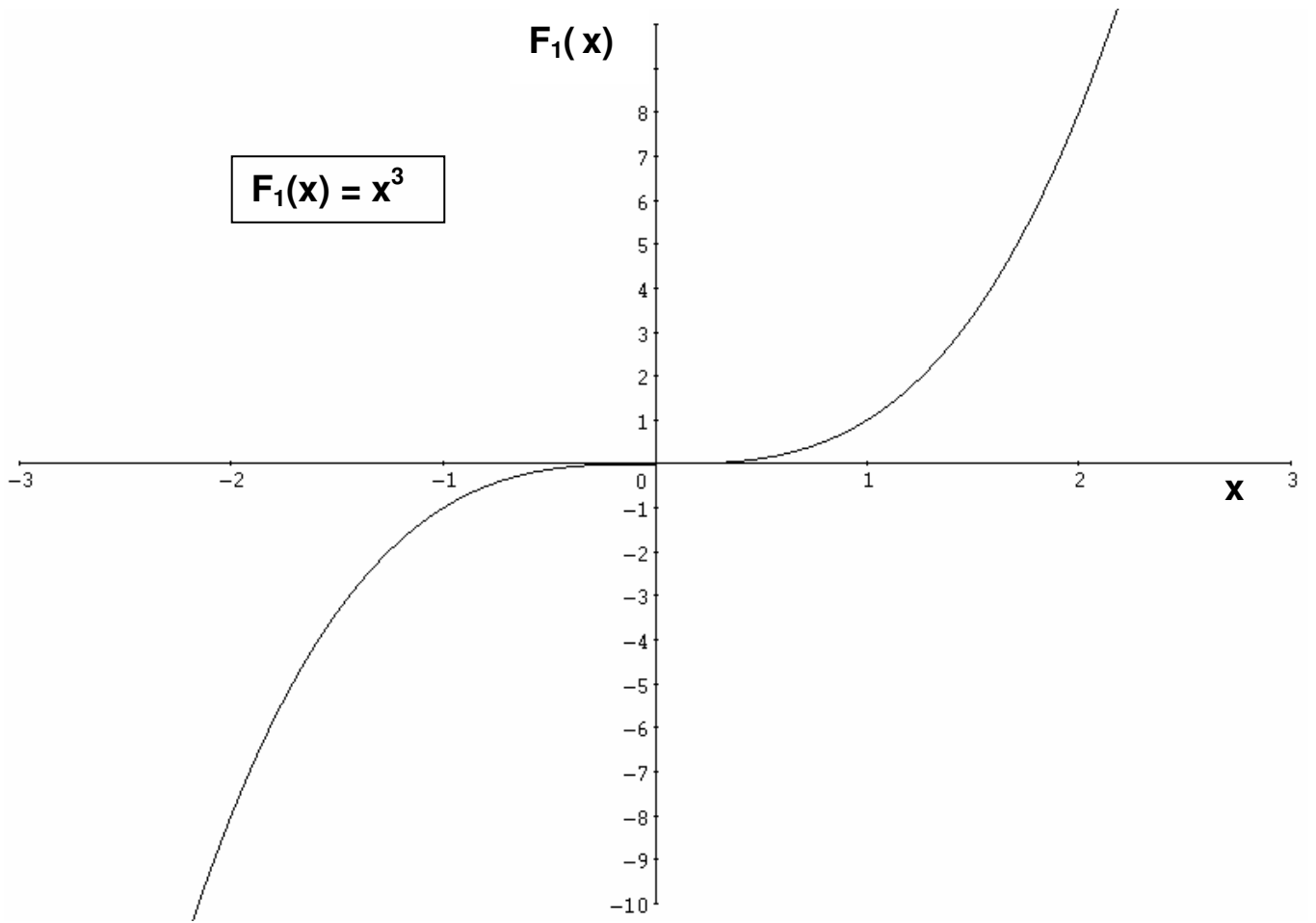
a)  $F_1(x) = x^3$

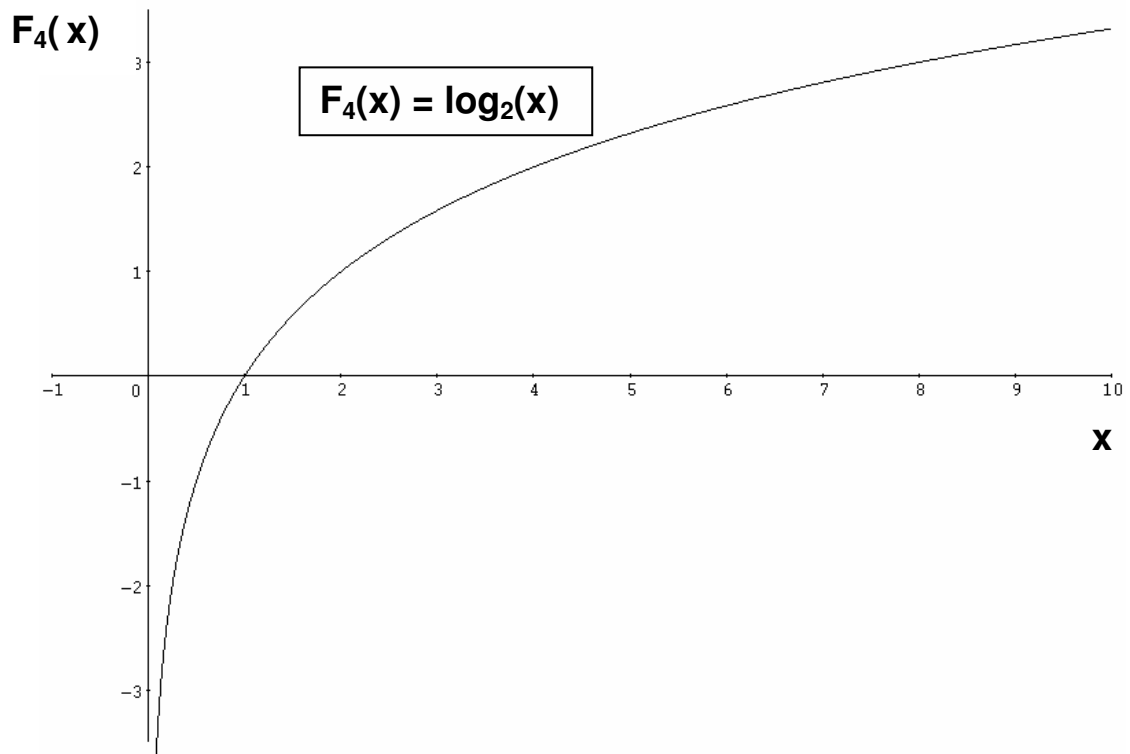
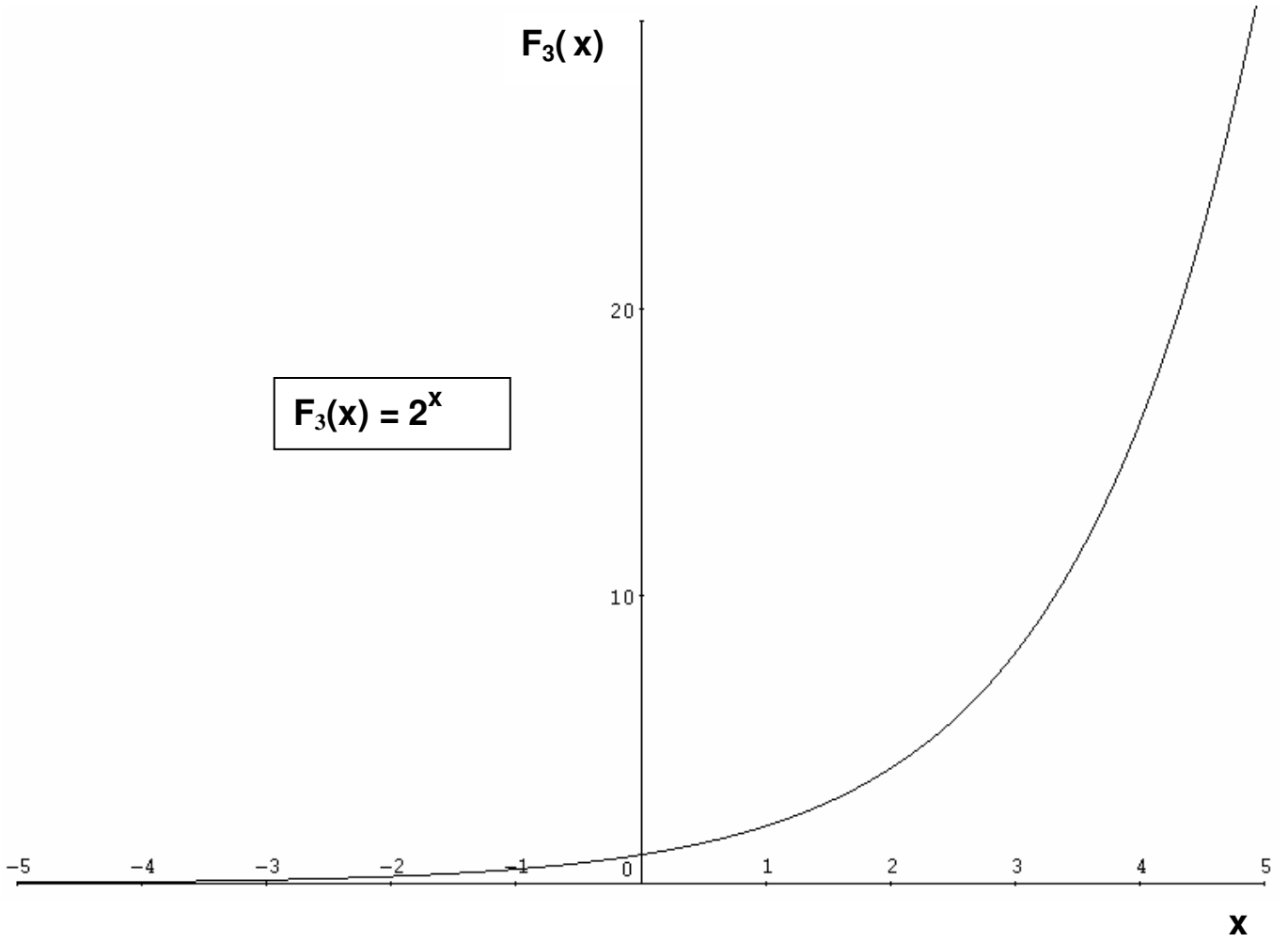
b)  $F_2(x) = \sqrt{x}$

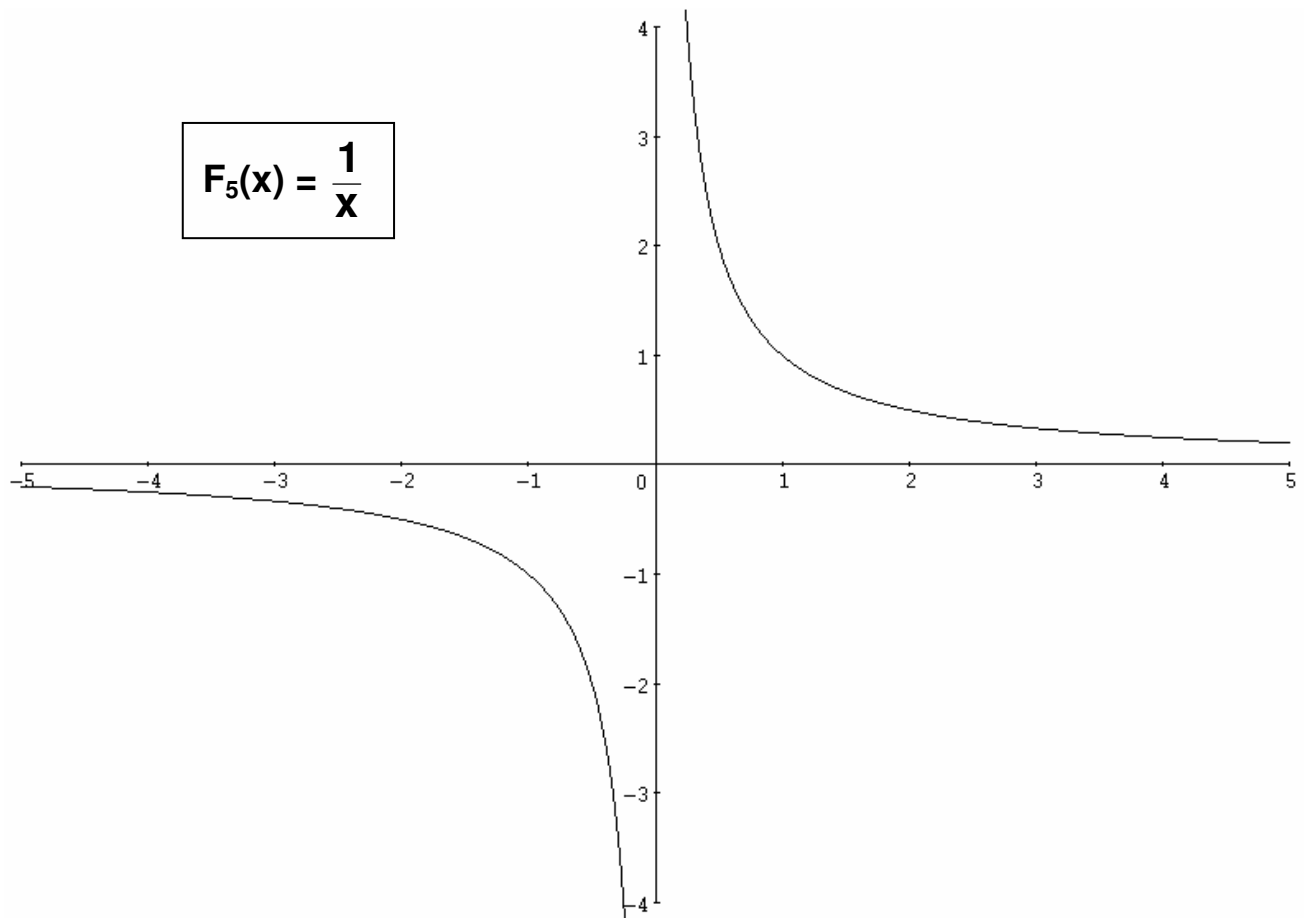
c)  $F_3(x) = 2^x$

d)  $F_4(x) = \log_2(x)$

e)  $F_5(x) = \frac{1}{x}$







## II.2. Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ .

On parle de fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$

lorsqu'on dispose d'une règle permettant d'associer  
à chaque élément de  $\mathbb{R}^n$  au maximum un élément de  $\mathbb{R}$ .

Souvent, une fonction  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  est définie comme suit :

$F(x_1, \dots, x_n) = [ \text{expression mathématique en les variables } x_1, \dots, x_n ]$

On définit le domaine de  $F$ , noté  $\text{dom } F$ , par

$\text{dom } F = \{ (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n \mid \text{l'expression est définie} \}$

**Exemple** ( fonction G de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  )

$$G(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$$

Dans ce cas,

$$\text{dom } G = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{l'expression } \frac{x_1}{x_2} \text{ est définie} \}$$

c'est-à-dire que :

$$\text{dom } G = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0 \}$$

Et pour les systèmes d'équations ?

**Exemple 1**

Le système de 2 équations à 3+2 variables  $x_1, x_2, x_3$  et  $y_1, y_2$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + y_1 + 3y_2 = 2 \\ 2x_1 + x_3 + y_1 + y_2 = 6 \end{cases}$$

***système définit (implicitement) les variables  $y_1, y_2$  en fonction des variables  $x_1, x_2, x_3$ .***

En effet (*exercice!*), le système

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + y_1 + 3y_2 = 2 \\ 2x_1 + x_3 + y_1 + y_2 = 6 \end{cases}$$

est équivalent au système

$$\begin{cases} y_1 = 8 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 \\ y_2 = -2 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

En économie, les modèles mathématiques sont tels que

ils définissent (implicitement) les variables *endogènes*  
en fonction des variables *exogènes*.

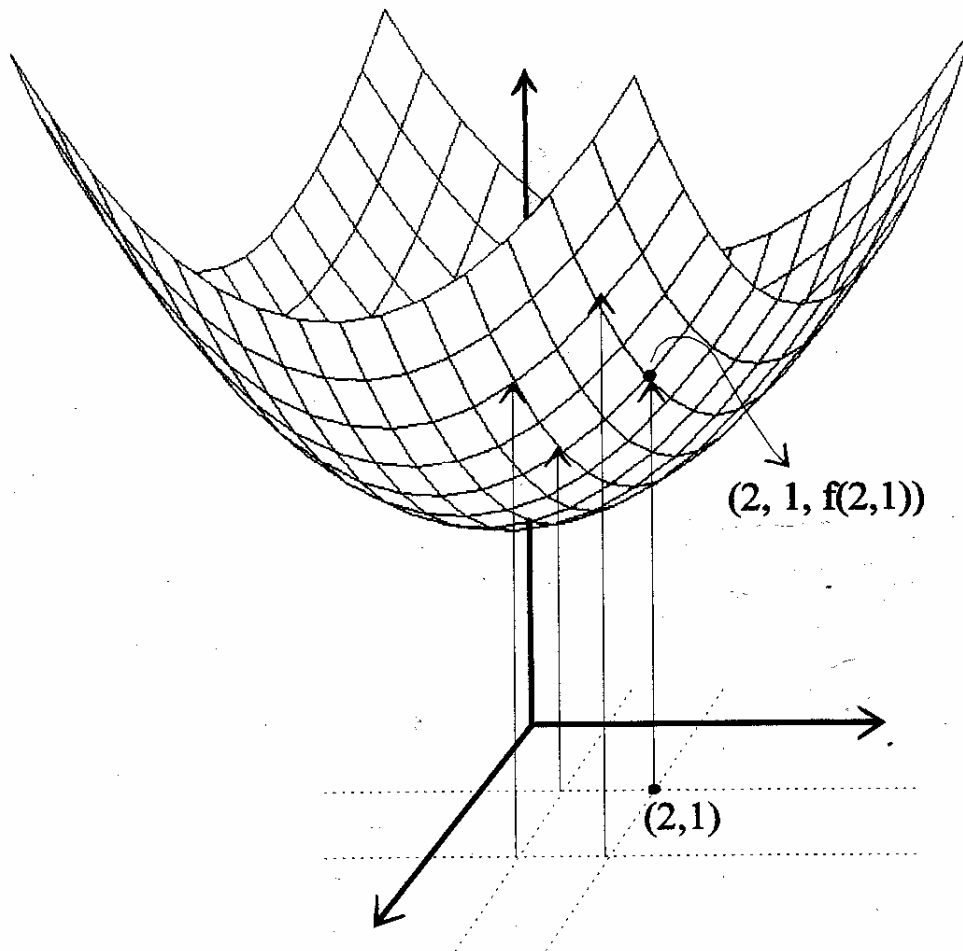
Sinon, pas de sens d'étudier l'influence de variations des variables exogènes sur chaque variable endogène.

### Représentation graphique.

Fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  : sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$

→ représentation graphique dans un espace à 3 dimensions (muni d'un repère).

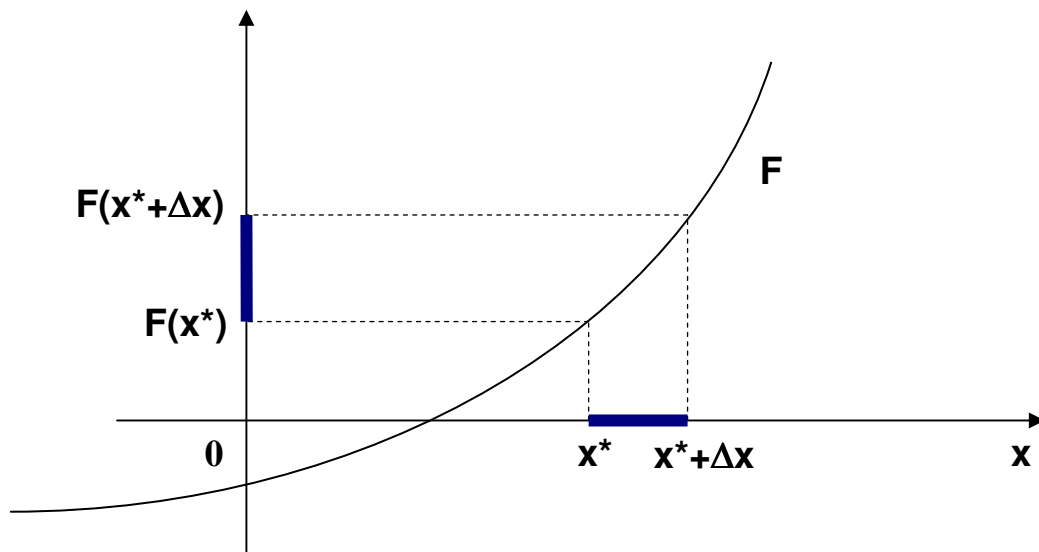
Si la fonction est continue, son graphe est une surface (dans un espace à 3 dimensions) qui rencontre chaque droite verticale au maximum en un point.



(utilisation de logiciels).

## II.3. Variation de valeur induite.

a) Soit  $F$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x^* \in \text{dom } F$ .



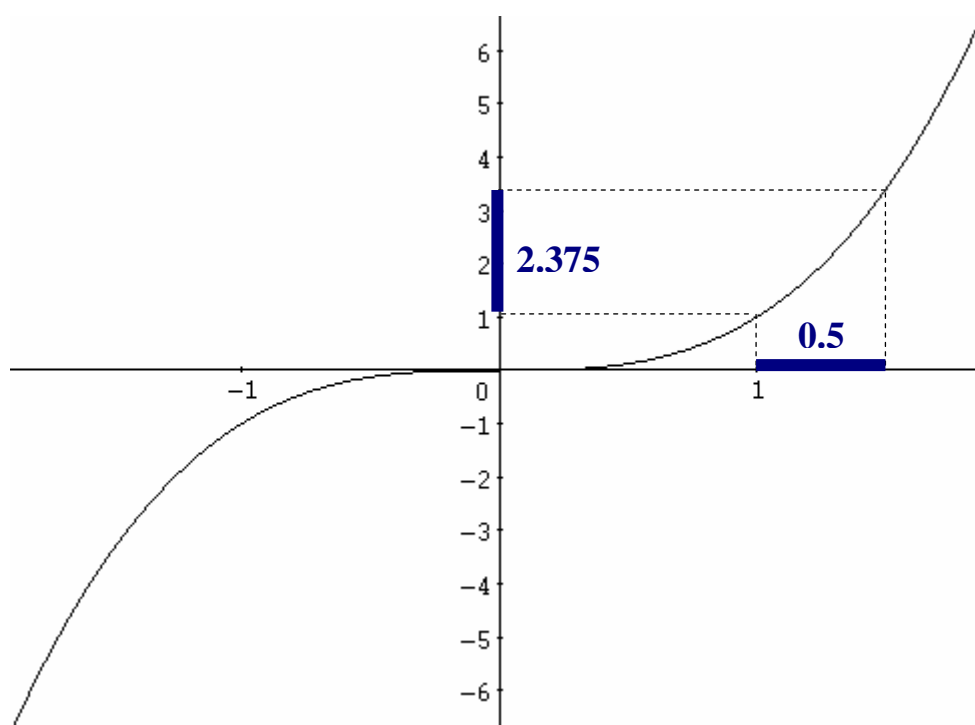
On note  $\Delta F(x^*, \Delta x) = F(x^* + \Delta x) - F(x^*)$  :

« variation en valeur de  $F$  en  $x^*$  induite par la variation en valeur  $\Delta x$  de  $x$  au départ de  $x^*$  »

*Exemple* : soit  $F(x) = x^3$  ,  $x^* = 1$  ,  $\Delta x = 0.5$

*La variation de  $F$  induite par l'augmentation de  $x$  de 0.5 à partir de 1 est*

$$\Delta F(1, 0.5) = F(1.5) - F(1) = 3.375 - 1 = 2.375$$



b) Soit  $F$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in \text{dom } F$ .

Notons  $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2)$

On note  $\Delta F(x^*, \Delta x) = F(x_1^* + \Delta x_1, x_2^* + \Delta x_2) - F(x_1^*, x_2^*) :$

« variation en valeur de  $F$  en  $x^*$  induite par les variations en valeur  $\Delta x_1$  de  $x_1$  au départ de  $x_1^*$  et  $\Delta x_2$  de  $x_2$  au départ de  $x_2^*$  »

*Exemple* : soit  $F(x_1, x_2) = x_1^3 \cdot x_2$ ,  $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (1, 2)$ ,

Si on envisage les variations en valeur suivantes des variables  $x_1$  et  $x_2$  au départ des valeurs 1 et 2 :

$$\Delta x_1 = 0.5, \quad \Delta x_2 = -0.1$$

*la variation de  $F$  induite par l'augmentation de  $x_1$  de 0.5 à partir de 1 et la diminution de  $x_2$  de 0.1 à partir de 2 est*

$$\begin{aligned} \Delta F(x^*, \Delta x) &= \Delta F((1, 2), (0.5, -0.1)) = F(1.5, 1.9) - F(1, 2) \\ &= 6.4125 - 2 \\ &= 4.4125 \end{aligned}$$

( on peut facilement généraliser ce qui précède aux fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  )

Remarque :

Cas particulier (en économie): variation d'une seule variable :

→ étude du rapport (par exemple)

$$\frac{F(x_1^* + \Delta x_1, x_2^*) - F(x_1^*, x_2^*)}{\Delta x_1}$$

(signe ?, etc...)

(dans le cas d'une fonction  $F$  d'une seule variable  $x$ , ce rapport devient


$$\frac{F(x^* + \Delta x) - F(x^*)}{\Delta x} ).$$


ANNEXE au chapitre II :  
rappel sur **paraboles** (dont l'axe de symétrie est // à l'axe des y)

|   |
|---|
| équation générale : $y = a.x^2 + b.x + c$ , $a, b, c \in R$ |
|---|

**1. CONCAVITE**

La concavité est déterminée par le signe du coefficient de  $x^2$

$a > 0 \Rightarrow$  la parabole a sa concavité tournée vers le haut : 

$a < 0 \Rightarrow$  la parabole a sa concavité tournée vers le bas : 

**2. AXE DE SYMETRIE**

L'axe de symétrie est // OY et a pour équation :  $x = \frac{-b}{2.a}$

**3. EXTREMUM**

$a > 0 \Rightarrow$  l' **extremum** est un minimum

$a < 0 \Rightarrow$  l' **extremum** est un maximum

Calculer  $\Delta = b^2 - 4.a.c$

L'extremum a pour coordonnée  $\left( \frac{-b}{2.a}, \frac{-\Delta}{4.a} \right)$

**4. INTERSECTION DE LA PARABOLE AVEC LES AXES**

• intersection **avec axe des y** : un seul point de coordonnée (0,c)

• intersection **avec axe des x** : 0, 1 ou 2 points d'intersection.

Calculer  $\Delta = b^2 - 4.a.c$  ( déjà calculé au point 3 )

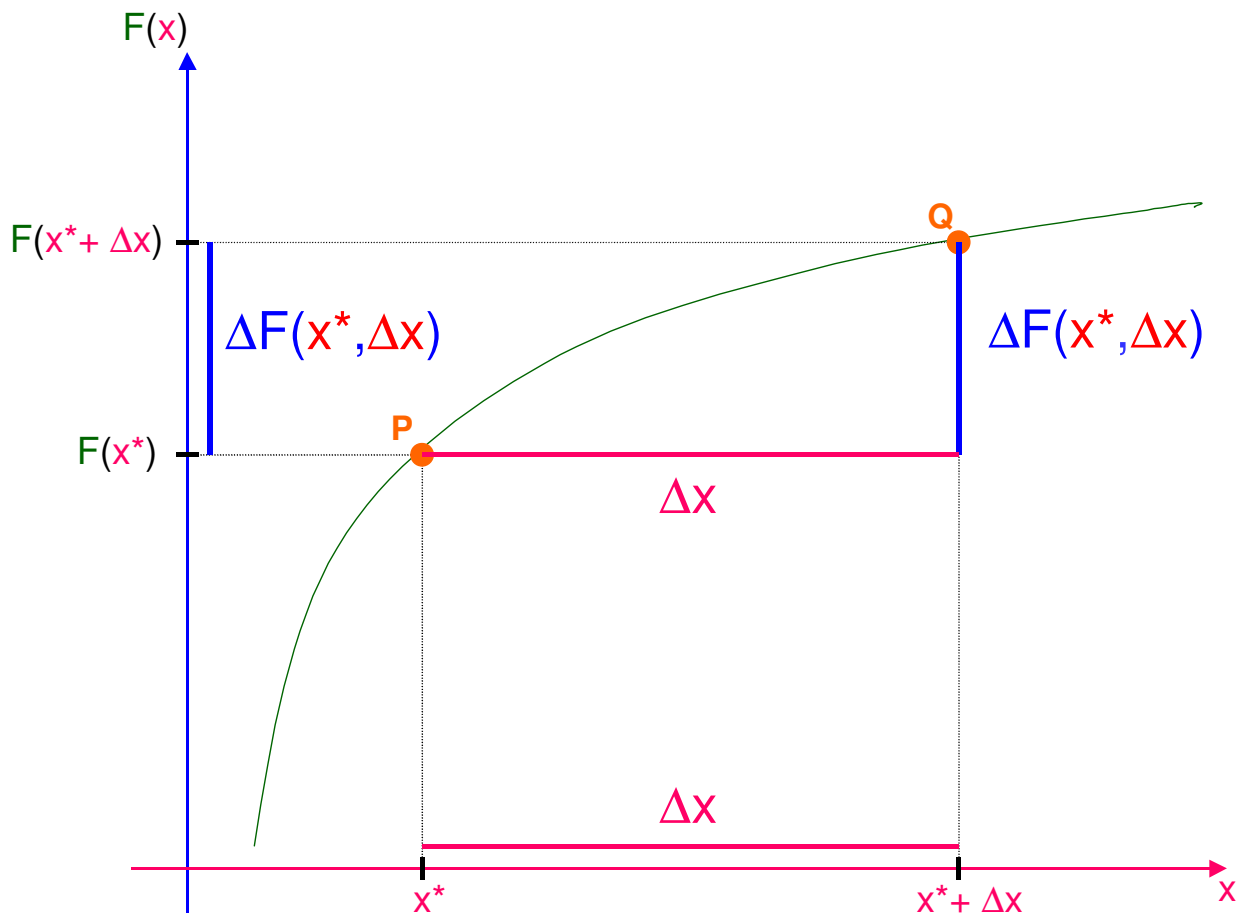
Si  $\Delta > 0$  deux points d'intersection  $\left( \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2.a}, 0 \right)$  et  $\left( \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2.a}, 0 \right)$

Si  $\Delta = 0$  un seul point d'intersection  $\left( \frac{-b}{2.a}, 0 \right)$

Si  $\Delta < 0$  aucun point d'intersection

# Chapitre III : Notion de dérivation

## d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$



### Définitions

1)  $F$  est *dérivable en  $x^*$*  si

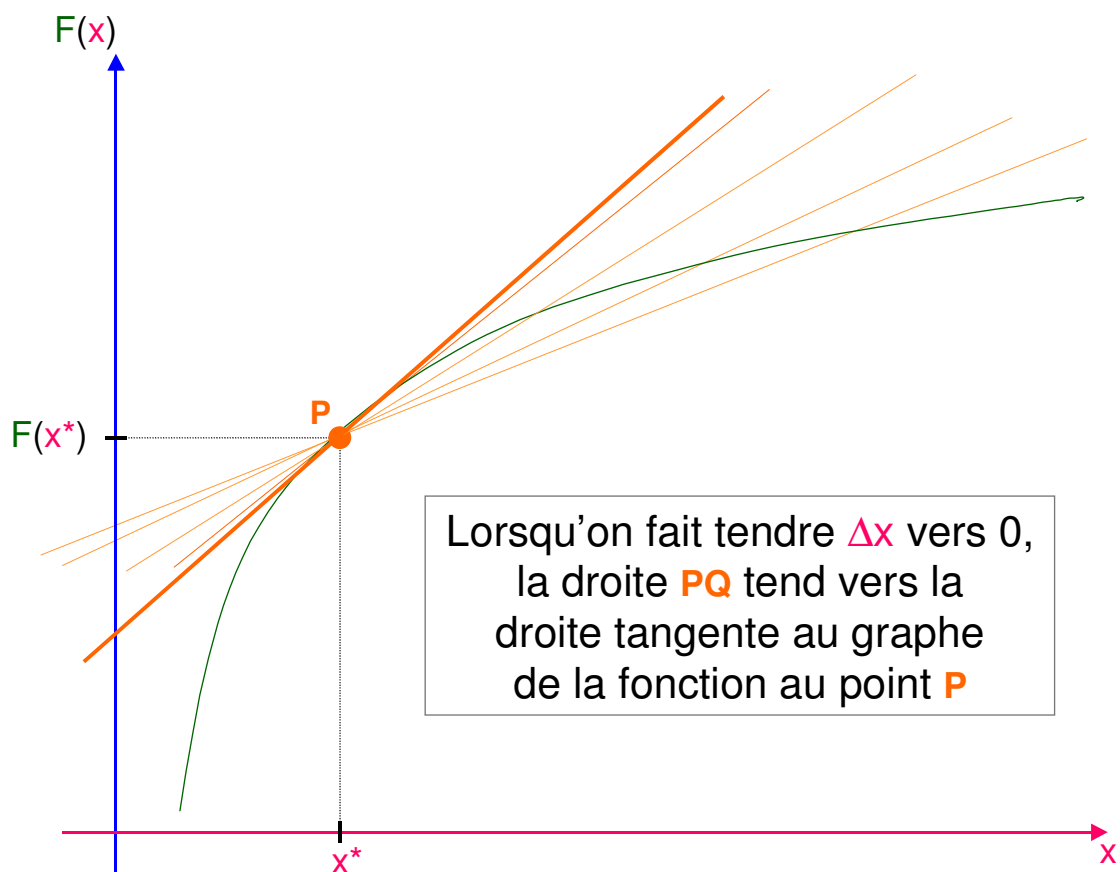
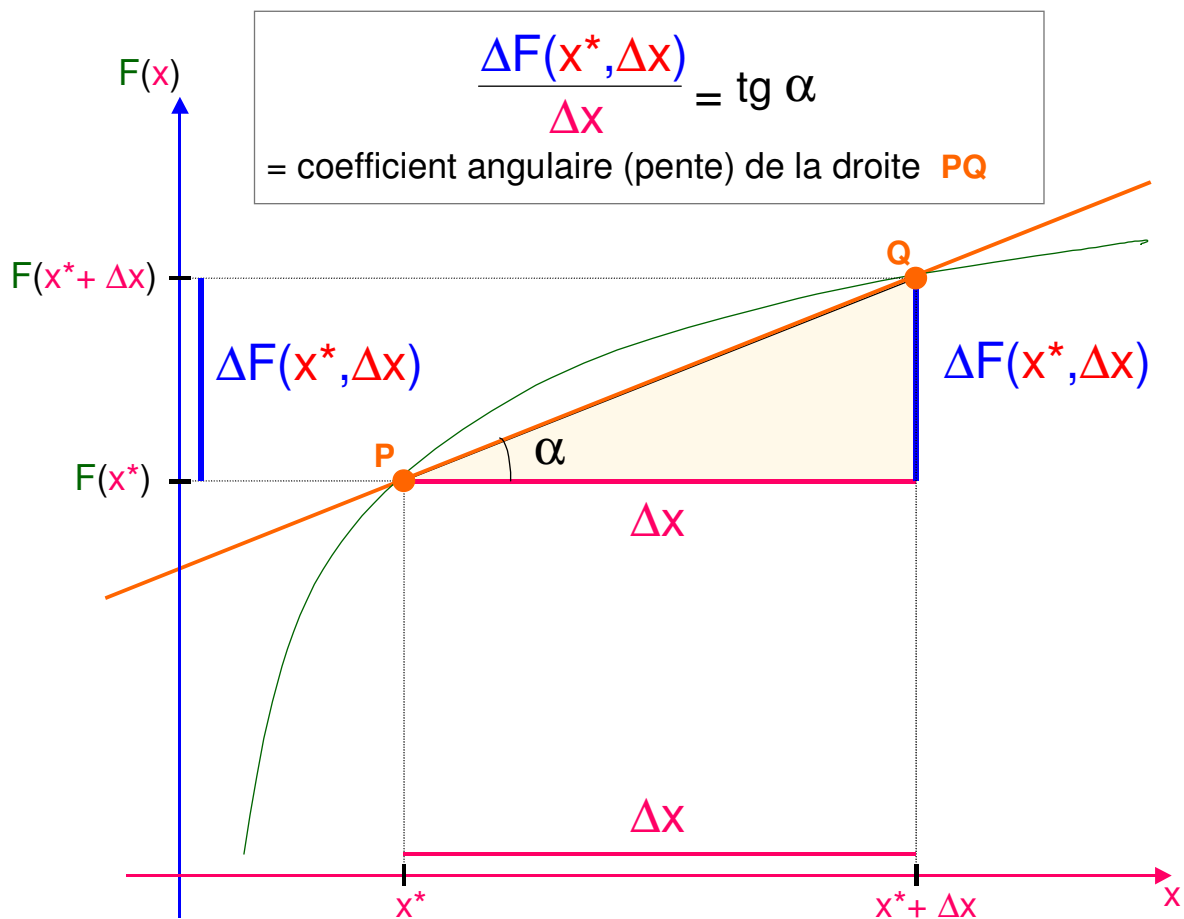
$\frac{F(x^* + \Delta x) - F(x^*)}{\Delta x}$  tend vers un nombre réel fini quand  $\Delta x$  tend 0

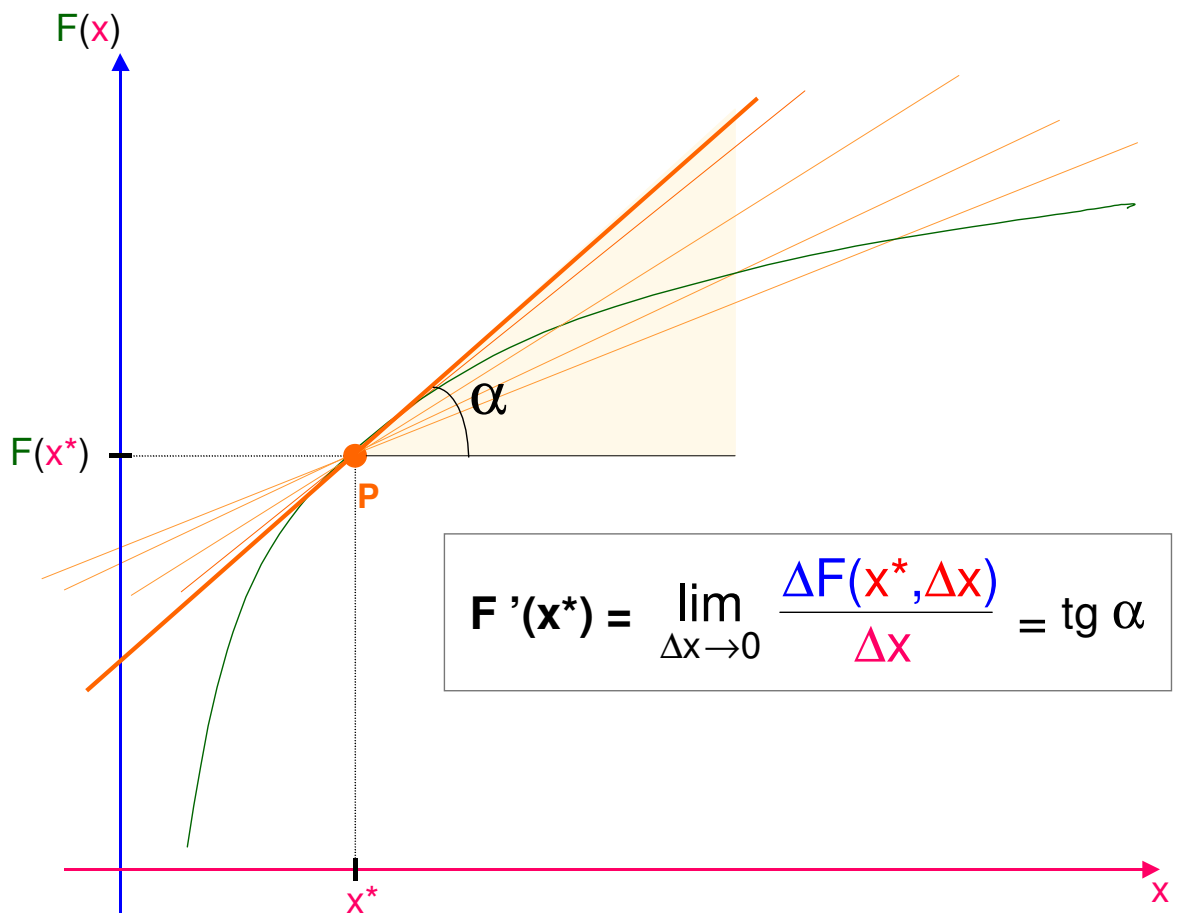
2) Quand  $F$  est dérivable en  $x^*$ , on note

$$F'(x^*) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x^* + \Delta x) - F(x^*)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x^*, \Delta x)}{\Delta x}$$

On dit que  $F'(x^*)$  est le *nombre dérivée de  $F$  en  $x^*$*

## Interprétation géométrique.





### Conséquences

$F'(x^*) > 0 \Rightarrow F$  est *croissante* en  $x^*$

$F'(x^*) < 0 \Rightarrow F$  est *décroissante* en  $x^*$

L'équation de la tangente au graphe de  $F$  au point d'abscisse  $X^*$  est

$$y = F'(x^*) \cdot (x - x^*) + F(x^*)$$

Remarque : la notion de « nombre dérivée » peut être étendue à celle de « fonction dérivée », notée  $F'$ , dont le domaine est

$$\text{dom } F' = \{ x \in \mathbb{R} \mid F \text{ dérivable en } x \}$$

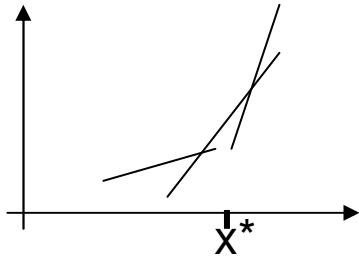
On parle ainsi de « fonction dérivée première »  $F'$

« fonction dérivée seconde »  $F''$  (dérivée de  $F'$ )

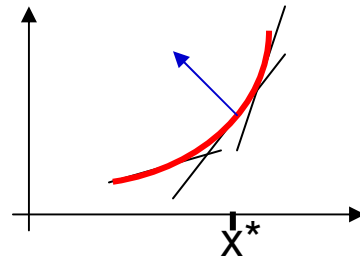
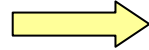
etc...

Dans la suite de ce cours, nous n'envisagerons les fonctions et leurs dérivées qu'en des points où celles-ci sont continues.

**Conséquences :**

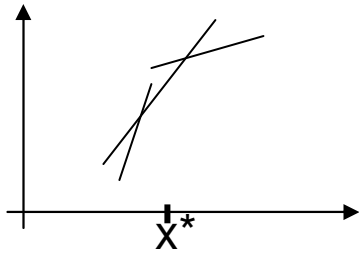


$F''(x^*) > 0$

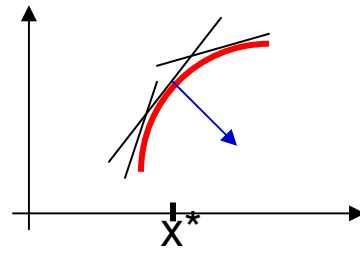
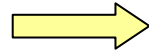


$\Rightarrow F'$  est croissante en  $x^*$

$\Rightarrow F$  tourne sa concavité vers le haut en  $x^*$

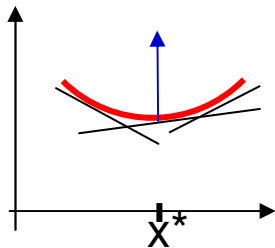


$F''(x^*) < 0$

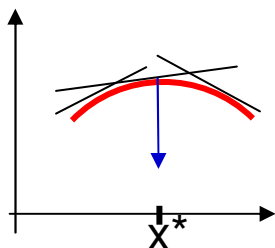


$\Rightarrow F'$  décroissante en  $x^*$

$\Rightarrow F$  tourne sa concavité vers le bas en  $x^*$



$\left. \begin{matrix} F'(x^*) = 0 \\ F''(x^*) > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow F$  admet un *minimum local* en  $x^*$



$\left. \begin{matrix} F'(x^*) = 0 \\ F''(x^*) < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow F$  admet un *maximum local* en  $x^*$

## Règles de dérivation

Soit  $\equiv$  u et v deux fonctions dérivables de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$

$\equiv$  a et b deux constantes réelles.

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u.v)' = u'.v + u.v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

$$(a.u)' = a.u'$$

$$b' = 0$$

$$(u^m)' = m.u^{m-1}.u'$$

$$(e^u)' = e^u.u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

## Fonctions « dérivée » de quelques fonctions usuelles

| Si la fonction F de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est définie par : | Alors la fonction dérivée F' est définie par : |
|--|--|
| $F(x) = a.x + b$   | $F'(x) = a$                                    |
| $F(x) = x^m$   | $F'(x) = m.x^{m-1}$                            |
| $F(x) = e^x$   | $F'(x) = e^x$                                  |
| $F(x) = \ln x$   | $F'(x) = \frac{1}{x}$                          |

Remarque : on voit souvent ces résultats présentés sous la forme

$$(a.x+b)' = a \quad (x^m)' = m.x^{m-1} \quad (e^x)' = e^x \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

ce qui est très parlant mais est obtenu au prix d'un abus de notation.

**EXERCICE III.1 : calculer les dérivées des fonctions suivantes :**

1)  $F(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

2)  $F(x) = \sqrt{x^2 + x}$

3)  $F(x) = 3^{2x+1}$

4)  $F(x) = \ln(1 + \sqrt{x})$

5)  $F(x) = \frac{1}{3x^2 + 5}$

6)  $F(x) = e^{\frac{1}{x}}$

7)  $F(x) = \log_2(2x + 3)$

8)  $F(x) = x \cdot \ln(x)$

**EXERCICE III.2 : pour chacune des fonctions suivantes,**

- déterminer le domaine de définition
- rechercher les extremas
- dessinez le graphe de la fonction

1)  $F(x) = e^x$  (*fonction exponentielle de base e*)

2)  $F(x) = 2^x$  (*fonction exponentielle de base 2*)

3)  $F(x) = 0.5^x$  (*fonction exponentielle de base  $\frac{1}{2}$* )

4)  $F(x) = \ln(x)$  (*logarithme de base e , dit « népérien »*)

5)  $F(x) = \log_2(x)$  (*logarithme de base 2*)

6)  $F(x) = \sqrt{x}$

7)  $F(x) = x^2 + 2x + 3$

8)  $F(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

9)  $F(x) = a^x$  ( $a > 0$ )

10)  $F(x) = \log_a(x)$  ( $a > 1$ )

### EXERCICE III.1 : réponses :

1)  $F'(x) = 3x^2 - 6x - 1$

2)  $F'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$

3)  $F'(x) = 2 \cdot \ln(3) \cdot 3^{2x+1}$

4)  $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})}$

5)  $F(x) = \frac{-6x}{(3x^2 + 5)^2}$

6)  $F(x) = \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

7)  $F(x) = \frac{2}{\ln(2) \cdot (2x + 3)} \log_2(2x + 3)$

8)  $F(x) = \ln(x) + 1$

### EXERCICE III.2 : graphes :

1)

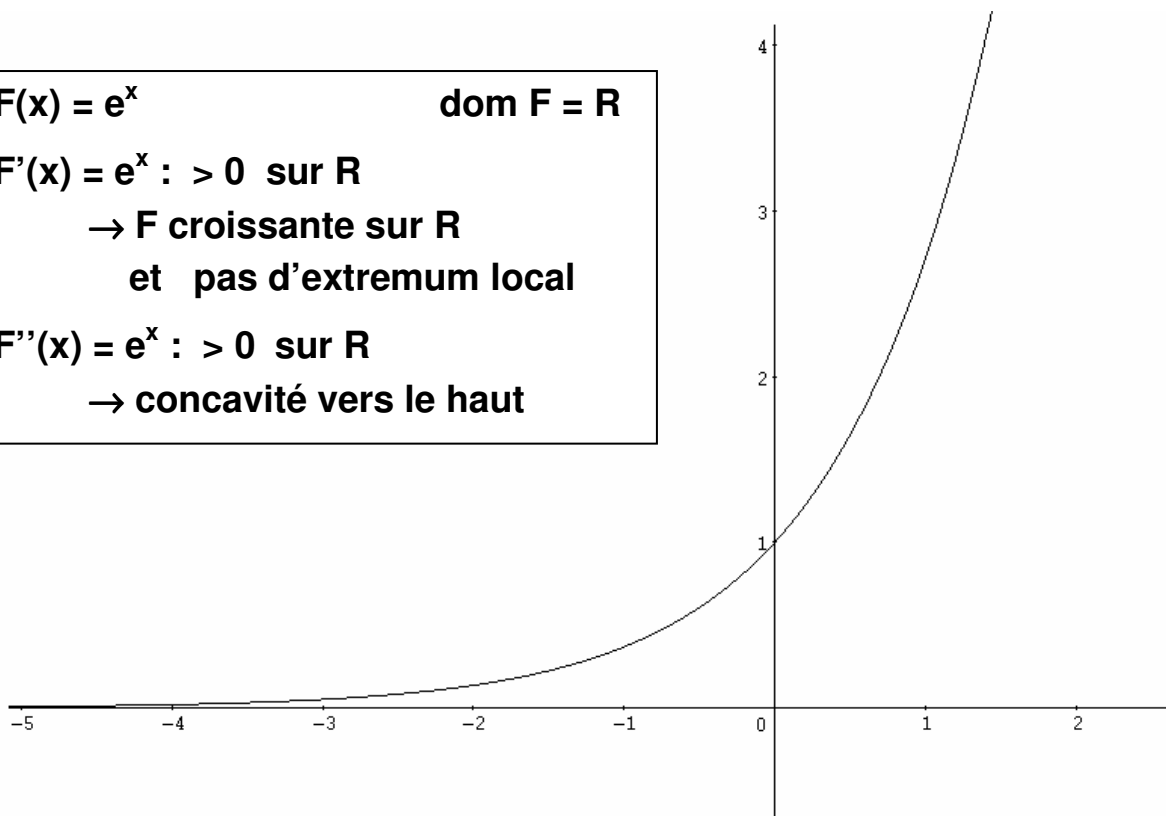
$F(x) = e^x$                        $\text{dom } F = \mathbb{R}$

$F'(x) = e^x : > 0$  sur  $\mathbb{R}$

→  $F$  croissante sur  $\mathbb{R}$   
et pas d'extremum local

$F''(x) = e^x : > 0$  sur  $\mathbb{R}$

→ concavité vers le haut



2)

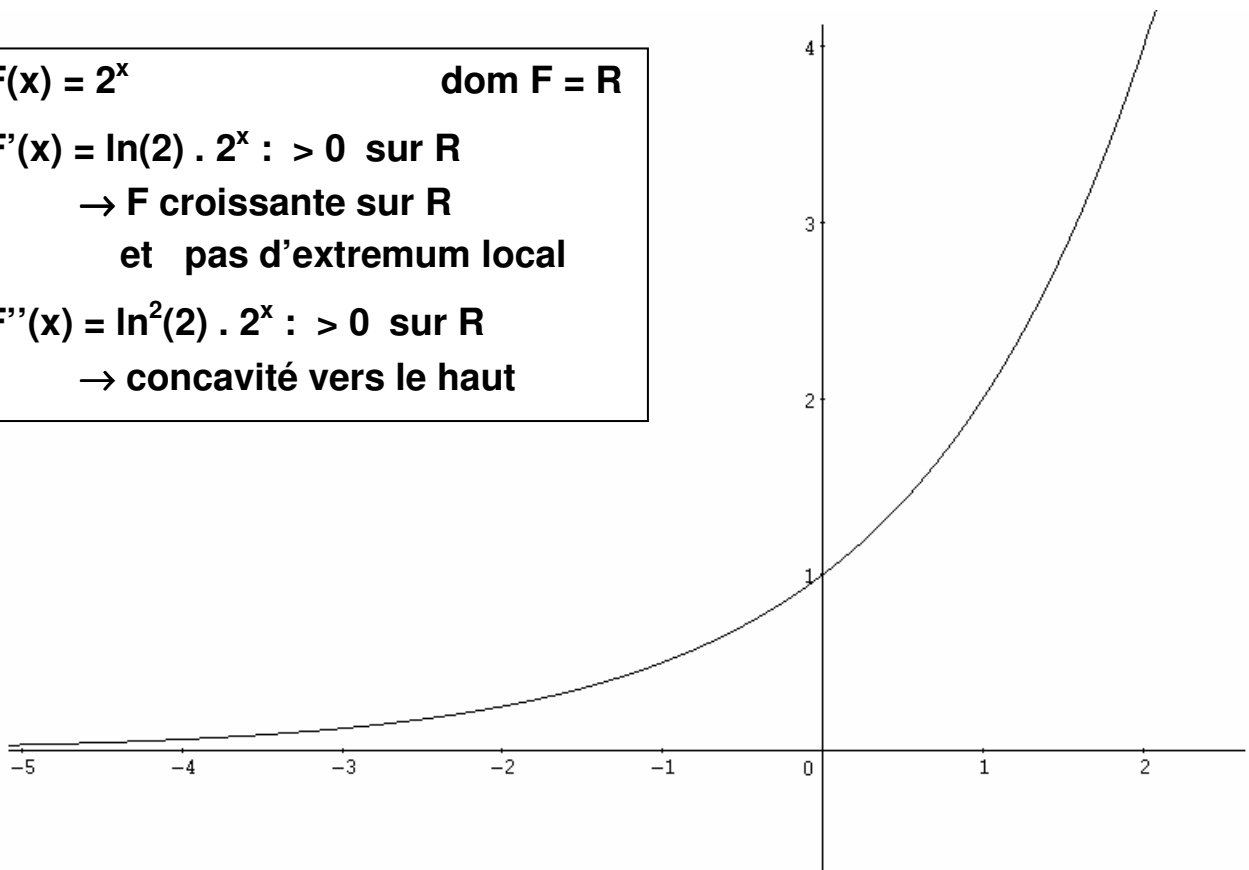
$$F(x) = 2^x \quad \text{dom } F = \mathbb{R}$$

$$F'(x) = \ln(2) \cdot 2^x : > 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

→ F croissante sur  $\mathbb{R}$   
et pas d'extremum local

$$F''(x) = \ln^2(2) \cdot 2^x : > 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

→ concavité vers le haut



3)

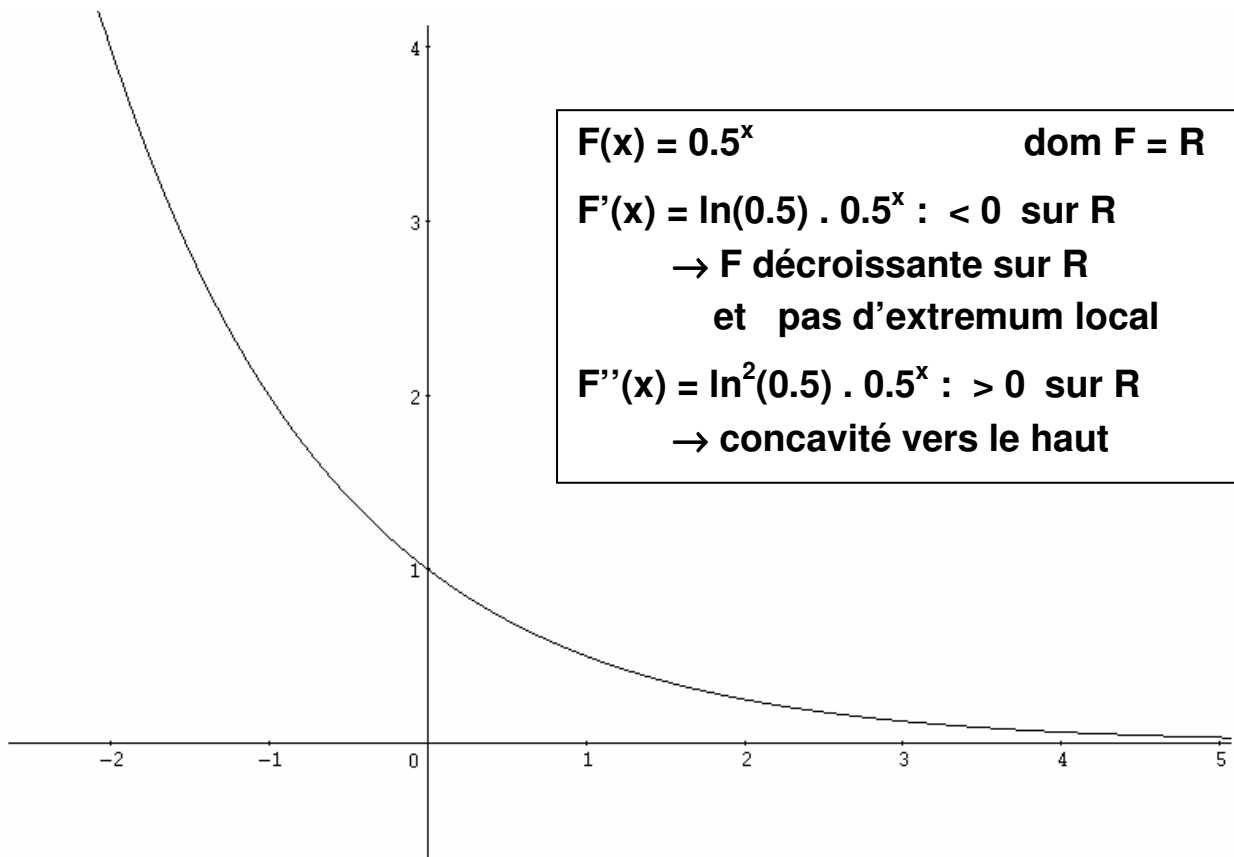
$$F(x) = 0.5^x \quad \text{dom } F = \mathbb{R}$$

$$F'(x) = \ln(0.5) \cdot 0.5^x : < 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

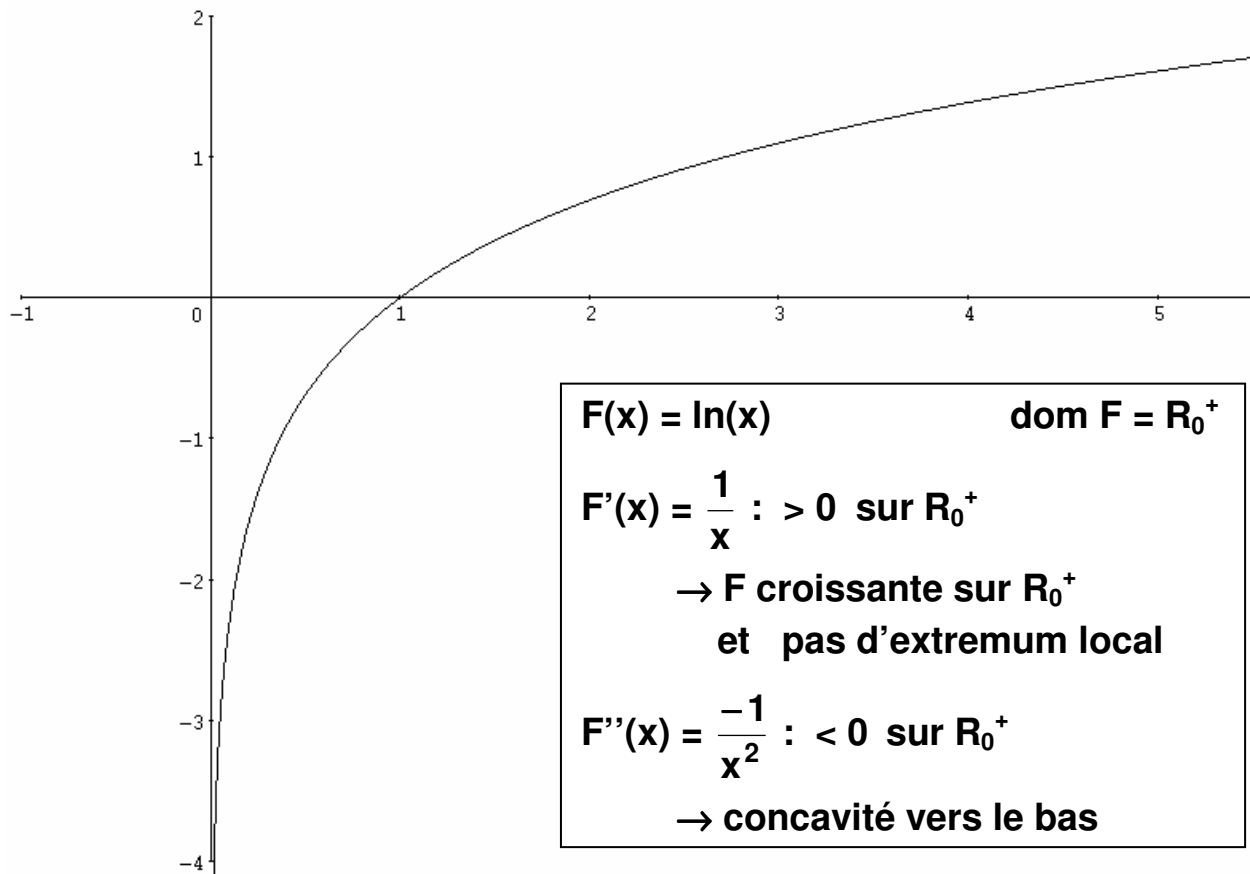
→ F décroissante sur  $\mathbb{R}$   
et pas d'extremum local

$$F''(x) = \ln^2(0.5) \cdot 0.5^x : > 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

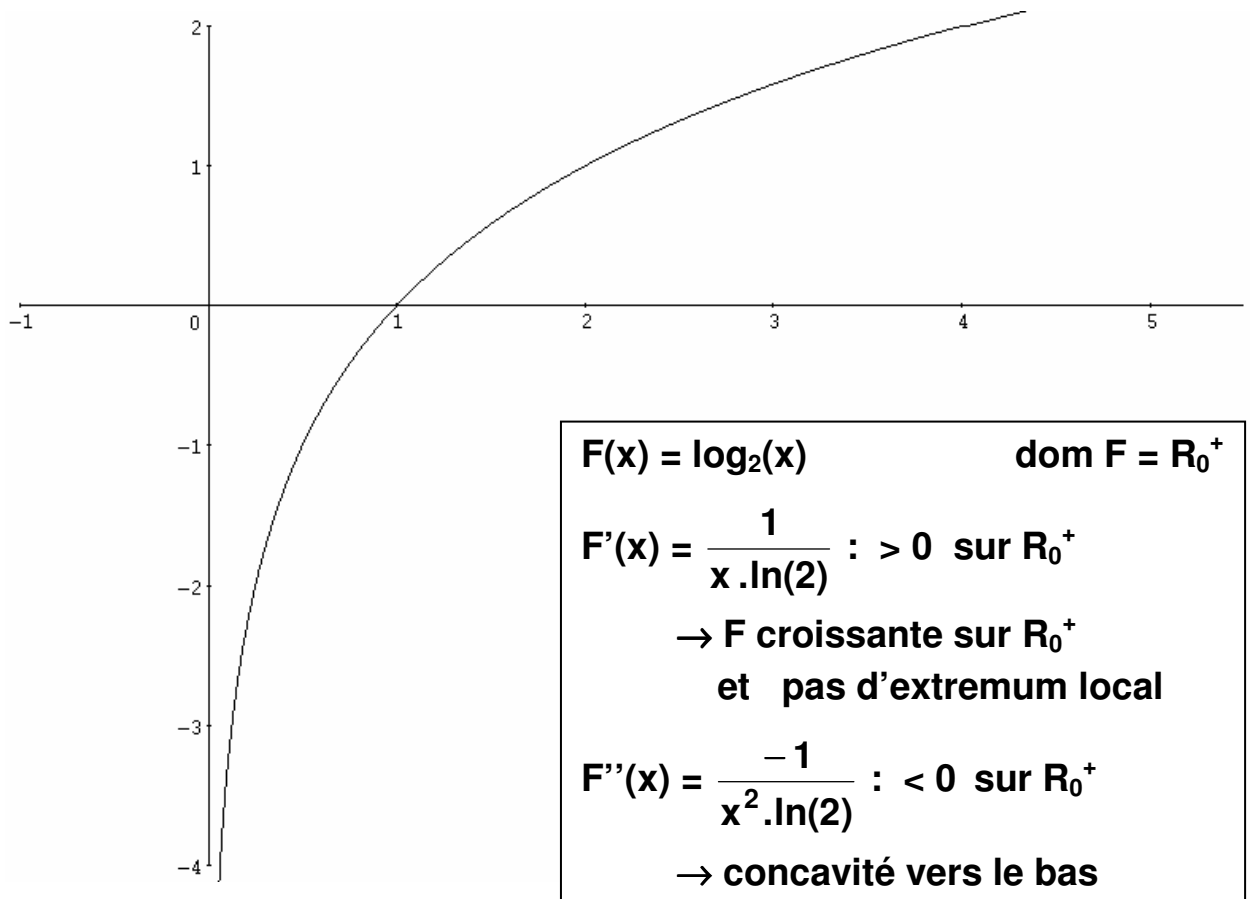
→ concavité vers le haut



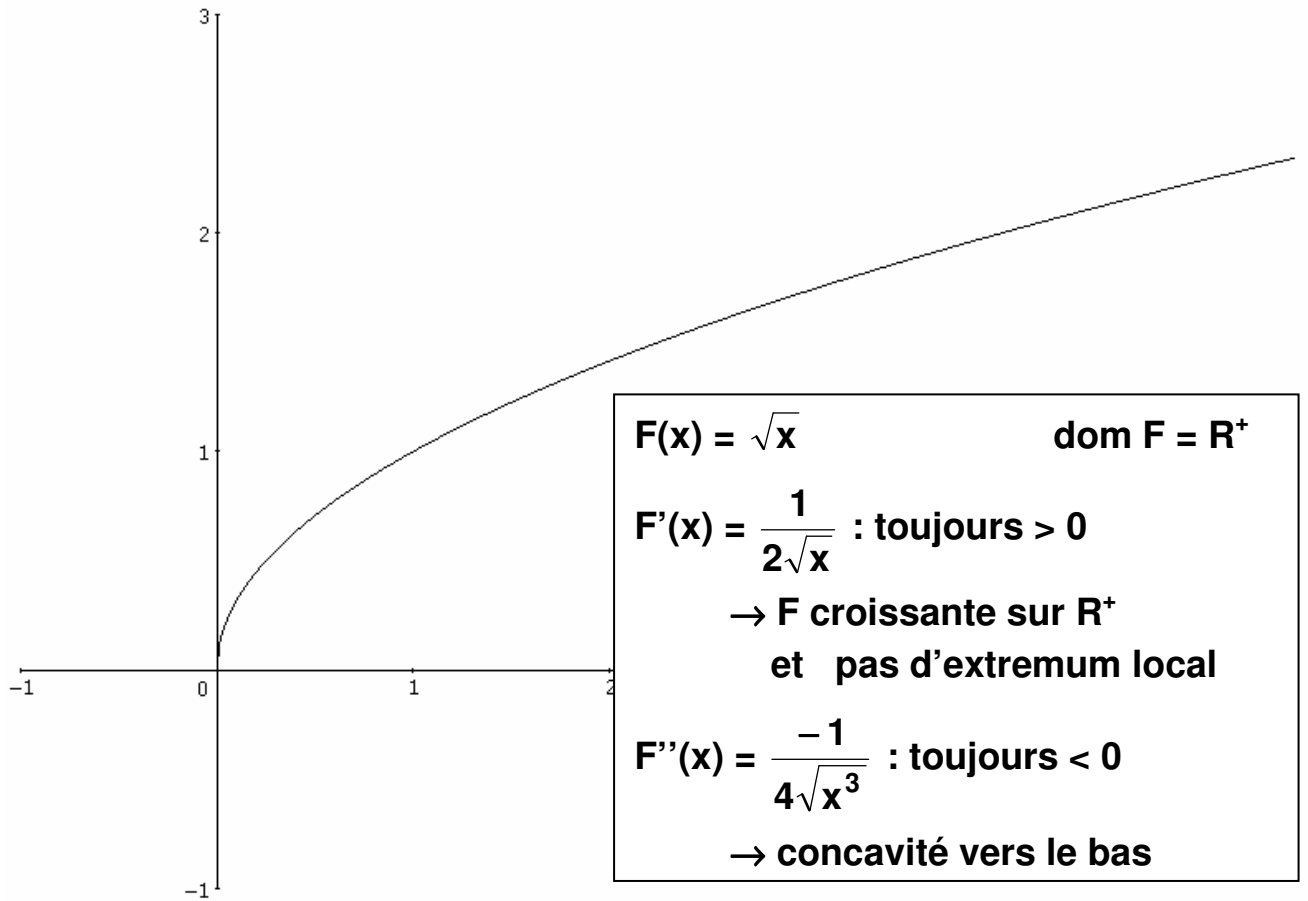
4)



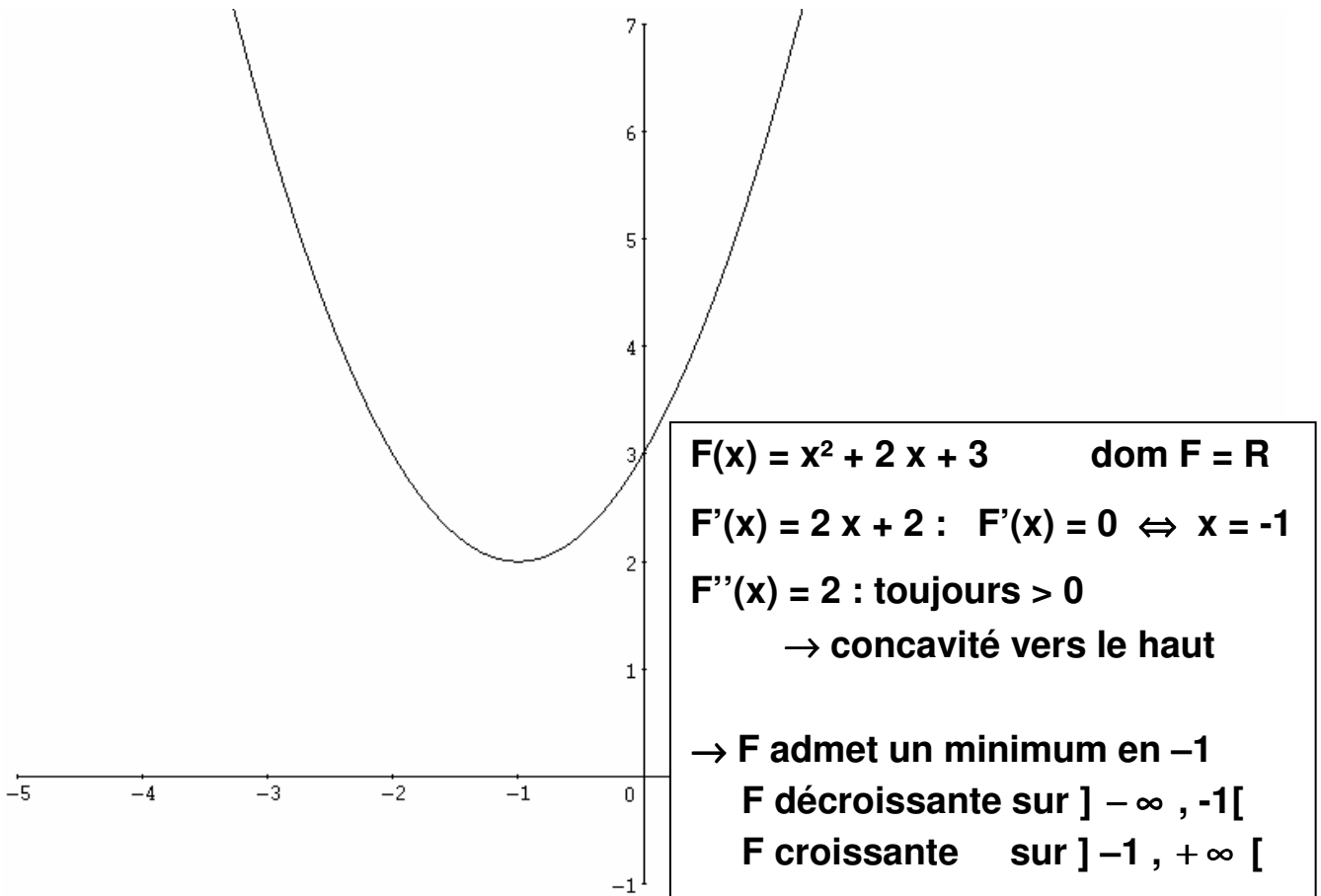
5)



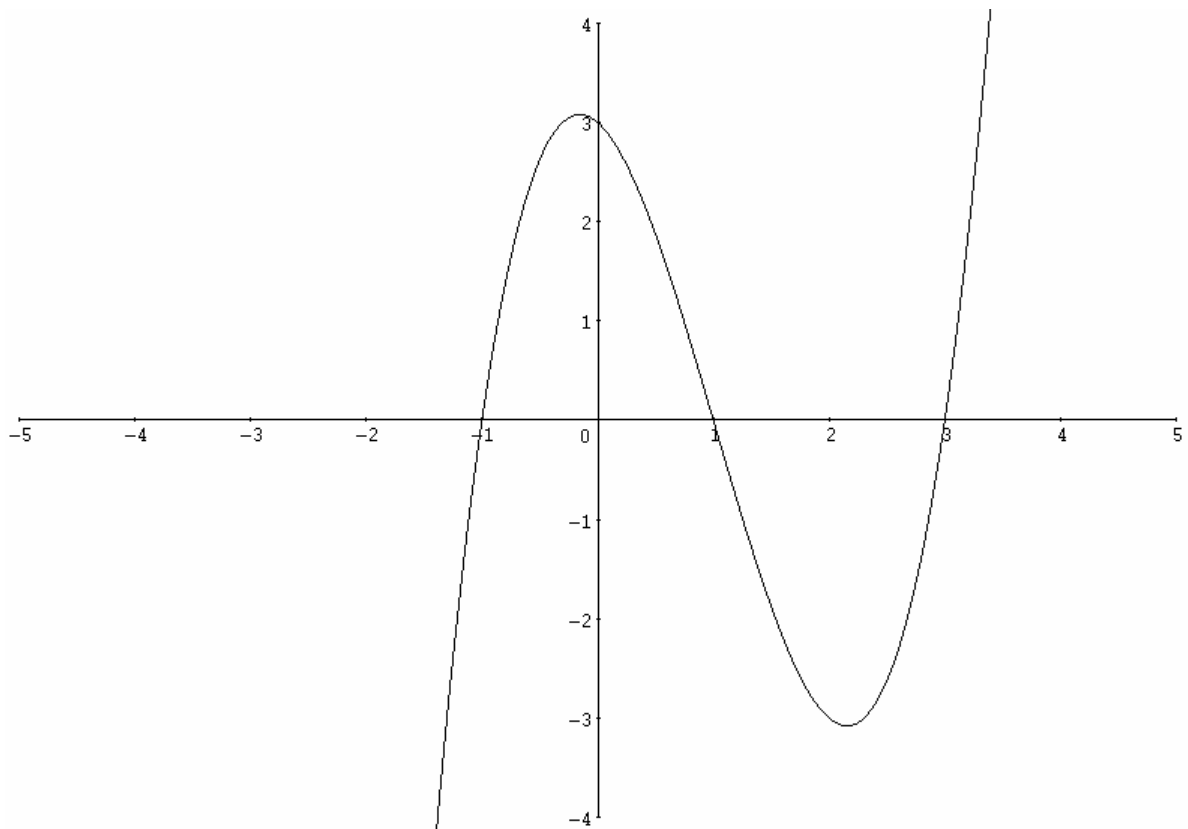
6)



7)



8)



$$F(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

$$\text{dom } F = \mathbb{R}$$

$$F'(x) = 3x^2 - 6x - 1 : F'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[ x = 1 + 2\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } x = 1 - 2\frac{\sqrt{3}}{3} \right]$$

$$F''(x) = 6x - 6 :$$

si  $x < 1$  :  $F''(x) < 0 \rightarrow$  concavité vers le bas

si  $x > 1$  :  $F''(x) > 0 \rightarrow$  concavité vers le haut

$\rightarrow$  F admet un minimum local en  $1 + 2\frac{\sqrt{3}}{3}$

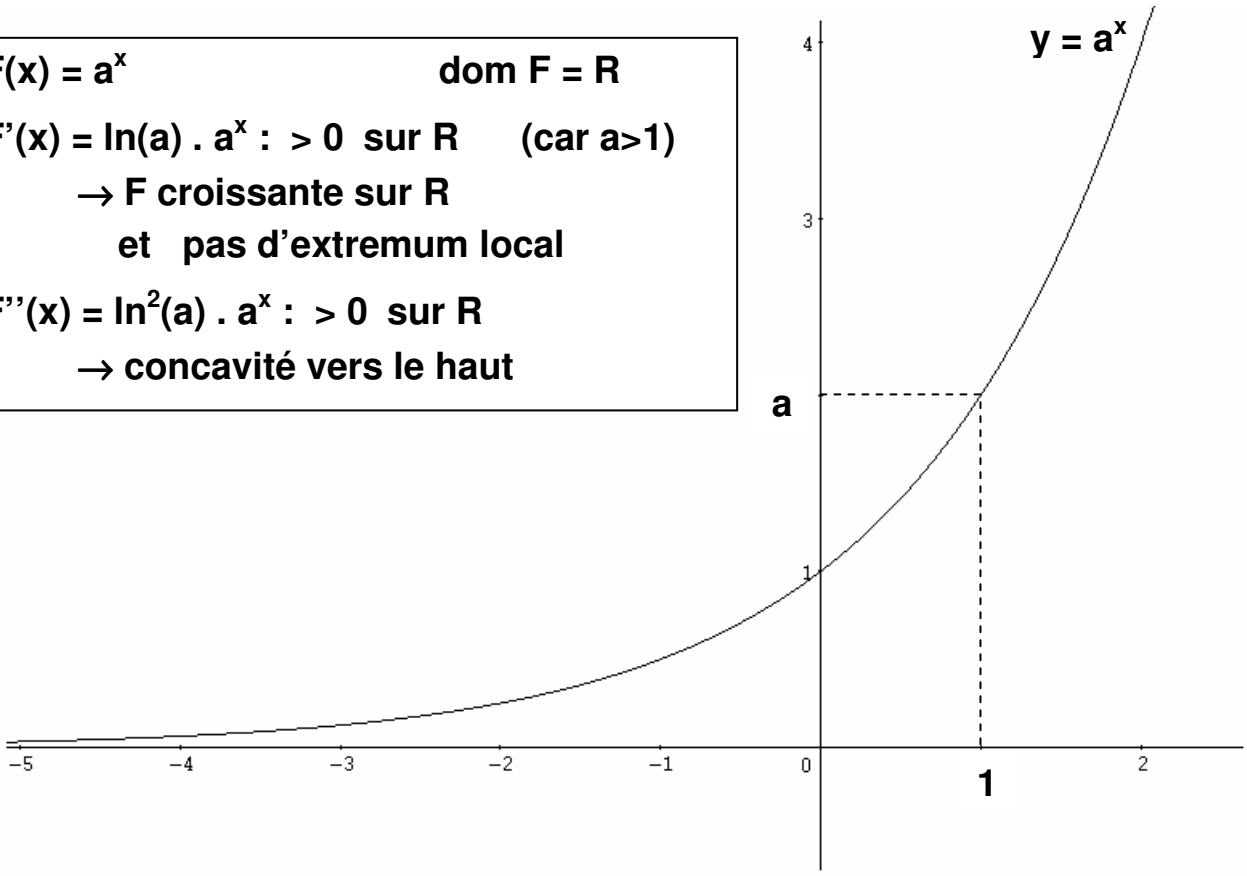
F admet un maximum local en  $1 - 2\frac{\sqrt{3}}{3}$

F décroissante sur  $] 1 - 2\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + 2\frac{\sqrt{3}}{3} [$

F croissante sur  $] -\infty, 1 - 2\frac{\sqrt{3}}{3} [ \cup ] 1 + 2\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty [$

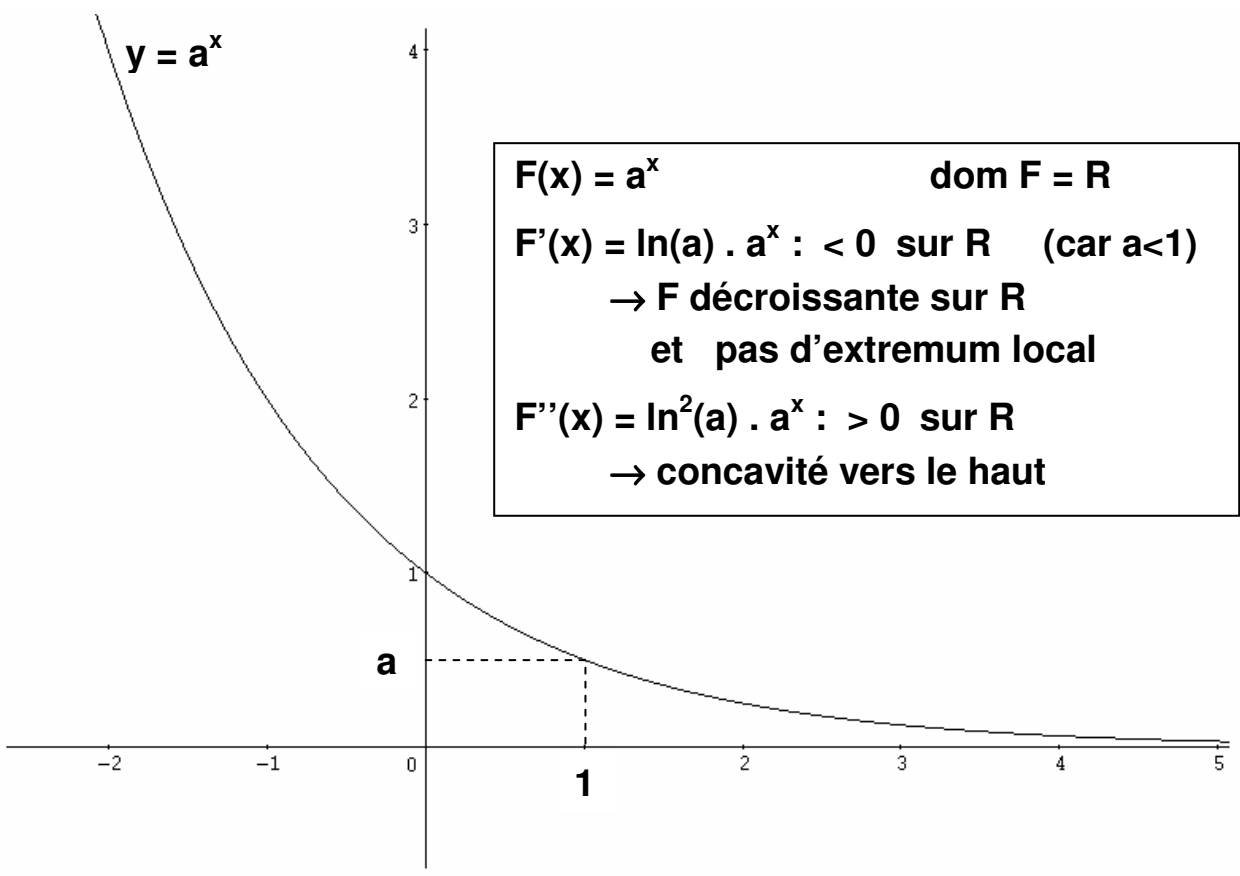
9) si  $a > 1$

$F(x) = a^x$                        $\text{dom } F = \mathbb{R}$   
 $F'(x) = \ln(a) \cdot a^x : > 0$  sur  $\mathbb{R}$     (car  $a > 1$ )  
    →  $F$  croissante sur  $\mathbb{R}$   
    et pas d'extremum local  
 $F''(x) = \ln^2(a) \cdot a^x : > 0$  sur  $\mathbb{R}$   
    → concavité vers le haut

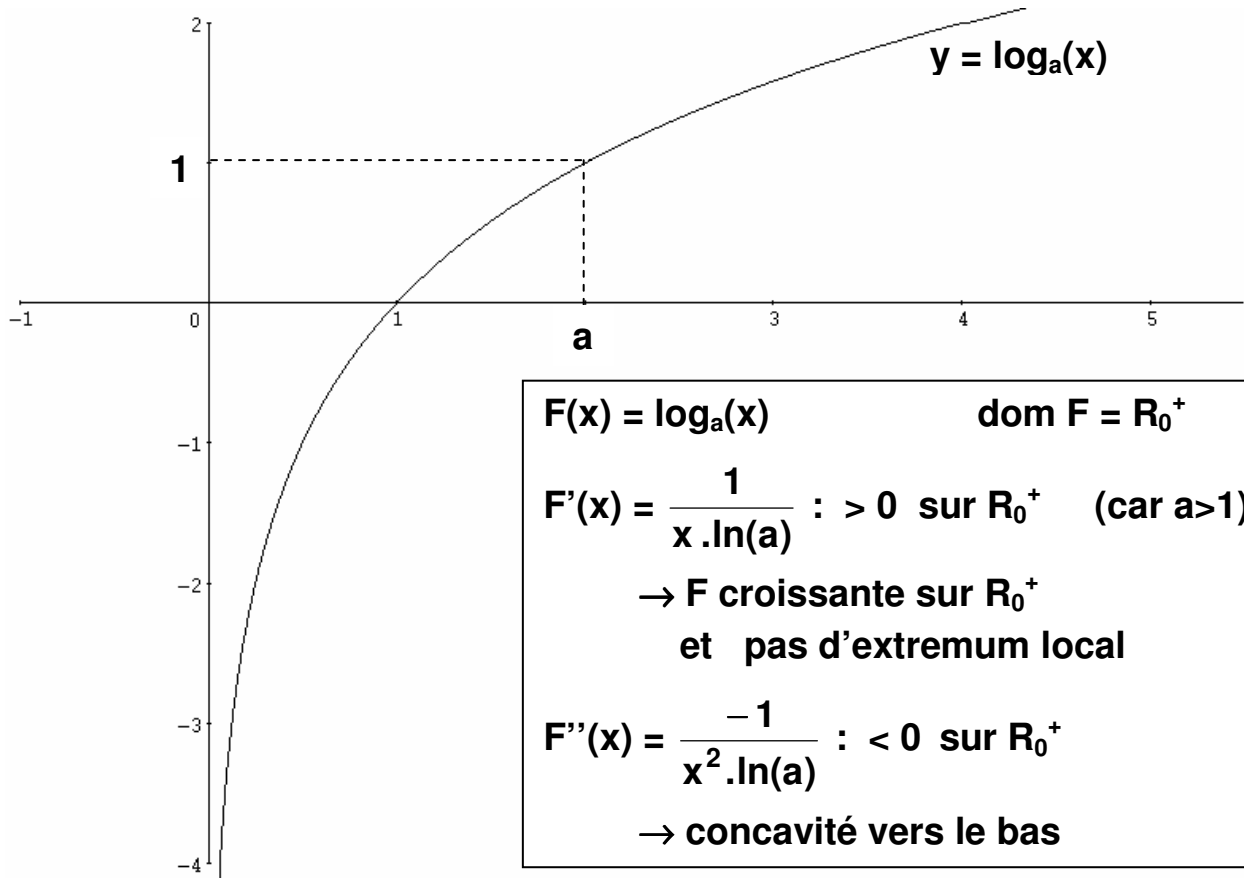


si  $a < 1$

$F(x) = a^x$                        $\text{dom } F = \mathbb{R}$   
 $F'(x) = \ln(a) \cdot a^x : < 0$  sur  $\mathbb{R}$     (car  $a < 1$ )  
    →  $F$  décroissante sur  $\mathbb{R}$   
    et pas d'extremum local  
 $F''(x) = \ln^2(a) \cdot a^x : > 0$  sur  $\mathbb{R}$   
    → concavité vers le haut



10) si  $a > 1$



Rappels : soit  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x^p) = p \cdot \log_a(x)$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad a^{\log_a(x)} = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \log_a(a^x) = x$$

On dit que le logarithme en base  $a$  et l'exponentielle de base  $a$  sont des fonctions *réciproques*. En particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{\ln(x)} = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x$$

Dans la suite du cours , nous ne considérerons que des fonctions continues, dérivables et de dérivées continues sur leurs domaines.

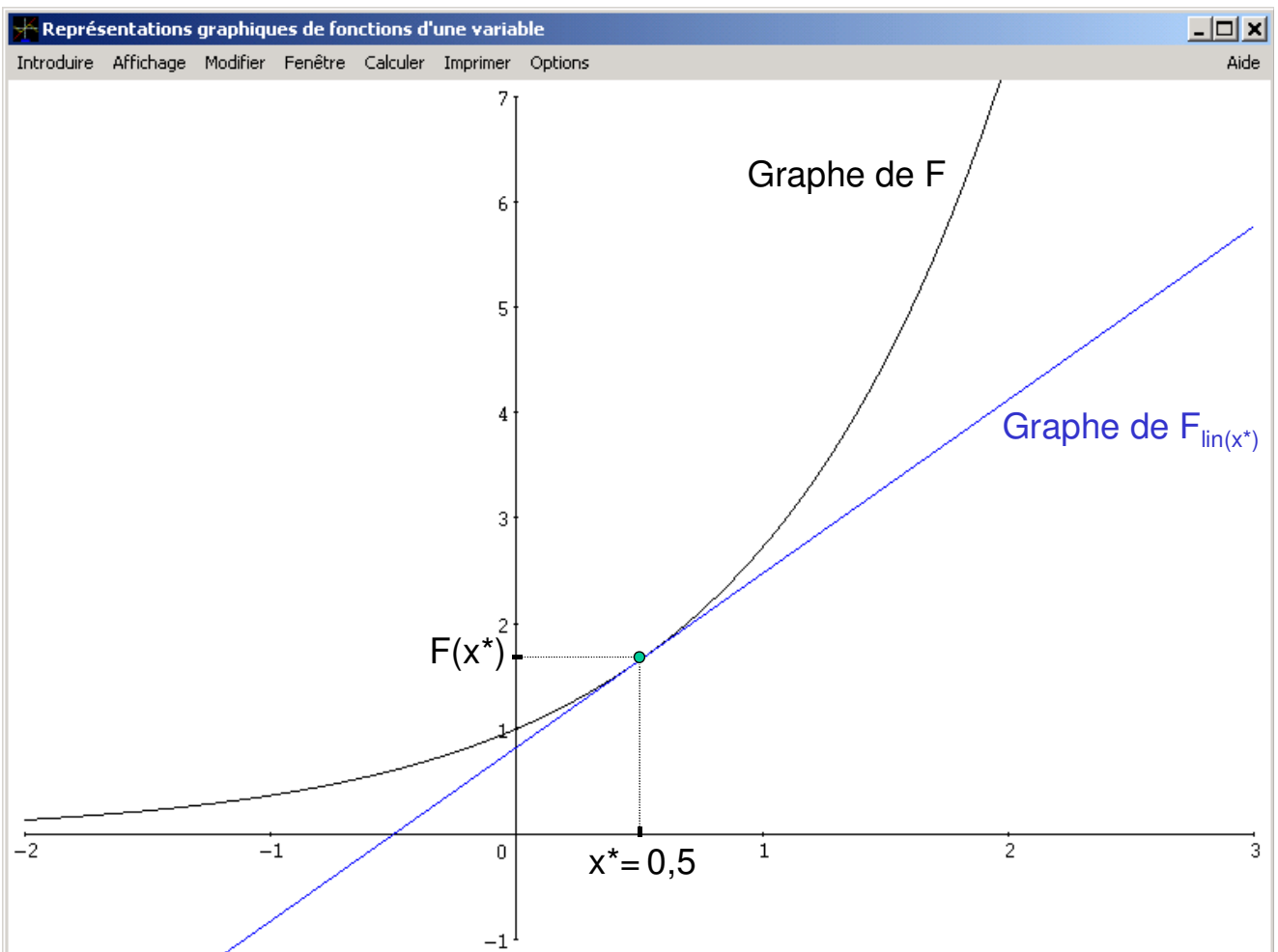
## Approximation linéaire d'une fonction de R dans R

Soit  $F$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x^* \in \text{dom } F$ .

On appelle approximation linéaire de  $F$  en  $x^*$  et on note  $F_{\text{lin}(x^*)}$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$F_{\text{lin}(x^*)}(x) = F(x^*) + F'(x^*) \cdot (x - x^*)$$

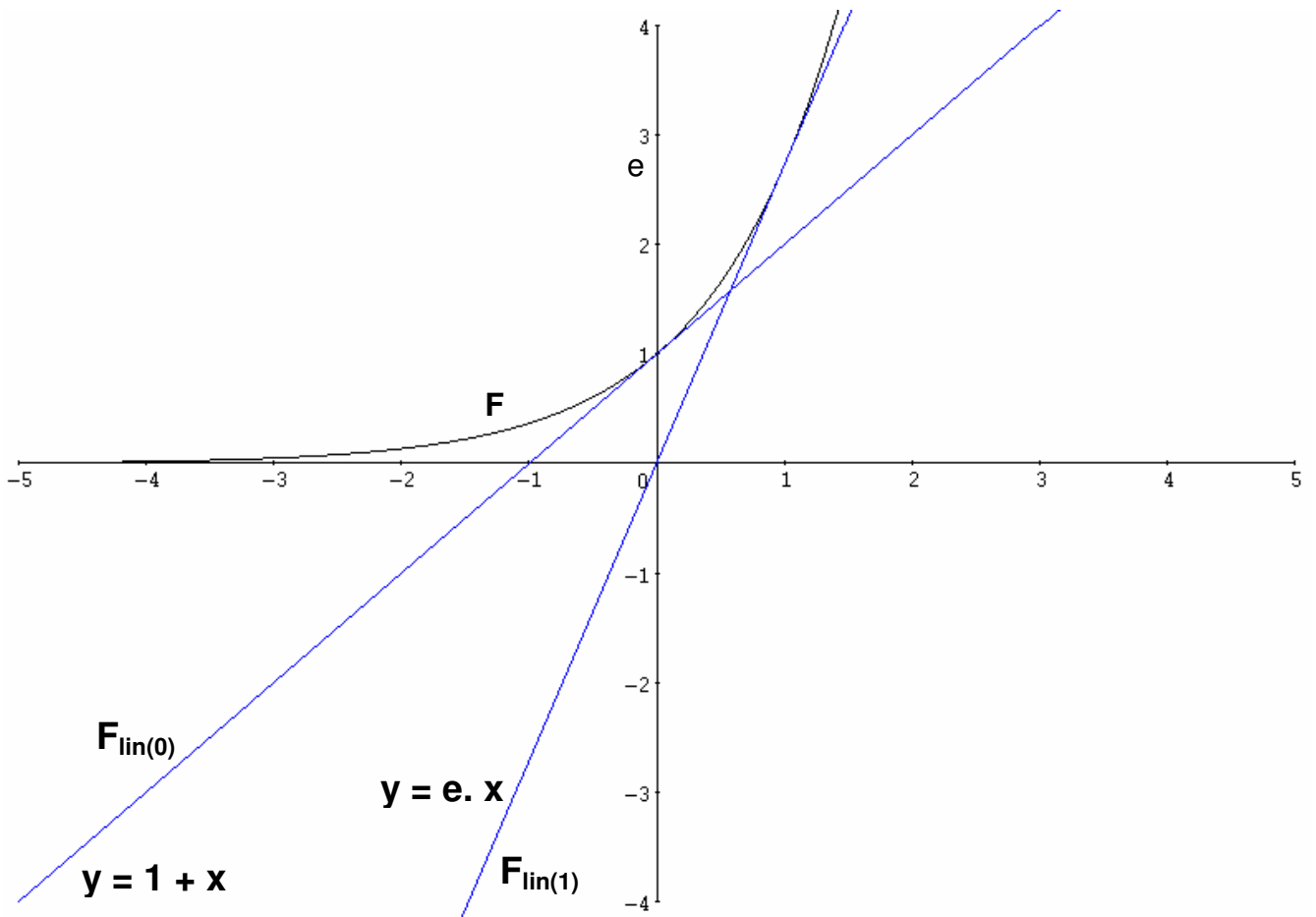
Le graphe de  $F_{\text{lin}(x^*)}$  est la droite tangente au graphe de la fonction  $F$  au point de coordonnées  $(x^*, F(x^*))$ .



**Exemple : soit  $F(x) = e^x$**

**$F_{\text{lin}(0)}(x) = F(0) + F'(0) \cdot (x-0)$     donc     $F_{\text{lin}(0)}(x) = 1 + x$**

**$F_{\text{lin}(1)}(x) = F(1) + F'(1) \cdot (x-1)$     donc     $F_{\text{lin}(1)}(x) = e \cdot x$**



**$F_{\text{lin}(0)}$  et  $F_{\text{lin}(1)}$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Ainsi :**

**$F_{\text{lin}(0)}(1) = 2$**

**$F_{\text{lin}(1)}(0.5) = \frac{e}{2}$**

### Exercice III.3 :

1) Soit une fonction coût  $C(q) = 3 (q-200)^3 + 10\,000\,000$

- Déterminer l'approximation linéaire de cette fonction  $C$  en  $q = 100$
- Comparer  $C_{\text{lin}(100)}(101)$  à  $C(101)$
- Comparer  $C_{\text{lin}(100)}(150)$  à  $C(150)$

Solution :

$$1) C'(q) = 9 (q-200)^2 \quad C''(q) = 18 (q-200)$$

$$\text{donc } C'(100) = 90000 \quad C''(100) = -1800$$

Comme  $C(100) = 7\,000\,000$

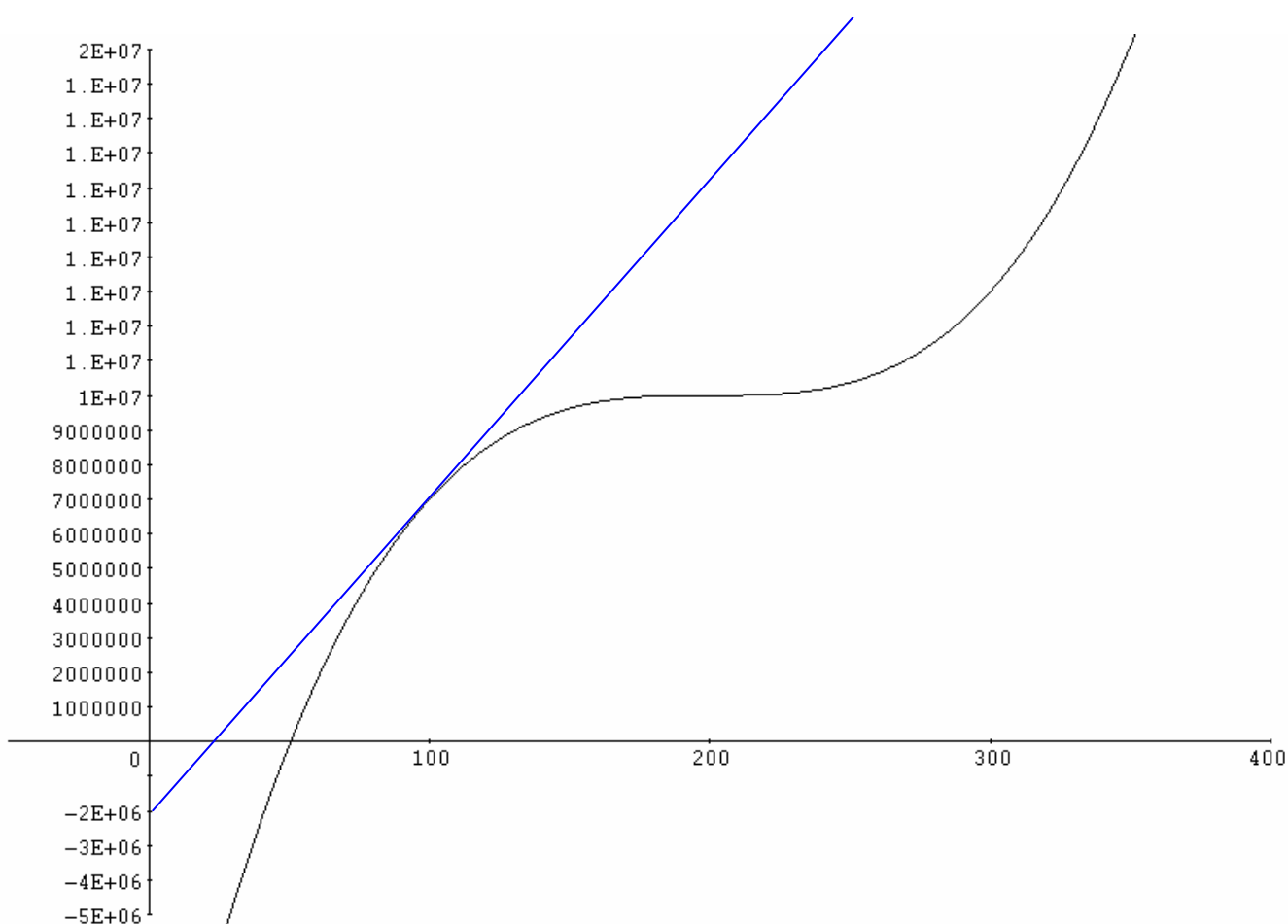
$$C_{\text{lin}(100)}(q) = 7\,000\,000 + 90\,000 (q-100)$$

$$C_{\text{lin}(100)}(101) = 7\,000\,000 + 90\,000 = 7\,090\,000$$

$$C(101) = 7\,089\,103$$

$$C_{\text{lin}(100)}(150) = 11\,500\,000$$

$$C(150) = 9\,625\,000$$



2) Soit la fonction  $f(x) = \ln(x+1)$

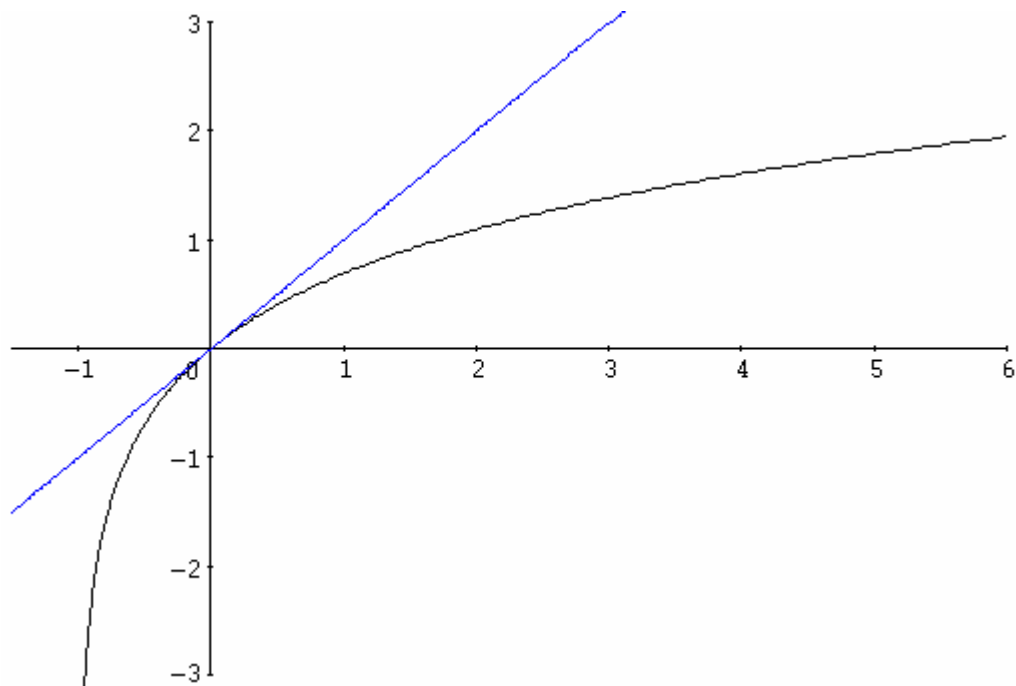
- Déterminer l'approximation linéaire de cette fonction  $f$  en 0
- Déterminer l'approximation quadratique de cette fonction  $f$  en 0

Solution :

$$f(x) = \ln(x+1) \qquad f'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\text{donc } f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = -1$$

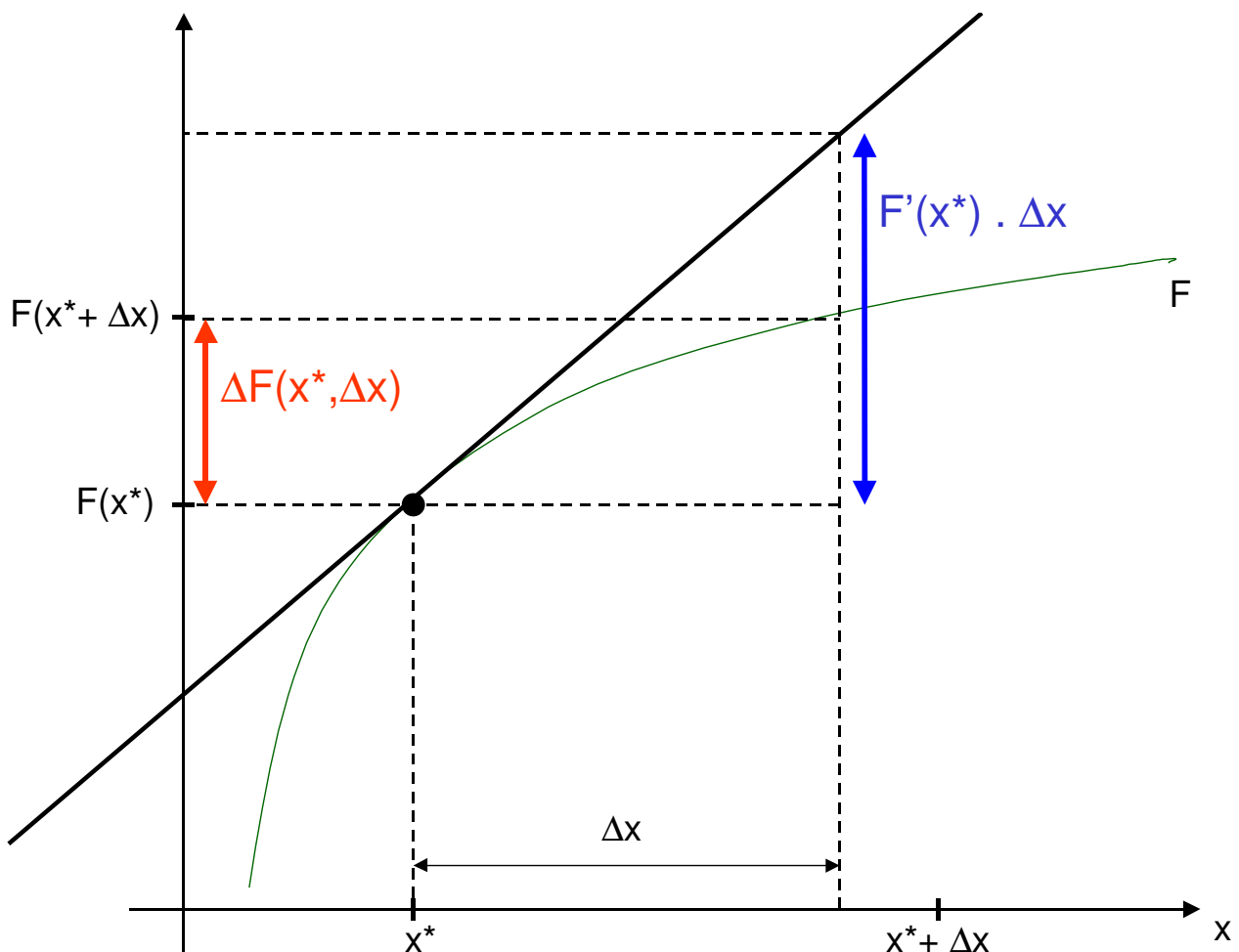
$$\text{donc } f_{\text{lin}(0)}(x) = x$$



3) Dessinez le graphe d'une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  pour laquelle la pente de la tangente est croissante entre 0 et 2 et décroissante entre 2 et 4.

## Notion de différentielle

Soit  $F$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x^* \in \text{dom } F$ .



On a vu qu'on peut utiliser l'approximation linéaire de  $F$  pour calculer une valeur approchée de  $F$  :

$$\text{si } \Delta x \ll \text{petit} \text{ , } F(x^* + \Delta x) \cong F_{\text{lin}(x^*)}(x^* + \Delta x)$$

$$\text{donc } F(x^* + \Delta x) \cong F(x^*) + F'(x^*) \cdot (x^* + \Delta x - x^*)$$

$$\text{donc } F(x^* + \Delta x) \cong F(x^*) + F'(x^*) \cdot \Delta x$$

$$\text{donc } F(x^* + \Delta x) - F(x^*) \cong F'(x^*) \cdot \Delta x$$

$$\text{donc } \Delta F(x^*, \Delta x) = F'(x^*) \cdot \Delta x$$

Donc, si  $\Delta x$  est petit,  $F'(x^*) \cdot \Delta x$  fournit une valeur approchée de  $\Delta F(x^*, \Delta x)$

Quand  $\Delta x$  est « petit », on le note souvent  $dx$ .

On appelle différentielle de  $F$  en  $x^*$  l'expression (linéaire) en  $dx$  suivante :

$$F'(x^*) \cdot dx$$

On note  $dF(x^*) = F'(x^*) \cdot dx$

**Exemple** : soit une fonction coût donnée par  $C(q) = q^2 - 30q + 3600$

$q$  est fixé à 100. Quelle serait l'influence sur  $C$  d'une augmentation de la production de 2 unités ?

On pourrait bien entendu calculer  $C(102) - C(100) = 10944 - 10600 = 344$

L'utilisation de la différentielle fournirait :  $\Delta C \cong C'(100) \cdot 2 = 340$

## Application : taux de croissance, élasticité, coût marginal

Envisageons la situation où une variable  $y$  dépend d'une variable  $x$  :  $y = f(x)$   
Nous allons définir des notions liées à la dérivée, fréquemment utilisées en sciences économiques et/ou de gestion.

### 1. Taux de croissance

Si  $y = f(x)$ , le *taux de croissance de  $y$  en fonction de  $x$*  est défini par le rapport  $\frac{f'(x)}{f(x)}$ , que l'on peut aussi noter  $\frac{y'}{y}$  ou  $\frac{dy/dx}{y}$ .

Exemple : soit  $y = A e^{bx}$ .

On a  $\frac{dy/dx}{y} = \frac{A e^{bx} b}{A e^{bx}} = b$  : le taux de croissance est constant pour un modèle exponentiel.

### 2. Elasticité

Si  $y = f(x)$ , l'*élasticité de  $y$  par rapport à  $x$*  est définie par le rapport  $x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$ , que l'on peut aussi noter  $\frac{dy/y}{dx/x}$  ou  $E(x)$ .

Exemple : soit  $y = A x^b$ .

On a  $E(x) = \frac{dy/y}{dx/x} = x \frac{A b x^{b-1}}{A x^b} = b$  : l'élasticité est constante pour un modèle « puissance ».

Exercice : la demande  $q$  d'un bien est liée au prix  $p$  par la fonction

$$q(p) = \frac{10}{2p+1}$$

Déterminez l'élasticité de la demande par rapport au prix en  $p = 2$ .

### Coût (ou revenu) marginal.

Considérons un bien dont on produit  $x$  unités et  $y = C(x)$  le coût total de cette production de  $x$  unités.

Le *coût marginal* pour  $x = x^*$  est la variation du coût (ou revenu) total entraînée par la production d'une unité supplémentaire (à partir de cette production de  $x^*$  unités),

autrement dit le coût issu de la production de la  $(x^*+1)^{\text{ème}}$  unité

autrement dit  $C(x^*+1) - c(x^*)$ .

Une bonne approximation (toujours utilisée en pratique) du *coût marginal* pour  $x = x^*$  est  $C'(x^*)$ .

$$\text{En effet, } C'(x^*) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C(x^* + \Delta x) - C(x^*)}{\Delta x} \cong \frac{C(x^* + 1) - C(x^*)}{1}$$

**Exercice** : supposons que le coût total de la production de  $x$  unités d'un bien est donné (en Euros) par  $C(x) = 1000 \ln \sqrt{x+1}$ .  
Calculer le coût marginal pour  $x = 40$ .

**Exercice** : Supposons que le coût total de production de  $x$  unités d'un bien est donné par la fonction  $C(x) = x^3 - 27x^2 + 243x$ . Déterminez :

- la fonction  $C'(x)$  qui permet d'approcher le coût marginal ;
- la valeur de  $x$  pour laquelle ce coût marginal est nul.

### Exercice

La demande d'un bien est liée au prix par la fonction  $q(p) = \frac{5}{p^2 - 3p + 5}$   
où  $q$  représente la quantité demandée et  $p$  le prix unitaire.

- Déterminez l'élasticité de la demande par rapport au prix en  $p = 2$ .
- Pour quelle valeur du prix  $p$  la demande  $q$  est-elle maximale ?

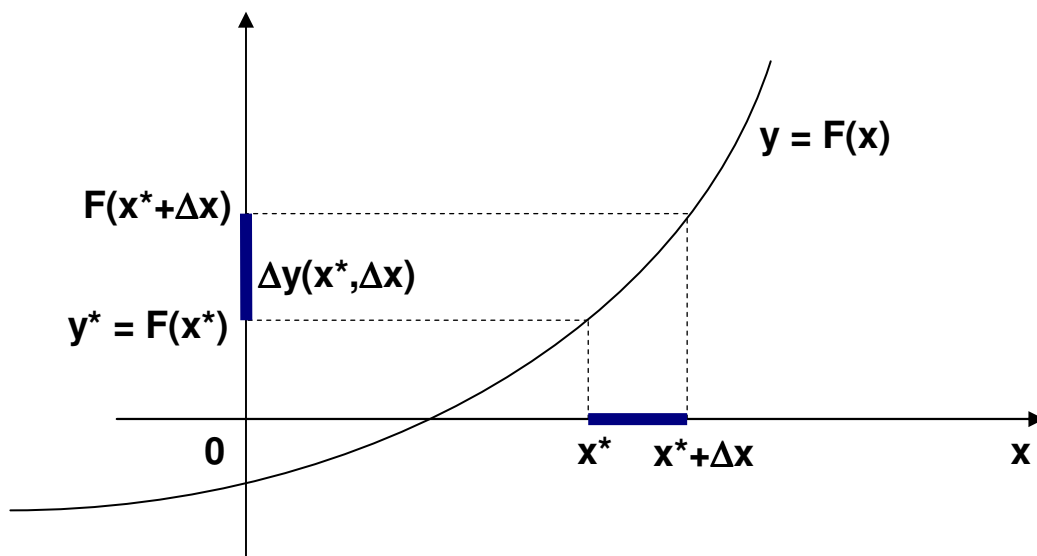
## Chapitre IV : Quelques modèles mathématiques courants

Soit  $y$  une variable (*endogène*) qui dépend d'une variable  $x$  (*exogène*).

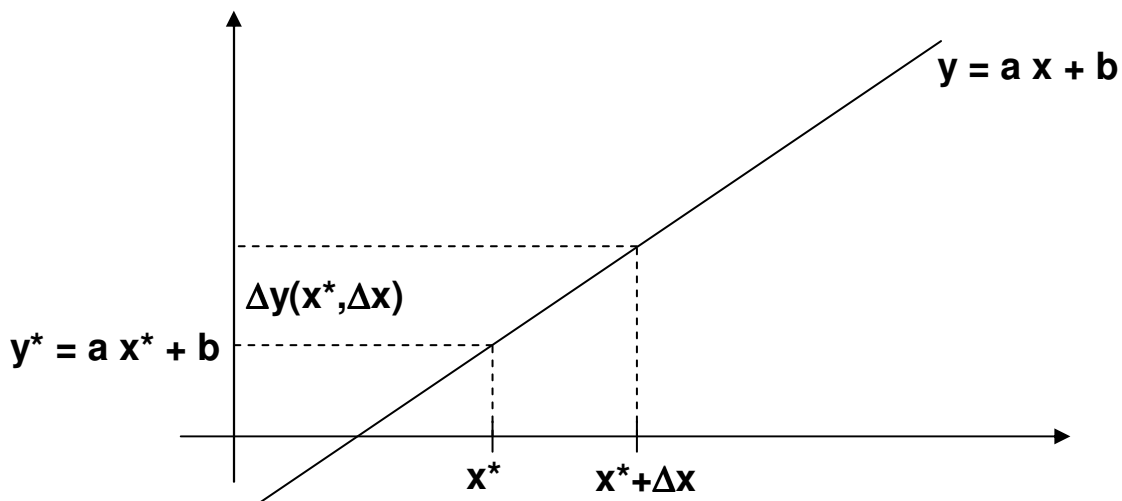
Dans une telle situation, on tente souvent de décrire mathématiquement la liaison qui existe entre  $y$  et  $x$ . Nous allons décrire ci-après quatre *modèles mathématiques*, de la forme  $y = F(x)$ , auxquels il est régulièrement fait appel lors de telles tentatives.

Nous verrons que chacun de ces modèles est caractérisé par un lien entre la variation (en valeur ou relative) de  $y$  induite par la variation (en valeur ou relative) de  $x$ .

Nous noterons  $y^* = F(x^*)$  et  $\Delta y(x^*, \Delta x)$  au lieu de  $\Delta F(x^*, \Delta x)$ .



1) Modèle linéaire :  $y = a x + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )



$\Delta y(x^*, \Delta x) = F(x^* + \Delta x) - y^* = a \cdot (x^* + \Delta x) + b - a x^* - b = a \Delta x$   
qu'on note plus simplement

$$\Delta y = a \Delta x$$

Donc ,  $\Delta y$  est proportionnel à  $\Delta x$  , quel que soit  $x^*$

Donc ,  $\Delta y$  ne dépend que de  $\Delta x$  (pas de  $x^*$ ) : la variation en valeur de  $y$  ne dépend que de la variation en valeur de  $x$ .

On peut aussi écrire :  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$  (pente de la droite).

**Exercice IV.1** : la liaison entre  $x$  et  $y$  est de la forme  $y = a x + b$

Déterminer  $a$  et  $b$  sachant que

1°) quand  $x$  augmente de 2 ,  $y$  diminue de 4

2°) si  $x$  vaut 5 , alors  $y$  vaut 30

Tracez le graphe de cette fonction.

2) **Modèle logarithmique** :  $y = \log_a(x) + b$  (  $a, b \in \mathbb{R}$  ,  $a > 1$  )

$$\begin{aligned}\Delta y(x^*, \Delta x) &= F(x^* + \Delta x) - y^* = \log_a(x^* + \Delta x) + b - \log_a(x^*) - b \\ &= \log_a(x^* + \Delta x) + b - \log_a(x^*) \\ &= \log_a\left(\frac{x^* + \Delta x}{x^*}\right)\end{aligned}$$

$$\Delta y(x^*, \Delta x) = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x^*}\right)$$

Donc ,  $\Delta y$  ne dépend que de  $\frac{\Delta x}{x^*}$  : la variation en valeur de  $y$  ne dépend que de la variation relative de  $x$ .

Ainsi, si  $x$  varie de 10%,  $y$  variera toujours de  $\log_a(1+0.1)=\log_a(1.1)$ , et ce quelle que soit la valeur  $x^*$  de départ.

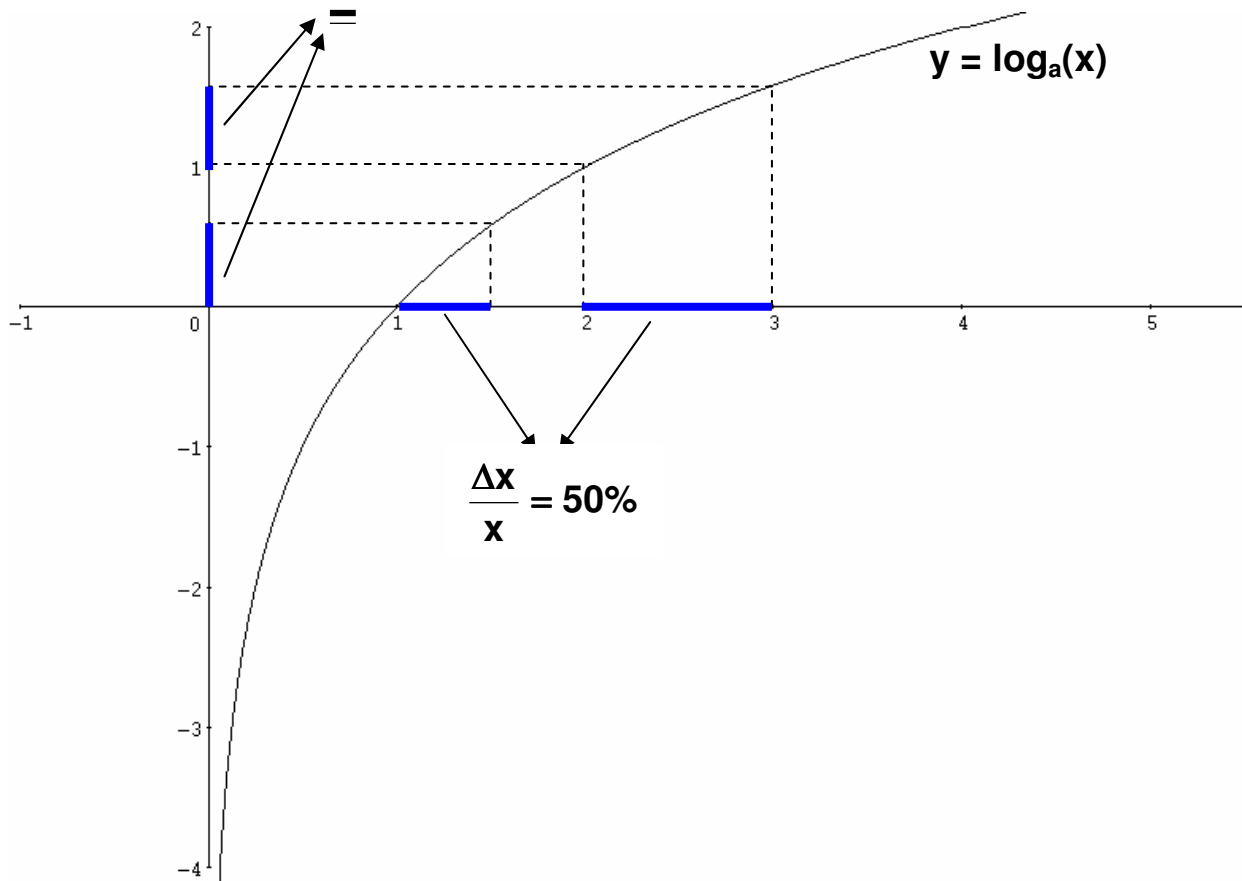
Donc,

si  $x$  passe de 10 à 11 (variation relative = 10%),  $y$  varie de  $\log_a(1.1)$

si  $x$  passe de 1000 à 1100 (variation relative = 10%),  $y$  varie de  $\log_a(1.1)$

si  $x$  passe de 100000 à 110000 (variation relative = 10%),  $y$  varie de  $\log_a(1.1)$

Le dessin suivant illustre bien ce qui précède :



**Exercice IV.2 : calculer**

- $\ln(11) - \ln(10)$
- $\ln(1100) - \ln(1000)$
- $\ln(1100000) - \ln(1000000)$

**Solution :**

a) si on n'a rien retenu de ce qui précède :

$$\ln(11) - \ln(10) = 2.39789527 - 2.30258509 = 0.09531$$

$$\ln(1100) - \ln(1000) = 7.00306546 - 6.90765527 = 0.09531$$

$$\ln(1100000) - \ln(1000000) = 13.91082074 - 13.81551056 = 0.09531$$

b) si on tient compte de ce qui précède :

$$\ln(11) - \ln(10) = \ln(1.1) = 0.09531$$

$$\ln(1100) - \ln(1000) = \ln(1.1) = 0.09531$$

$$\ln(1100000) - \ln(1000000) = \ln(1.1) = 0.09531$$

(remarquons que ceci revient à tenir compte la formule

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad )$$

3) Modèle puissance :  $y = a x^p$  ( $a, p \in \mathbb{R}$ )

$$\Delta y(x^*, \Delta x) = F(x^* + \Delta x) - y^* = a (x^* + \Delta x)^p - a (x^*)^p$$

$$\text{donc, } \frac{\Delta y(x^*, \Delta x)}{y^*} = \frac{a (x^* + \Delta x)^p - a (x^*)^p}{a (x^*)^p} = \frac{(x^* + \Delta x)^p - (x^*)^p}{(x^*)^p}$$

$$\text{donc, } \frac{\Delta y(x^*, \Delta x)}{y^*} = \left(1 + \frac{\Delta x}{x^*}\right)^p - 1$$

Donc,  $\frac{\Delta y}{y^*}$  ne dépend que de  $\frac{\Delta x}{x^*}$  : la variation relative de  $y$  ne dépend que de la variation relative de  $x$ .

Remarquons que le coefficient  $a$  n'intervient pas dans cette formule.

Autrement dit, si  $x$  varie de 10%, la variation relative de  $y$  sera de  $[(1.1)^p - 1] \times 100\%$ , et ce quelle que soit la valeur  $x^*$  de départ.

Prenons l'exemple  $y = x^2$  :

- si  $x$  passe de 10 à 11 (variation de 1, variation relative = 10%),  
y subit une variation relative de  $(1.1)^2 - 1 = 0.21 = 21\%$   
donc y passe de 100 à 121
- si  $x$  passe de 1000 à 1100 (variation de 100, variation relative = 10%),  
y subit une variation relative de  $(1.1)^2 - 1 = 0.21 = 21\%$   
donc y passe de 1000000 à 1210000

4) Modèle exponentiel :  $y = k a^x$  ( $a, p \in \mathbb{R}, a > 0$ )

$$\Delta y(x^*, \Delta x) = F(x^* + \Delta x) - y^* = k a^{x^* + \Delta x} - k a^{x^*} = k a^{x^*} (a^{\Delta x} - 1)$$

$$\text{donc, } \frac{\Delta y(x^*, \Delta x)}{y^*} = \frac{k a^{x^*} (a^{\Delta x} - 1)}{k a^{x^*}} = a^{\Delta x} - 1$$

Donc,  $\frac{\Delta y}{y^*}$  ne dépend que de  $\Delta x$  : la variation relative de  $y$  ne dépend que de la variation en valeur de  $x$ .

Remarquons que le coefficient  $k$  n'intervient pas dans cette formule.

Autrement dit, si  $x$  varie de 2, la variation relative de  $y$  sera de  $(a^2-1) \times 100\%$ , et ce quelle que soit la valeur  $x^*$  de départ.

Prenons l'exemple  $y = 3^x$  :

- si  $x$  passe de 1 à 3 (variation de 2),
  - y subit une variation relative de  $3^2 - 1 = 8 = 800\%$
  - donc y varie de  $8 \times 3 = 24$
  - donc y passe de 3 à 27
- si  $x$  passe de 3 à 5 (variation de 2),
  - y subit une variation relative de  $3^2 - 1 = 8 = 800\%$
  - donc y varie de  $8 \times 27 = 216$
  - donc y passe de 27 à 243

**SYNTHESE** (avec abus de notations !) :

si  $y = a x + b$                       alors  $\Delta y = a \Delta x$

si  $y = \log_a(x) + b$                 alors  $\Delta y = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x^*}\right)$

si  $y = a x^p$                             alors  $\frac{\Delta y}{y^*} = \left(1 + \frac{\Delta x}{x^*}\right)^p - 1$

si  $y = k a^x$                             alors  $\frac{\Delta y}{y^*} = a^{\Delta x} - 1$

**Exercice IV.3** : Modéliser la liaison existant entre les variables  $x(>0)$  et  $y$  dans les 3 cas suivants :

- 1) - à toute variation de valeur relative de 5% de  $x$ , correspond une variation de 0.030 unité de la variable  $y$  ;
  - lorsque  $x$  prend la valeur 100,  $y$  prend la valeur 22.86.
- 2) - à toute variation de valeur relative de 25% de  $x$  correspond une variation de valeur relative de 95.31 % de la variable  $y$  ;
  - lorsque  $x$  prend la valeur 10,  $y$  prend la valeur  $10^4$ .
- 3) - à toute variation de valeur de 1 unité de la variable  $x$ , correspond une variation de valeur relative de 4% de la variable  $y$ 
  - lorsque  $x$  prend la valeur 3,  $y$  prend la valeur 1250.



# Chapitre V : primitives - intégrales

## V.1. Notion de primitive

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Toute fonction  $F$  (définie et dérivable sur  $I$ ) telle que  $F' = f$  est dite primitive de  $f$  (sur  $I$ ).

Exemple : les fonctions  $F(x) = x^2$  et  $G(x) = x^2 + 6$  sont toutes deux des primitives de la fonction  $f(x) = 2x$  car  $F'(x) = G'(x) = 2x$

Remarque : si  $F$  est une primitive de  $f$ ,

alors, quelle que soit la constante  $c$ ,  $F + c$  est une primitive de  $f$  (voir exemple ci-dessus).

Notation : on note  $\int f(x) dx$  l'ensemble des primitives de  $f$ .

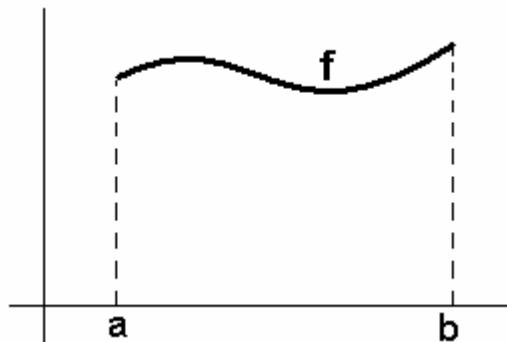
$\int f(x) dx$  est appelée *intégrale indéfinie* de  $f$ .

## V.2. Notion d'intégrale définie

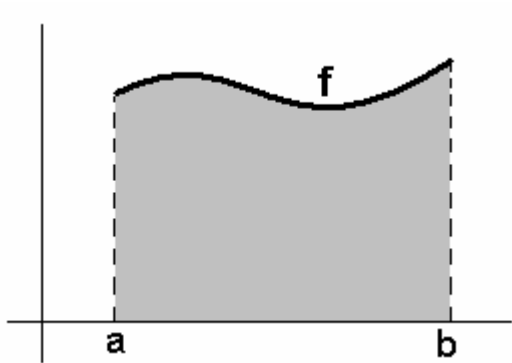
Soit  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$  continue sur  $[a,b]$ .

L'*intégrale définie de  $f$  sur  $[a,b]$*  est un nombre réel, noté  $\int_a^b f(x) dx$ , que nous pouvons (intuitivement) interpréter comme suit :

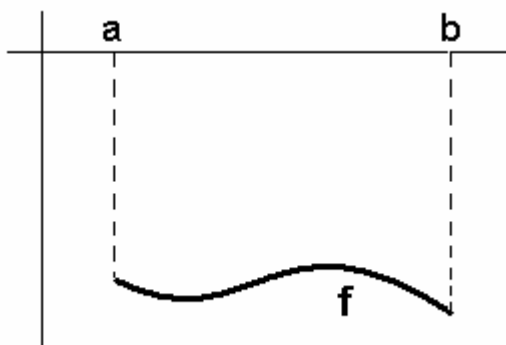
1<sup>er</sup> cas : si  $\forall x \in [a,b], f(x) \geq 0$  :



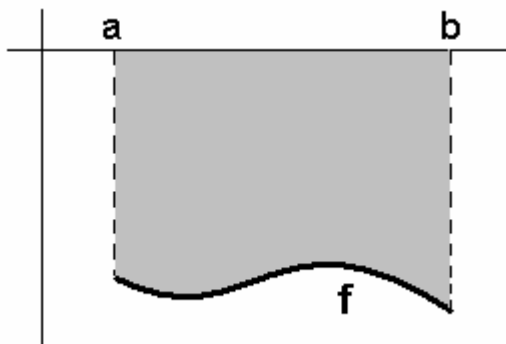
Dans ce cas,  $\int_a^b f(x) dx =$  (aire de la surface grisée ci-dessous) :



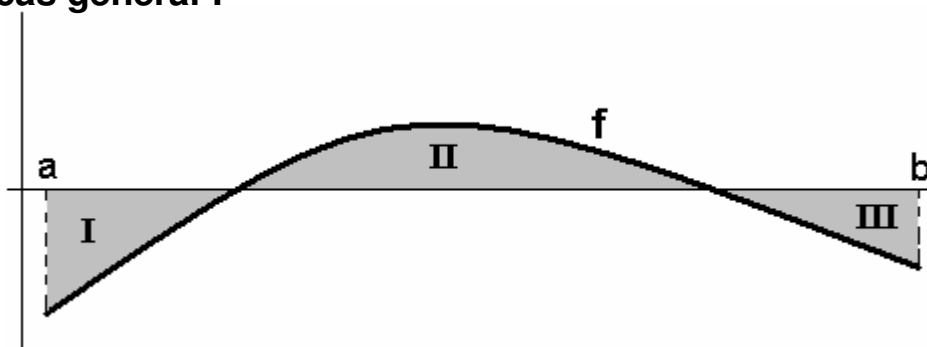
**2<sup>ème</sup> cas : si  $\forall x \in [a,b], f(x) \leq 0$  :**



**Dans ce cas,  $\int_a^b f(x) dx =$  moins ( aire de la surface grisée ci-dessous ) :**



**3<sup>ème</sup> cas : cas général :**



**Dans ce cas,  $\int_a^b f(x) dx = -$  ( aire I ) + aire ( II ) - ( aire III )**

### V.3. Lien entre primitive et intégrale définie

Soit  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$  continue sur  $[a,b]$ .

Si  $F$  est une primitive de  $f$ ,

alors  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Exemple :  $\int_1^3 x^2 dx = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$

### V.4. Propriétés

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Exercice : calculer

$$\int_1^2 \left( \frac{1}{x} + x \right) dx$$

$$\int_0^2 e^{2x} dx$$

# Chapitre VI : Notion de dérivation

## d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Soit  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \rightarrow F(x_1, x_2)$

### VI.1. Définitions

1)

$F$  est *dérivable par rapport à  $x_1$*  en  $(x_1^*, x_2^*)$  si

$$\frac{F(x_1^* + \Delta x, x_2^*) - F(x_1^*, x_2^*)}{\Delta x} \text{ tend vers un nombre réel fini quand } \Delta x \rightarrow 0$$

$F$  est *dérivable par rapport à  $x_2$*  en  $(x_1^*, x_2^*)$  si

$$\frac{F(x_1^*, x_2^* + \Delta x) - F(x_1^*, x_2^*)}{\Delta x} \text{ tend vers un nombre réel fini quand } \Delta x \rightarrow 0$$

2) Quand  $F$  est dérivable par rapport à  $x_1$  en  $(x_1^*, x_2^*)$ , on note

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_1^* + \Delta x, x_2^*) - F(x_1^*, x_2^*)}{\Delta x}$$

Quand  $F$  est dérivable par rapport à  $x_2$  en  $(x_1^*, x_2^*)$ , on note

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_1^*, x_2^* + \Delta x) - F(x_1^*, x_2^*)}{\Delta x}$$

$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*)$  est le *nombre dérivée de  $F$  par rapport à  $x_i$*  en  $(x_1^*, x_2^*)$

(ces définitions peuvent évidemment être généralisées aux fonctions de  $n$  variables)

Remarque : calculer  $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)$  revient à calculer  $G'(x_1^*)$

où  $G$  est la fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $G(x) = F(x, x_2^*)$

(pour calculer une dérivée partielle par rapport à une variable  $x_i$ , il suffit de considérer la fonction comme fonction d'une variable  $x_i$ , « les autres variables étant considérées comme constantes »).

**EXERCICE VI.1** : calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes par rapport à  $x_1$  et par rapport à  $x_2$  :

1)  $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

2)  $F(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2^2 + x_1^3$

1)  $F(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + 2x_2^2}$

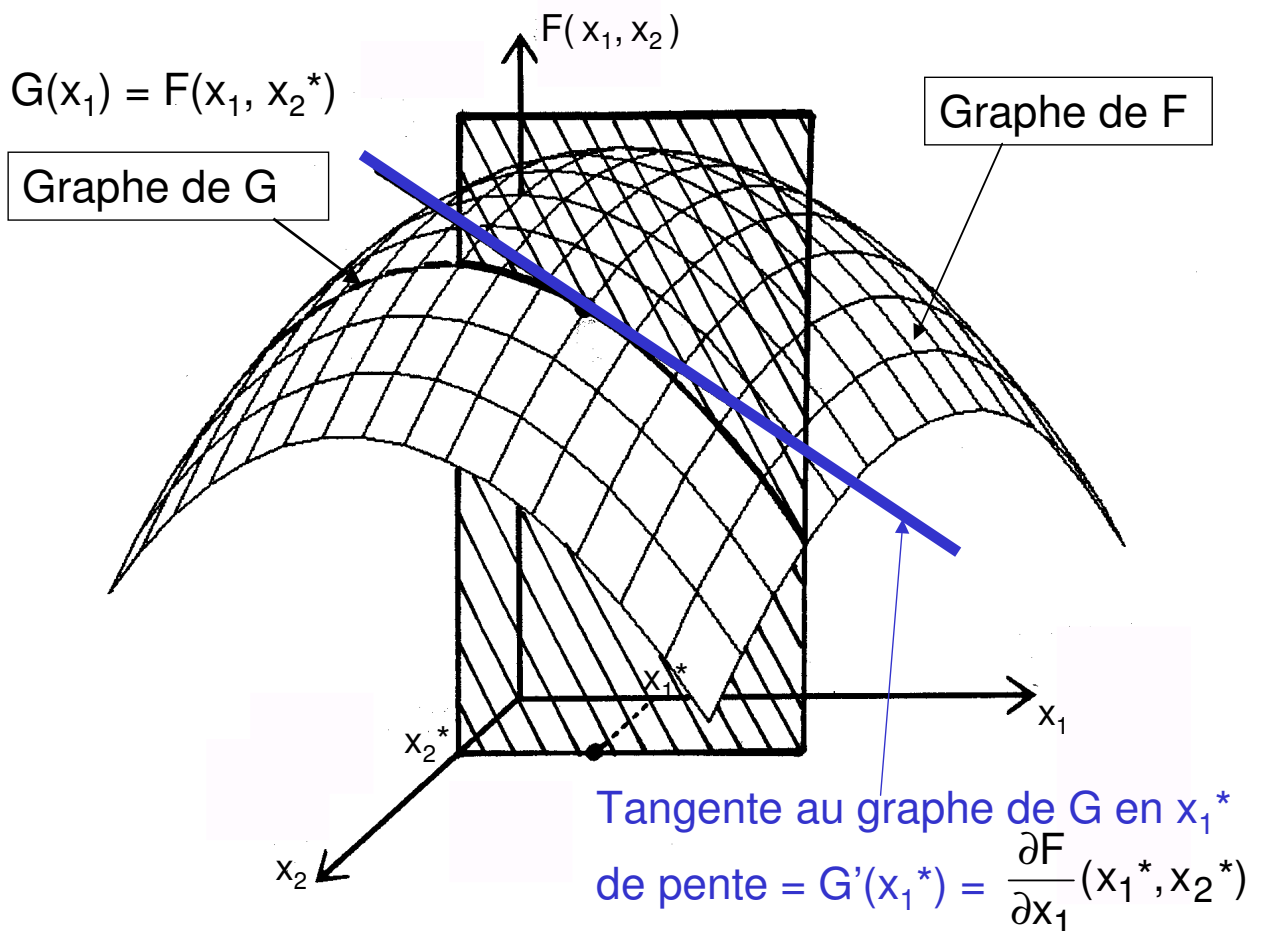
2)  $F(x_1, x_2) = x_1^3 \cdot \ln(x_1 \cdot x_2)$

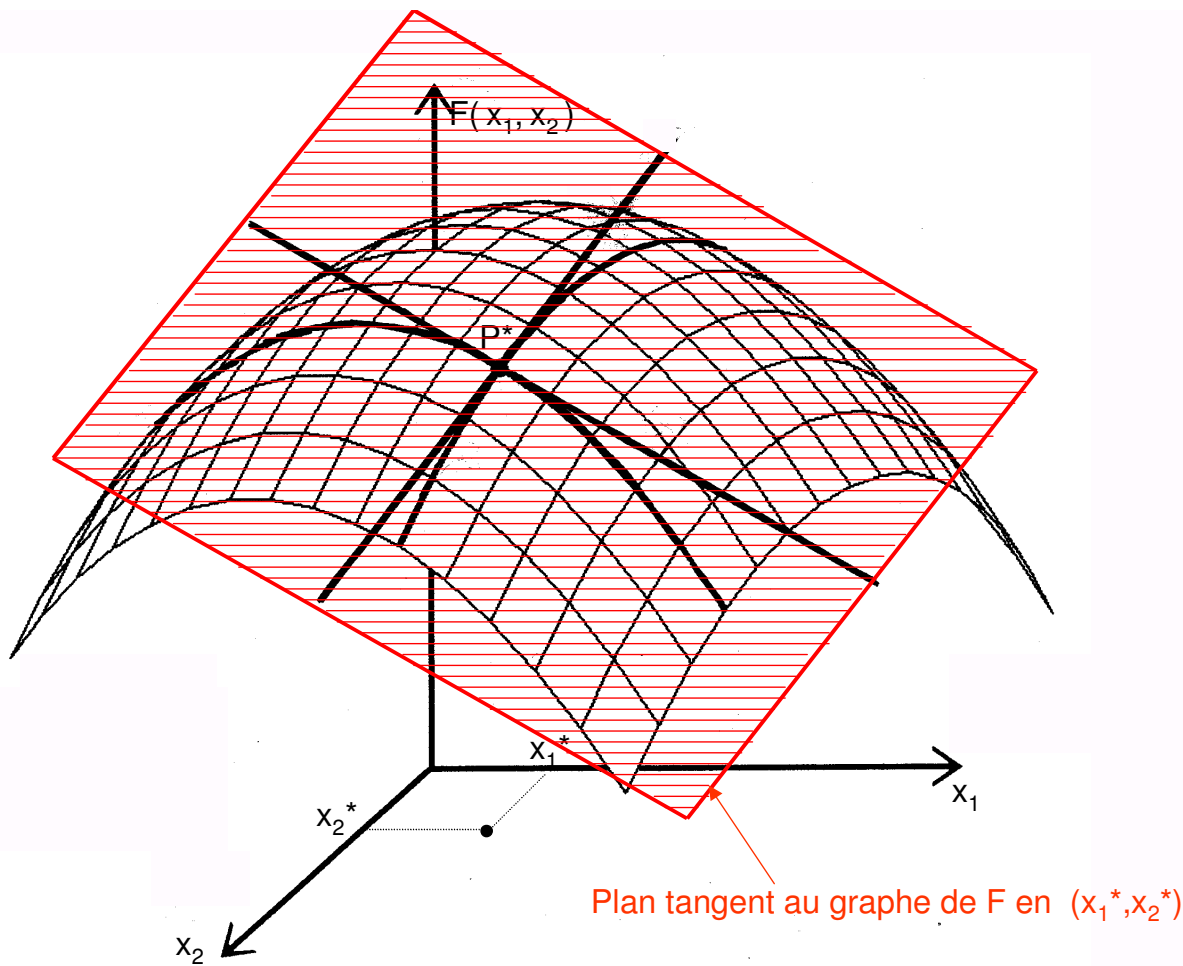
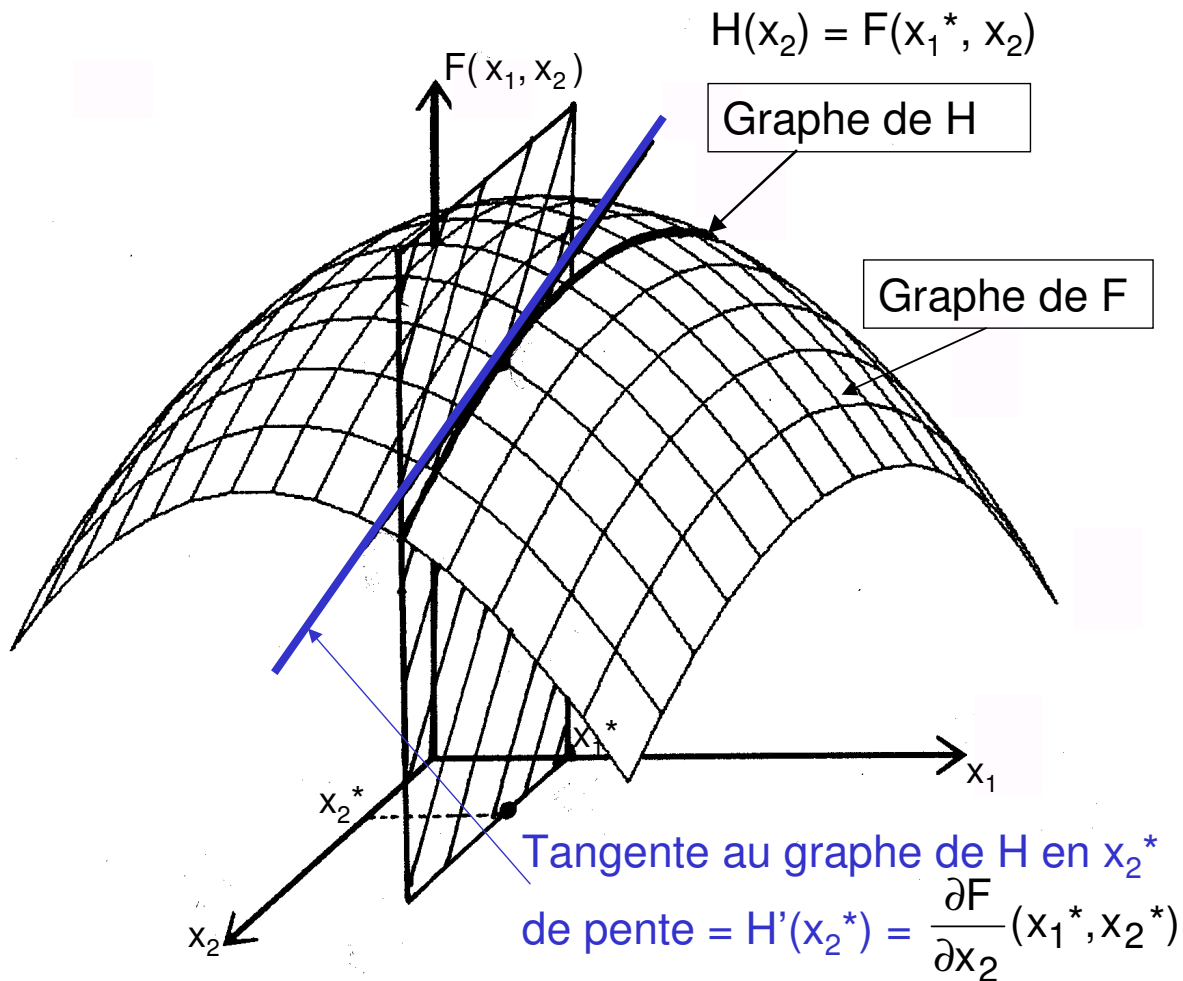
3)  $F(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} - x_2 \cdot \ln(x_1)$

4)  $F(x_1, x_2) = e^{x_1^2 x_2} + \ln(x_1 \cdot x_2^2)$

5)  $F(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2}$

**VI.2. Interprétation géométrique**





L'équation du *plan tangent à la surface*  $y = F(x_1, x_2)$ ,

au point  $P^*(x_1^*, x_2^*, F(x_1^*, x_2^*))$ , est :

$$y = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) \cdot (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \cdot (x_2 - x_2^*) + F(x_1^*, x_2^*)$$

Ce plan est le graphe de l'*approximation linéaire* de  $F$  en  $(x_1^*, x_2^*)$ , qu'on note  $F_{\text{lin}(x_1^*, x_2^*)}$  :

$$F_{\text{lin}(x_1^*, x_2^*)}(x_1, x_2) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) \cdot (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \cdot (x_2 - x_2^*) + F(x_1^*, x_2^*)$$

### VI.3. Dérivées partielles d'ordre > 1

Pour une fonction de plusieurs variables, on peut aussi envisager des dérivées partielles secondes, troisièmes, etc... :

par exemple, si  $F(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2$ ,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)(x_1, x_2) = 2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)(x_1, x_2) = 6$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)(x_1, x_2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)(x_1, x_2) = 0$$

**Remarque** : le plus souvent,  $F$  remplit les conditions (liées à la dérivabilité et la continuité) pour que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2)$$

# Chapitre VII : Matrices et déterminants

## 1) Définitions :

- une matrice est un tableau de nombres à  $n$  lignes et  $p$  colonnes.

Exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 & 7 & 8 \\ -4 & 2 & -1 & 0 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \text{ est une matrice à 3 lignes et 5 colonnes}$$

Elle est caractérisée par ses éléments :  $M_{12} = 9$  ,  $M_{34} = 7$  , ...

- une matrice carrée d'ordre  $n$  est une matrice à  $n$  lignes et  $n$  colonnes.

## 2) Déterminant d'une matrice carrée.

Le déterminant d'une matrice carrée  $M$  est un nombre associé à cette matrice, noté  $\det M$  :

si  $M$  d'ordre 1 :  $\det(a) = a$

si  $M$  d'ordre 2 :  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a d - b c$

si  $M$  d'ordre 3 :  $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a e i + b f g + c d h - g e c - h f a - i d b$

si  $M$  d'ordre  $> 3$  : voir plus loin !

Le cofacteur de l'élément  $M_{ij}$  d'une matrice carrée d'ordre  $n$  est le nombre  $\text{cof } M_{ij} = (-1)^{i+j} \times \det(\text{matrice obtenue en supprimant ligne } i \text{ et colonne } j \text{ de } M)$

Exemple : soit  $M = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ . On a  $\text{cof } M_{12} = (-1)^{1+2} \times \det \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = -15$

**Calcul de det M si M d'ordre n (quelconque) :**

**det M = somme des produits des éléments d'une rangée (ligne ou colonne) par leurs cofacteurs.**

**Exemple : soit  $M = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}$  : 6 façons différentes de calculer det M.**

**Si on « développe » suivant la première ligne :**

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 9 \end{pmatrix} \\ = 5 \times (-1)^{1+1} \times \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} + 4 \times (-1)^{1+2} \times \det \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 3 \times (-1)^{1+3} \times \det \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \\ = -60 - 60 + 57 = -63 \end{aligned}$$

**Si on « développe » suivant la deuxième colonne :**

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 9 \end{pmatrix} \\ = 4 \times (-1)^{1+2} \times \det \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 2 \times (-1)^{2+2} \times \det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 5 \times (-1)^{3+2} \times \det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \\ = -60 + 42 - 45 = -63 \end{aligned}$$

### **3) Définitions.**

**La diagonale principale d'une matrice carrée M d'ordre n est la diagonale comprenant les éléments  $M_{11}, M_{22}, \dots, M_{nn}$ .**

**Une matrice carrée M d'ordre n est dite symétrique  $\Leftrightarrow$  les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont égaux.**

**Exemple : soit  $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$  est symétrique.**

#### 4) Sous-matrices diagonales

Soit  $M$  une matrice carrée symétrique d'ordre  $n$ .

Les sous-matrices diagonales de  $M$  sont les matrices obtenues en ne conservant que les éléments des  $k$  premières lignes et  $k$  premières colonnes de  $M$  ; elles sont notées  $M^{(k)}$ .

Une matrice carrée symétrique  $M$  d'ordre  $n$  a donc  $n$  sous-matrices diagonales.

Exemple : les sous-matrices diagonales de  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  sont :

$$M^{(1)} = (1)$$

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^{(4)} = M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

#### 5) Matrice symétrique définie positive ou définie négative.

Soit  $M$  une matrice carrée symétrique d'ordre  $n$ .

$M$  est définie positive  $\Leftrightarrow \forall k, \det M^{(k)} > 0$

(les  $n$  déterminants des sous-matrices diagonales sont strictement positifs)

$M$  est définie négative  $\Leftrightarrow \forall k, (-1)^k \det M^{(k)} > 0$

( $\det M^{(1)} < 0$ ,  $\det M^{(2)} > 0$ ,  $\det M^{(3)} < 0$ ,  $\det M^{(4)} > 0$ , ... )

**Exemples :**

$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  est définie positive

car  $\det(9) = 9 > 0$  ,  $\det\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 27 > 0$  ,  $\det\begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 60 > 0$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -10 \end{pmatrix}$  est définie négative

car  $\det(-1) = -1 < 0$  ,  $\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 > 0$  ,  $\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -10 \end{pmatrix} = -3 < 0$

$\begin{pmatrix} -10 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  n'est ni définie positive , ni définie négative

car  $\det(-10) = -10 < 0$  mais  $\det\begin{pmatrix} -10 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -49 < 0$

# Chapitre VIII : Extremums

## d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Tout au long de ce chapitre, nous envisagerons une fonction  $F$  de 2 variables :  $y = F(x_1, x_2)$ . Mais la procédure de recherche des extremums de  $F$  pourra sans peine être généralisée aux fonctions de  $n$  variables ( $n > 2$ ).

### 1) Points stationnaires.

Un point stationnaire de  $F$  est un point où les dérivées partielles de  $F$  s'annulent. Autrement dit,

$$(x_1, x_2) \text{ est un } \underline{\text{point stationnaire}} \text{ de } F \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Exemple :

$$\text{soit } F(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 - 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 6$$

Les points stationnaires de  $F$  sont les solutions du système

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases} x_2 - 3 = 0 \\ x_1 - 2 = 0 \end{cases}$$

Le seul point stationnaire de  $F$  est donc  $(2, 3)$ .

### 2) Matrice hessienne.

La matrice hessienne de  $F$  en  $(x_1, x_2)$  est la matrice

$$HF(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

**Exemple :**

soit  $F(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 - 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 6$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = 1$$

$$\rightarrow H_F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

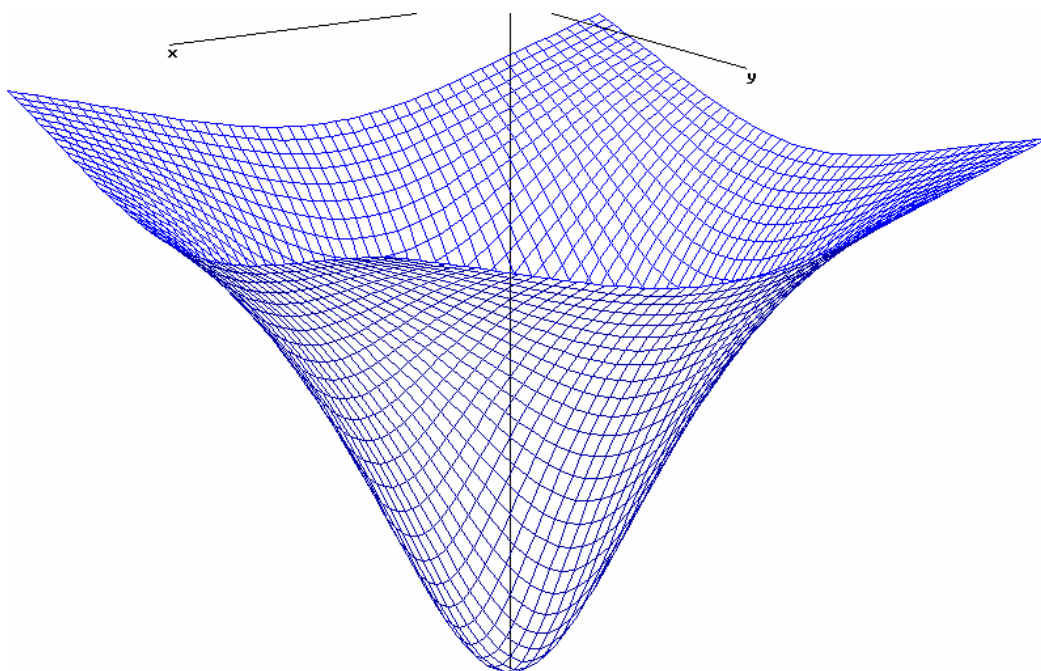
**3) Théorèmes utiles.**

- Si  $(a, b)$  est un extremum (local) de  $F$ , alors  $(a, b)$  est un point stationnaire de  $F$

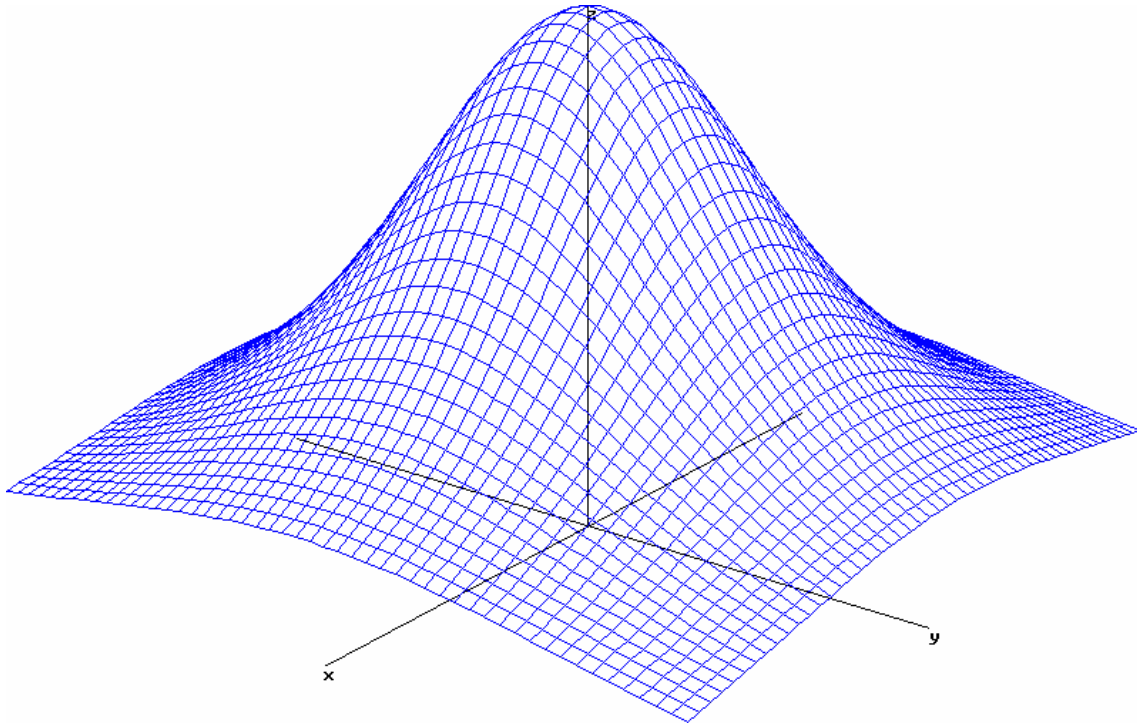
**Conséquence :** pour rechercher les extremums de  $F$ , d'abord rechercher les points stationnaires !

- Si  $\begin{cases} (a, b) \text{ est un point stationnaire de } F \\ H_F(a, b) \text{ est définie positive} \end{cases}$

alors  $(a, b)$  est un minimum (local) de  $F$ .

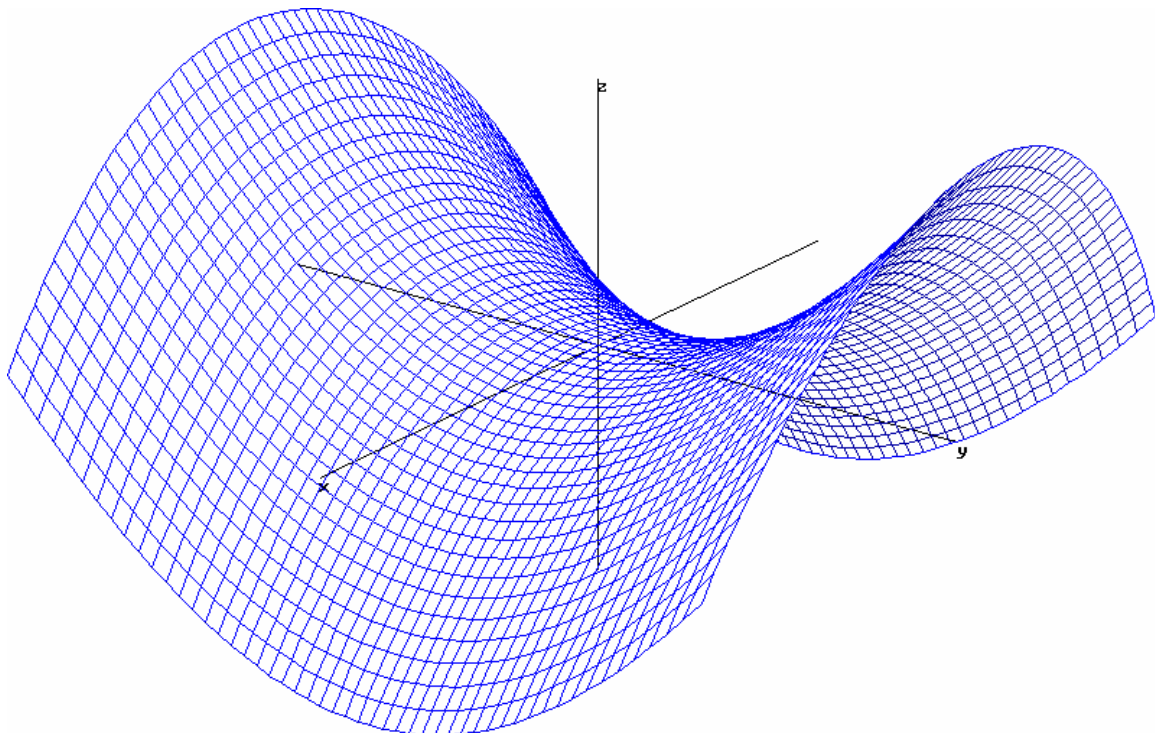


- Si  $\begin{cases} (a,b) \text{ est un point stationnaire de } F \\ H_F(a,b) \text{ est définie négative} \end{cases}$   
alors  $(a,b)$  est un maximum (local) de  $F$ .



- Si  $\begin{cases} (a,b) \text{ est un point stationnaire de } F \\ H_F(a,b) \text{ n'est ni définie positive, ni définie négative} \\ \det H_F(a,b) \neq 0 \end{cases}$

alors  $(a,b)$  est un point de selle de  $F$ .



#### 4) Marche à suivre pour recherche d'extremums.

- étape 1 : rechercher les points stationnaires de F
- étape 2 : en chaque point stationnaire (a,b), calculer  $H_F(a,b)$ 
  - si  $H_F(a,b)$  définie positive, alors (a,b) est un minimum local de F
  - si  $H_F(a,b)$  définie négative, alors (a,b) est un maximum local de F
  - si  $H_F(a,b)$  ni définie positive, ni définie négative,  
et si  $\det H_F(a,b) \neq 0$ , alors (a,b) est un point de selle de F

**EXERCICE VIII.1 : rechercher les extremums (locaux) éventuels des fonctions suivantes :**

1)  $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

2)  $F(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$

3)  $F(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^3 + 3 x_1^2 + 3 x_2^2 - 9 x_1$

4)  $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 - 4 x_2 + 4$

5)  $F(x_1, x_2) = 12 x_1^2 + x_2^3 - 24 x_1 x_2 + 15 x_2^2 - 24 x_2$

6)  $F(x_1, x_2) = 3 x_1^2 + 21 x_2^2 + 2 x_2^3 - 12 x_1 x_2 - 24 x_2$

**EXERCICE VIII.2 : une entreprise fabrique 2 produits A et B dans les quantités  $q_A$  et  $q_B$ . Elle vend ces produits respectivement 12 et 18 Euros l'unité.**

**Le coût de fabrication est  $2 q_A^2 + q_A q_B + 2 q_B^2$ .**

**Trouvez les niveaux de production qui maximisent le profit de cette entreprise.**

# Chapitre IX : Extremums sous contrainte(s)

## d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Tout au long de ce chapitre, nous envisagerons une fonction  $F$  de 2 variables :  $y = F(x_1, x_2)$ . Mais la procédure de recherche des extremums de  $F$  pourra sans peine être généralisée aux fonctions de  $n$  variables ( $n > 2$ ).

Dans ce chapitre, on s'intéressera au problème qui consiste à trouver les couples  $(x_1, x_2)$  qui maximisent ou minimisent  $F(x_1, x_2)$  (localement), sachant qu'il faut que  $g(x_1, x_2) = 0$ .

### Marche à suivre pour recherche d'extremums sous contrainte.

Soit à rechercher les extremums de  $F(x_1, x_2)$  sous la contrainte  $g(x_1, x_2) = 0$ .

A partir des fonctions  $F$  et  $g$ , on construit une fonction  $L$  de 3 variables, appelée Lagrangien, comme suit :

$$L(x_1, x_2, \lambda) = F(x_1, x_2) - \lambda \cdot g(x_1, x_2)$$

- étape 1 : rechercher les points stationnaires de  $L$
- étape 2 : en chaque point stationnaire  $(x_1, x_2, \lambda)$ , calculer  $H_L(x_1, x_2, \lambda)$ 
  - si  $\det H_L(x_1, x_2, \lambda) > 0$ , alors  $(x_1, x_2)$  est un maximum (local) de  $F$  sous la contrainte  $g(x_1, x_2) = 0$ .
  - si  $\det H_L(x_1, x_2, \lambda) < 0$ , alors  $(x_1, x_2)$  est un minimum (local) de  $F$  sous la contrainte  $g(x_1, x_2) = 0$ .

Exercice : maximiser  $F(x_1, x_2) = 25 - x_1^2 - x_2^2$  sous la contrainte  $2x_1 + x_2 = 4$

Solution :

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 25 - x_1^2 - x_2^2 - \lambda (2x_1 + x_2 - 4)$$

Points stationnaires de  $L$  : solutions du système

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 2\lambda = 0 \\ -2x_2 - \lambda = 0 \\ -(2x_1 + x_2 - 4) = 0 \end{cases} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases} x_1 = -\lambda \\ x_2 = \frac{-\lambda}{2} \\ -2\lambda + \frac{-\lambda}{2} - 4 = 0 \end{cases}$$

D'où  $\begin{cases} x_1 = 1.6 \\ x_2 = 0.8 \\ \lambda = -1.6 \end{cases}$  : le seul point stationnaire de L est donc (1.6, 0.8, -1.6).

Matrice hessienne de L :

$$H_L(x_1, x_2, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x_1, x_2, \lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminant de matrice hessienne de L en (1.6, 0.8, -1.6) :

$$\det H_L(x_1, x_2, \lambda) = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 10 > 0$$

F admet un maximum (local) en (1.6, 0.8) sous la contrainte  $2x_1 + x_2 = 4$

**EXERCICE** : rechercher les extremums (locaux) éventuels de :

1)  $F(x_1, x_2) = x_1 x_2$  sous la contrainte  $x_1 + x_2 = 6$

2)  $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  sous la contrainte  $x_1 + 4x_2 = 2$

3)  $F(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_2^2 - x_1 x_2$  sous la contrainte  $x_1 + 2x_2 = 24$

4)  $F(x_1, x_2) = -x_1^2 - 3x_2^2 + 12x_1 x_2$  sous la contrainte  $x_1 + x_2 = 16$

# Chapitre X : programmation linéaire

## X.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous verrons comment

- maximiser (ou minimiser) une fonction  $F$  de plusieurs variables,
- sous certaines contraintes (équations ou inéquations)

La fonction à optimiser, appelée *fonction objectif*, et toutes les expressions apparaissant dans les contraintes seront des expressions linéaires.

Rappelons qu'une expression linéaire en  $x, y, z$  est une expression de la forme  $a x + b y + c z$  où  $a, b, c$  sont des nombres réels.

Marche à suivre pour résoudre un problème de programmation linéaire :

- Définir clairement les variables de décision
- Ecrire, au moyen des variables, la fonction objectif
- Ecrire les contraintes

A ce stade, le problème est dit modélisé.

Il reste alors à le résoudre, souvent par logiciel.

Mais, lorsque le nombre de variables est 2, une résolution graphique est possible.

## X.2. Modélisation

### Exercice X.1 :

Une fabrique de meubles métalliques produit 2 types de bureaux, luxe et standard, qui ne diffèrent que par le nombre de tiroirs et la finition. On désire établir un plan de fabrication de ces bureaux pour une période déterminée afin de maximiser le profit réalisé.

Les marges bénéficiaires unitaires doivent être respectivement de 1.000 fr et 800fr. L'usine dispose de 250 structures qui peuvent servir indifféremment pour les versions luxe et standard. Le stock de glissières, pour les tiroirs, est de 800 paires.

Le bureau luxe compte 4 tiroirs, la version standard n'en compte que 2.

Pour la période considérée, 840 heures de main d'oeuvre sont disponibles pour ce travail.

Le montage et la finition d'un bureau luxe nécessitent 4 heures, alors qu'il n'en faut que 3 pour l'autre version.

Pour des raisons de prestige, le service commercial désire que le nombre de bureaux de luxe mis sur le marché ne soit pas strictement inférieur au tiers du nombre de bureaux ordinaires proposés à la clientèle durant cette période.

### Modélisation :

Variables de décision:                     $x_1$ : nombre de bureaux de luxe  
     $x_2$ : nombre de bureaux standard

Fonction à maximiser:     $1000 x_1 + 800 x_2$

Contraintes:     $\left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 \leq 250 & \text{(structures disponibles)} \\ 4 x_1 + 2 x_2 \leq 800 & \text{(paires de glissières disponibles)} \\ 4 x_1 + 3 x_2 \leq 840 & \text{(heures disponibles)} \\ x_1 \geq \frac{x_2}{3} & \text{(prestige)} \\ x_1, x_2 \text{ entiers positifs} \end{array} \right.$

Le problème sera résolu au paragraphe 3.

**Exercice X.2 :** L'entreprise Mâcher occupe trois ouvriers à raison de 40 heures semaine chacun. Elle fabrique trois types de papier A,B,C. Pour des raisons d'approvisionnement en matières premières, la production totale hebdomadaire de cette entreprise est limitée à 500 tonnes.

Les rendements horaires pour la fabrication des papiers A,B,C sont respectivement de 5 tonnes, 2.5 tonnes et 3 tonnes. Les bénéfices sont respectivement de 200,500 et 400 francs par tonne.

L'expérience a montré que, si la production était limitée respectivement à 300 tonnes, 100 tonnes et 150 tonnes par semaine, elle était entièrement absorbée par le marché.

On veut déterminer les quantités hebdomadaires à produire pour que le bénéfice soit maximum et toute la production vendue.

**Modélisation :**

**Variables de décision:**

$x_1$  : quantité (en tonnes) de papier A à produire par semaine

$x_2$  : quantité (en tonnes) de papier B à produire par semaine

$x_3$  : quantité (en tonnes) de papier C à produire par semaine

**Fonction à maximiser**     $200 x_1 + 500 x_2 + 400 x_3$

**Contraintes:** 
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{2.5} + \frac{x_3}{3} \leq 120 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ x_1 \leq 300 \\ x_2 \leq 100 \\ x_3 \leq 150 \\ \forall i, x_i \geq 0 \end{array} \right.$$

**Remarques:**

- il est utile de vérifier que les quantités reprises dans les deux membres d'une inéquation s'expriment dans les mêmes unités.
- rappelons le raisonnement dit « règle de trois » :

on produit 5 tonnes de papier A en ne heure

donc on produit une tonne en  $\frac{1}{5}$  heure

donc on produit  $x_1$  tonnes en  $\frac{x_1}{5}$  heure(s)

**Exercice X.3 :** Un éditeur dispose de 2 dépôts  $D_1$  et  $D_2$ , possédant en stock respectivement 5 et 4 exemplaires d'un même ouvrage. Trois libraires  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  lui demandent respectivement 2, 3, 4 exemplaires de ce livre.

Il a un contrat avec une firme de transport : quel que soit le nombre d'ouvrages livrés, les coûts unitaires, exprimés en francs, de transports des dépôts vers les librairies sont repris dans le tableau suivant:

| de ↓      vers → | $L_1$ | $L_2$ | $L_3$ |
|------------------|-------|-------|-------|
| $D_1$            | 2     | 5     | 2     |
| $D_2$            | 7     | 3     | 6     |

Déterminer le plan de transport de coût minimum qui satisfait les trois libraires.

**Modélisation :**

6 variables de décision :

$x_{ij}$  : nombre de livres du dépôt  $i$  livrés au libraire  $j$ .

Fonction à minimiser:  $2 x_{11} + 5 x_{12} + 2 x_{13} + 7 x_{21} + 3 x_{22} + 6 x_{23}$

$$\text{Contraintes : } \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 5 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 4 \\ x_{11} + x_{21} \geq 2 \\ x_{12} + x_{22} \geq 3 \\ x_{13} + x_{23} \geq 4 \\ \forall i, j, x_{ij} \text{ entiers positifs} \end{array} \right.$$

### X.3. Résolution graphique d'un problème de programmation linéaire à deux variables.

#### a) Polygone des contraintes

Supposons un problème dont la modélisation est la suivante :

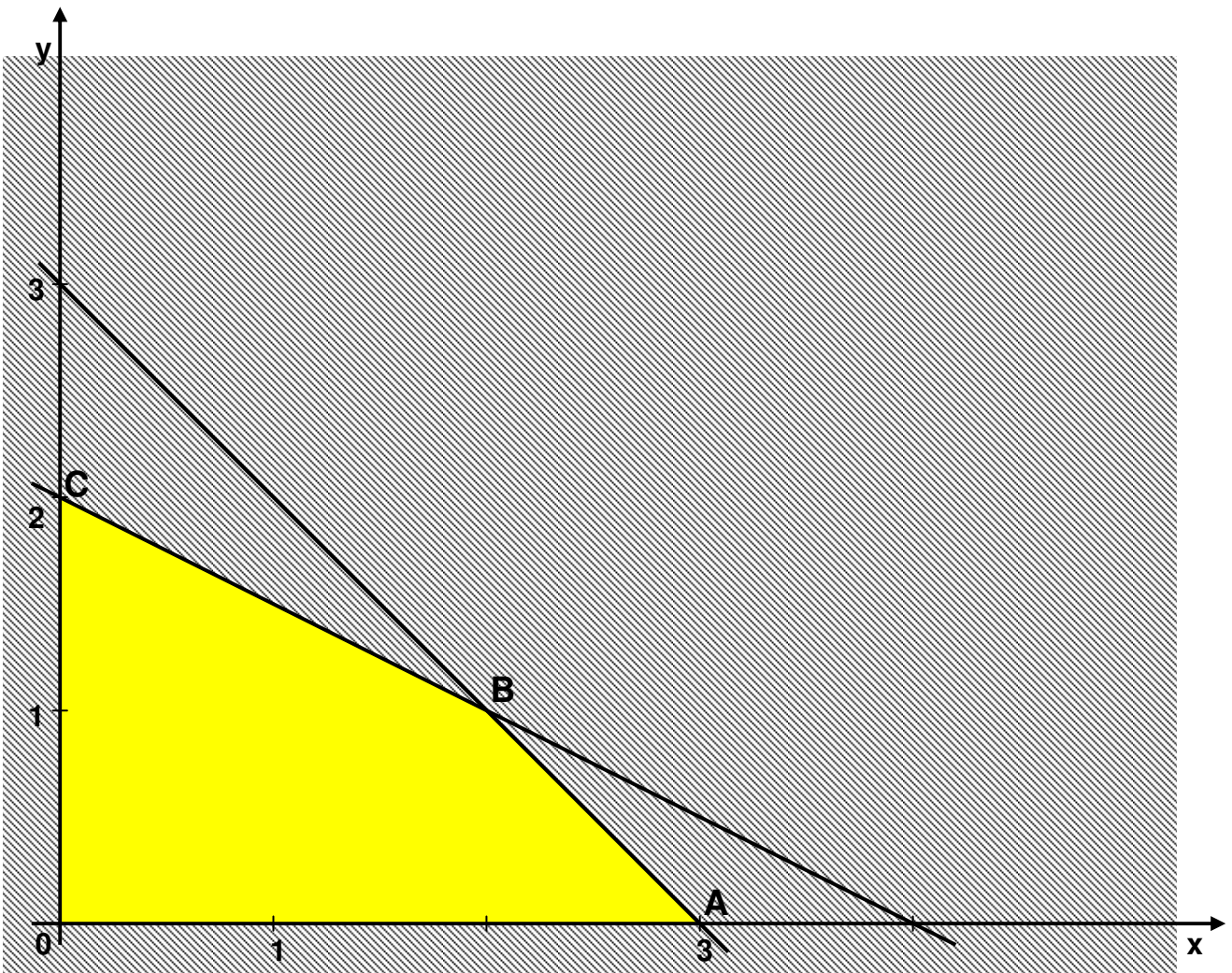
maximiser  $5x + 7y$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x + y \leq 3 & (1) \\ x + 2y \leq 4 & (2) \\ x \geq 0 & (3) \\ y \geq 0 & (4) \end{cases}$$

Déterminons les points  $(x,y)$  tels que (1), (2), (3), (4) sont vérifiées.

Commençons par représenter les droites d'équations :

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \\ x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$


Les points situés dans le quadrilatère non-hachuré ont des coordonnées  $(x,y)$  qui vérifient les contraintes du problème.

Ce quadrilatère est appelé *polygone des contraintes* pour le problème considéré.

Lorsque l'on envisagera les valeurs de la fonction à maximiser, les seules valeurs  $x$  et  $y$  à prendre en considération seront donc les abscisses et ordonnées des points de ce polygone OABC.

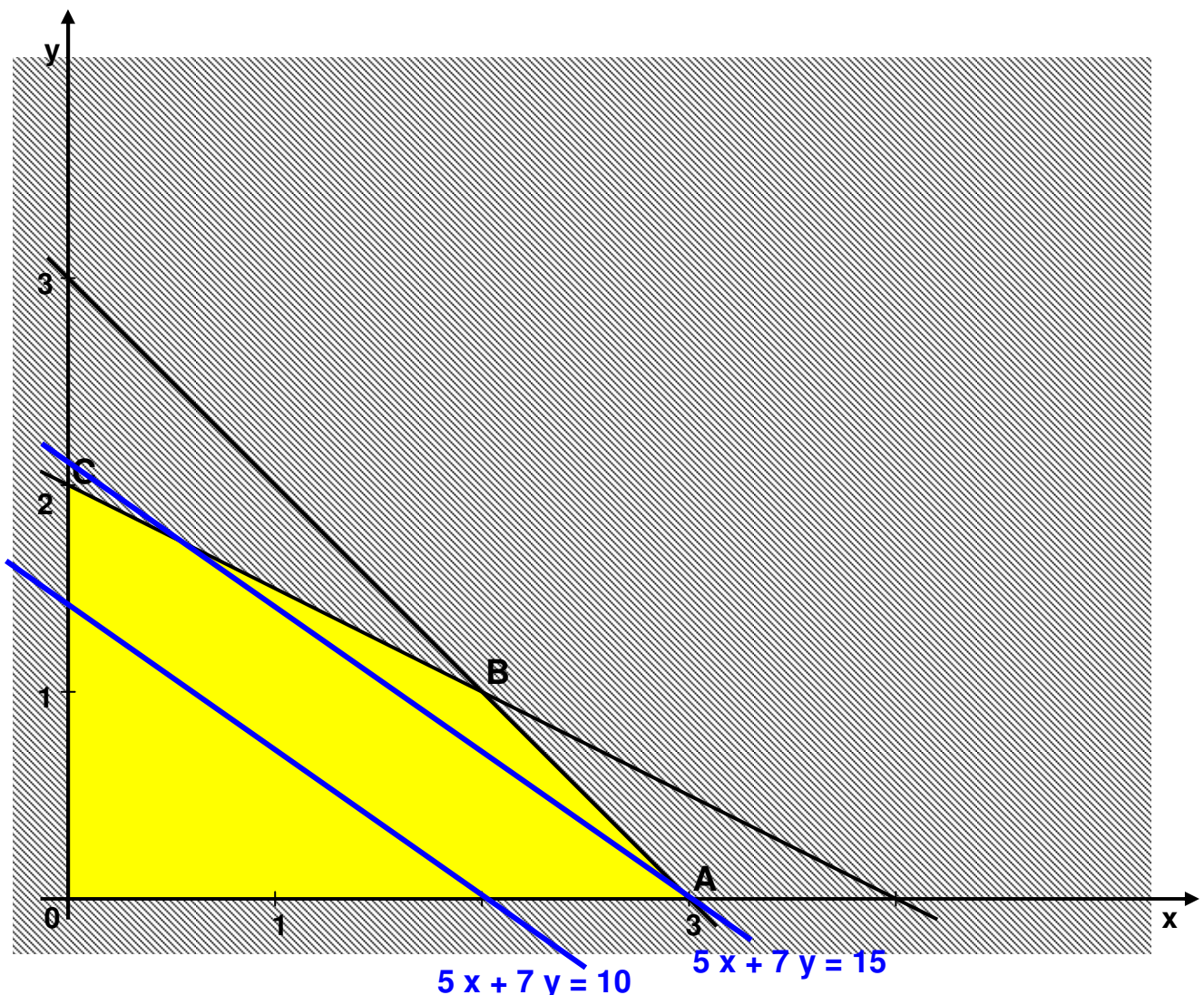
Ensuite, optimisons la fonction objectif.

Supposons que la fonction objectif prenne la valeur 10 :  $5x + 7y = 10$

Les points du plan Oxy dont les coordonnées vérifient cette égalité sont ceux de la droite d'équation  $5x + 7y = 10$  , de pente  $-\frac{5}{7}$

Supposons que la fonction objectif prenne la valeur 15 :  $5x + 7y = 15$

Les points du plan Oxy dont les coordonnées vérifient cette égalité sont ceux de la droite d'équation  $5x + 7y = 15$  , de pente  $-\frac{5}{7}$



Si nous changeons la valeur envisagée pour la fonction objectif, nous obtenons donc des droites parallèles. Seules les droites ayant une intersection non vide avec le polygone des contraintes seront concernées. Parmi toutes ces droites, celle correspondant à la plus grande valeur du « second membre » (terme constant) une solution au problème.

Il suffit donc de translater une droite de la famille « $5x + 7y = k$  » jusqu'à ce qu'elle atteigne la position souhaitée.

On se rend vite compte que cette droite passera toujours par un des sommets du polygone. En l'occurrence, il s'agit du sommet B(2,1).

La fonction sera donc maximisée pour  $x = 2$  et  $y = 1$ .

Sa plus grande valeur est donc 17.

Exercice X.4 : Résoudre le problème dont la modélisation a été faite en exercice X.1

Exercice X.5 : Une PME fabrique 2 produits  $P_A$  et  $P_B$  au moyen de 2 matières premières L et M.

La production d'une unité de  $P_A$  nécessite 1 unité de L et 2 unités de M.

La production d'une unité de  $P_B$  nécessite 3 unités de L et 2 unités de M.

La PME ne dispose que de 12 unités de chaque matière première.

Le bénéfice de la PME est de 10 € par unité de A et 15 € par unité de B.

Aider la PME à organiser sa production pour que son bénéfice soit maximum.

Exercice X.5 : Monsieur M. ne mange que du pain et du fromage.

Une livre de pain contient 1000 calories et 25 grammes de protéines.

Une livre de fromage contient 2000 calories et 100 grammes de protéines.

Le corps humain a besoin quotidiennement d'au moins 3000 calories et 100 grammes de protéines par jour.

Une livre de pain coûte 1 € et une livre de fromage 3.5 € .

Déterminer les quantités de pain et de fromage qui donneront à Mr M une nutrition convenable pour un prix minimum.

## Exercice

a) Représentez graphiquement l'ensemble D des points dont les

$$\text{coordonnées } (x,y) \text{ vérifient } \begin{cases} 3x + 7y \leq 21 \\ x \geq y \\ 2x + 3y \leq 12 \\ x + y \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Trouvez le point de D qui maximise  $x + 2y$

c) Trouvez le point de D qui minimise  $2x + y$