# <u>Pré-requis</u>

## pour les cours de

## "Mathématique et Statistique appliquées à la gestion"

**(années préparatoires)**

## et

## "Mathématiques appliquées"

**(BAC2 SHS)**

Année académique 2005-2006

**Notes rédigées par Bernadette Brunquers**

# Avant-propos

Ces notes reprennent sous forme de **résumés** les **matières** étudiées dans le secondaire et **supposées acquises**.

Ces notions seront utilisées au cours de Bases mathématiques pour l'économie et la gestion, mais n'y seront plus développées.

Chaque étudiant est invité à prendre conscience de son degré d'acquisition de ces notions, et à combler rapidement les éventuelles lacunes.
Dans chaque chapitre, des exercices et corrigés permettent à chacun de se remettre au niveau requis pour commencer la première année d'études de bachelier en gestion.

**Pour les étudiants du site de Mons :**

Des remédiations collectives sont organisées .
Les dates et locaux sont affichés aux valves .
En cas de difficulté , une remédiation individuelle peut être organisée.
Prendre contact avec Mme B. BRUNQUERS lors des T.P. du groupe 3
ou par e-mail laremediationdemadamebrunquers@yahoo.fr

**Pour les étudiants du site de Charleroi :**

En cas de difficulté , prendre contact avec Mme C. MOUSSET lors des cours .

# Sommaire

# Table des matières

## • Chapitre 1 : **Calcul dans les réels $R$**

- Chapitre 2 : **Équations**



- Chapitre 3 : **Inéquations**

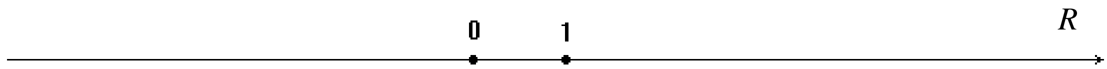
# • Exercices et corrigés

# Chapitre 1 : Calcul dans les réels

## 1.1. L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

**L'ensemble des** nombres **réels** $R$
est constitué de la réunion de deux sous-ensembles de nombres distincts :
les nombres rationnels $Q$ et les nombres irrationnels $I$ : $R = Q \cup I$.

Traçons une droite munie d'une origine et d'une unité.




A tout point de cette droite correspond un et un seul nombre réel.
A tout nombre réel correspond un et un seul point de la droite graduée.

Les autres ensembles de nombres connus sont inclus dans l'ensemble des réels $R$ :

$N \subset Z \subset Q \subset R$ **et** $I \subset R$

- **L'ensemble des** nombres **entiers positifs ou nuls** (naturels) $N$

$N = \{0,1,2,3,4,5,\ldots,10,\ldots\ldots,100,\ldots\ldots\ldots,1000,\ldots\ldots\ldots\ldots,10000,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\}$

$\forall\, n_1, n_2 \in N : n_1 + n_2 \in N$ la somme de deux naturels est un naturel
$\forall\, n_1, n_2 \in N : n_1 \,.\, n_2 \in N$ le produit de deux naturels est un naturel
$\exists\, n_1, n_2 \in N : n_1 - n_2 \notin N$ *la différence de deux naturels n'est pas toujours un naturel*

<u>Exemple</u> : $55 - 184 = -129$
$-129 \notin N$

$\rightarrow$ *nécessité d'introduire les nombres entiers négatifs*

- **L'ensemble des** nombres **entiers** (relatifs) $\boldsymbol{Z}$

$Z = \{ \ldots\ldots\ldots, -1000, \ldots.., -10, \ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 10, \ldots\ldots\ldots, 1000, \ldots\ldots \}$

$\forall\, e_1, e_2 \in Z : e_1 + e_2 \in Z$ la somme de deux entiers est un entier
$\forall\, e_1, e_2 \in Z : e_1 \,.\, e_2 \in Z$ le produit de deux entiers est un entier
$\forall\, e_1, e_2 \in Z : e_1 - e_2 \in Z$ la différence de deux entiers est un entier
$\exists\, e_1, e_2 \in N : \dfrac{e_1}{e_2} \notin Z$ *le quotient de deux entiers n'est pas toujours un entier*

<u>Exemple</u> : $\dfrac{-184}{55} = -3{,}3454545\ldots$

$\dfrac{-184}{55} \notin Z$

$\rightarrow$ *nécessité d'introduire les nombres rationnels*

- **L'ensemble des** nombres **rationnels** $\boldsymbol{Q}$

$Q = \{ \dfrac{n}{d} \mid n \in Z \text{ et } d \in N_0 \}$ (où $N_0$ est l'ensemble des naturels sans le nombre 0)

Tout nombre rationnel peut s'écrire sous forme décimale limitée.

<u>Exemple</u> : $\dfrac{5}{4} = 1{,}25$

ou sous forme décimale illimitée périodique

<u>Exemple</u> : $\dfrac{-184}{55} = -3{,}3\,\underline{45}\,45\,45\,45\,\ldots$

$\forall\, q_1, q_2 \in Q : q_1 + q_2 \in Q$ la somme de deux rationnels est un rationnel
$\forall\, q_1, q_2 \in Q : q_1 \,.\, q_2 \in Q$ le produit de deux rationnels est un rationnel
$\forall\, q_1, q_2 \in Q : q_1 - q_2 \in Q$ la différence de deux rationnels est un rationnel
$\forall\, q_1, q_2 \in Q,\ q_2 \neq 0 : \dfrac{q_1}{q_2} \in Q$ le quotient de deux rationnels est un rationnel, mais
*le quotient de deux rationnels n'est défini qu'à condition que le <u>dénominateur</u> soit <u>non nul</u>*

$\exists\, q \in Q : \sqrt{q} \notin Z$ *la racine carrée positive d'un rationnel n'est pas toujours un rationnel*

<u>Exemple</u> : $\sqrt{\dfrac{6}{3}} = \sqrt{2} \approx 1{,}414213562\ldots$

*forme décimale illimitée non périodique*

$\rightarrow$ *nécessité d'introduire les nombres irrationnels*

- ## **L'ensemble des** nombres **irrationnels $I$**

L'ensemble des nombres irrationnels est constitué de nombres qui ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux nombres entiers.

Tout nombre irrationnel s'écrit sous forme décimale illimitée non périodique.

<u>Exemple</u> : $\pi \approx 3{,}14\ldots$ , $e \approx 2{,}71\ldots$ , $\sqrt{2} \approx 1{,}41\ldots$

Remarque : $\sqrt{2}$ est le nombre dont le carré vaut $2$, et qui s'écrit sous forme décimale illimitée non périodique.

- ## **L'ensemble des** nombres **réels $R$** : $R = Q \cup I$

Calculs impossibles dans R :
La racine carrée d'un réel n'est définie que si ce <u>réel</u> est <u>positif ou nul</u>
Le quotient de deux rationnels n'est défini que si le <u>dénominateur</u> est <u>non nul</u>

- ## **Sous-ensembles de** $R$

$R^+$ est l'ensemble des nombres réels positifs : $x \in R^+ \Leftrightarrow x \in R$ et $x \geq 0$
$R^-$ est l'ensemble des nombres réels négatifs : $x \in R^- \Leftrightarrow x \in R$ et $x \leq 0$
$R_0$ est l'ensemble des nombres réels non nuls : $x \in R_0 \Leftrightarrow x \in R$ et $x \neq 0$
$R_0^+$ est l'ensemble des nombres réels strictement positifs : $x \in R_0^+ \Leftrightarrow x \in R$ et $x > 0$
$R_0^-$ est l'ensemble des nombres réels strictement négatifs : $x \in R_0^- \Leftrightarrow x \in R$ et $x < 0$

# 1.2. CONDITIONS D'EXISTENCE DANS $R$

Le ***quotient*** de deux réels n'est défini qu'à condition que le ***dénominateur*** *soit* ***non nul****.*
La ***racine carrée*** d'un réel n'est définie qu'à condition que ce ***réel*** *soit* ***positif ou nul****.*

Ceci donne lieu aux ***conditions d'existence dans les réels*** :

- $\frac{n}{d} \in R$ **à la condition** $d \neq 0$
- $\sqrt{r} \in R$ **à la condition** $r > 0$

# 1.3. PRIORITES DES OPERATIONS DANS $R$

## • L'ordre de priorité des opérations est

1. les calculs situés entre parenthèses (voir remarque)
2. les exposants
3. les multiplications et les divisions
4. les sommes et les soustractions.

**Remarque** : $\frac{n}{d}$ est une notation simplifiée de $\frac{(n)}{(d)}$

## • Distributivité de l'addition sur la multiplication

$(a+b) \,.\, c = a.c + b.c$ la multiplication se distribue à droite par rapport à l'addition
$a \,.\, (b+c) = a.b + a.c$ la multiplication se distribue à gauche par rapport à l'addition

**Vocabulaire** :

- Dans l'expression $a.c + b.c$ , la *dernière opération* effectuée est une *addition.*
- Dans l'expression $(a+b) \,.\, c$ , la *dernière opération* effectuée est un *produit.*
- $(a+b) \,.\, c$ est une expression *factorisée.*

## 1.4. OPERATIONS DANS $R$

Soient $a, b, c$ des nombres réels.

Il s'agit de faire bien **attention** aux remarques suivantes.

- $(a-b)-c \neq a-(b-c)$ la soustraction **<u>n'est pas</u>** associative
- $a-b = a+(-b)$ soustraire le réel $b$ revient à additionner son opposé $(-b)$
- $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{c} \neq \dfrac{a}{\left(\dfrac{b}{c}\right)}$ la division **<u>n'est pas</u>** associative
- **Attention :** la notation $\begin{matrix} a \\ \overline{b} \\ \overline{c} \end{matrix}$ n'a aucun sens sans une barre de fraction principale.

  En effet, $\dfrac{a}{\dfrac{b}{c}} = \dfrac{a}{\left(\dfrac{b}{c}\right)}$ et $\dfrac{\dfrac{a}{b}}{c} = \dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{c}$

- $\dfrac{1}{a}$ (*inverse* du nombre $a$) n'est défini dans l'ensemble des nombres réels $R$ qu'**à la condition** $a \neq 0$

**Notation :** $\dfrac{1}{a} = a^{-1}$ **(à la condition $a \neq 0$)**

**Notation :** $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$

- $\dfrac{b}{a} = b.\dfrac{1}{a} = b.a^{-1}$ **(à la condition $a \neq 0$)**

  Diviser par le réel a revient à multiplier par son inverse.

# 1.5. IDENTITES REMARQUABLES

Lorsque la dernière opération effectuée est une addition, on dit que cette expression est **développée**.

Lorsque la dernière opération effectuée est un produit, on dit que cette expression est **factorisée**.

Les **identités remarquables** expriment l'égalité d'une même expression écrite sous sa forme développée <u>et</u> sous sa forme factorisée.

| somme | $\leftrightarrow$ | **produit** |
|---|---|---|
| $a^2 + 2\,ab + b^2$ | $=$ | $(a+b)^2$ |
| | $=$ | $(a+b).(a+b)$ |
| $a^2 - 2\,ab + b^2$ | $=$ | $(a-b)^2$ |
| | $=$ | $(a-b).(a-b)$ |
| $a^2 - b^2$ | $=$ | $(a+b).(a-b)$ |
| $a^2 + b^2$ | | **non factorisable** |
| $a^3 - b^3$ | $=$ | $(a-b).(\,a^2 + ab + b^2)$ |
| $a^3 + b^3$ | $=$ | $(a+b).(\,a^2 - ab + b^2)$ |
| $a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$ | $=$ | $(a+b)^3$ |
| | $=$ | $(a+b).(a+b)\,.(a+b)$ |
| $a^3 - 3\,a^2b + 3\,ab^2 - b^3$ | $=$ | $(a-b)^3$ |
| | $=$ | $(a-b).(a-b)\,.(a-b)$ |

# 1.6. RACINES ET PUISSANCES

## 1.6.1. Puissances

**Définitions et notations** :

- si $n \in N_0$ et $a \in R$ alors $a^n = \underbrace{a.a.a. \dots .a}_{n \text{ facteurs}}$
- si $z \in Z_0$ et $a \in R$ alors $a^{-z} = \dfrac{1}{a^z}$ et $\dfrac{1}{a^{-z}} = a^z$
- si $a \neq 0$ alors $a^o = 1$
- si $b > 0$ alors $0^b = 0$

**Propriétés** : si $a, b, n, m \in R$ :

$$a^n.a^m = a^{n+m}$$
$$(a.b)^n = a^n.b^n$$
$$(a^n)^m = a^{n.m}$$

<u>Attention</u> :
- « $a^{n^m}$ » n'a aucun sens et ne devrait même pas s'écrire !
- $(a^n)^m \neq a^{(n^m)}$ . . . car $(a^n)^m = a^{n.m} \neq a^{(n^m)}$
- $(-r)^n \neq -r^n$ . . . car $-r^n = -(r)^n$

## 1.6.2. Racines

**Définition** : si $n$ est un entier strictement positif,

- $\sqrt[n]{0} = 0$
- si a est positif $\sqrt[n]{a}$ est le nombre réel <u>*positif*</u> tel que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
- si **a** est <u>**négatif**</u>
  - si $n$ est **pair** $\sqrt[n]{a} \notin R$
  - si $n$ est **impair** $\sqrt[n]{a}$ est le nombre réel <u>*négatif*</u> tel que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

**Propriétés** : si $n \in N \setminus \{0,1\}$ et $a, b \in R$ :

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$
$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$$

<u>Attention</u> : $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$ **et** $\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} \neq \sqrt[n+m]{a}$

**Notation :** $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ ; $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

# 1.7. VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE REEL

La valeur absolue d'un nombre réel $a$ se note $|a|$ .

Définition : si $a \geq 0$ alors $|a| = a$

si $a < 0$ alors $|a| = -a$

<u>attention :</u> si $a < 0$ alors $-a$ désigne un nombre positif !

# 1.8. SYMBOLE DE SOMMATION

Pour représenter une expression algébrique $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n$

qui est la somme de termes indicés, on utilise le symbole de sommation $\Sigma$ .

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i)$$

Dans $\sum_{i=1}^{n}(x_i)$ le symbole $\Sigma$ exprime que l'opération effectuée est une *somme.*

$i$ est un *indice* variant de 1 à $n$ par pas de 1

$n$ est la valeur maximale prise par l'indice ; c'est un nombre naturel $\neq 0$

$x_i$ est une expression algébrique qui dépend de l'indice $i$

**Remarque** : L'indice $i$ peut être remplacé par n'importe quelle autre lettre

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i) = \sum_{k=1}^{n}(x_k)$$

(. . . pour autant que cela ne porte pas à confusion)

**Remarque** : On peut utiliser le même type de notation pour une somme de termes indicés même si l'indice ne commence pas à la valeur 1.

<u>Exemple</u> : $x_5 + x_6 + \ldots + x_{12} = \sum_{i=5}^{12}(x_i)$

# Chapitre 2 : Equations

## 2.1. INTRODUCTION

Une **équation** est une égalité entre deux expressions mathématiques en une ou plusieurs variables.
Résoudre une **équation**, c'est déterminer les valeurs des variables qui rendent cette égalité vraie. Ces valeurs sont appelées **solutions** de l'équation. Nous noterons $S$, l'ensemble des solutions d'une équation.

Des **équations équivalentes** sont des équations qui ont exactement les mêmes solutions.
Partant d'une équation, on obtient une **équation équivalente**
- si on **additionne** (ou soustrait) aux deux membres d'une équation *le même **réel***
- si on **multiplie** (ou divise) les deux membres d'une équation par *un même **réel non nul***.

Les expressions figurant dans une équation n'existent qu'à certaines conditions.
Cela amène à imposer les **conditions d'existence** sur les variables.

Si, après calcul, on est amené à trouver une solution qui ne satisfait pas les conditions d'existence, il faudra les rejeter .

***A savoir :*** $P.Q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P = 0$ ***ou*** $Q = 0$

$\dfrac{N}{D} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N = 0$ ***et*** $D \neq 0$

- **Classification de quelques équations** (étudiées dans ce cours)

**<u>équations à une variable</u>** $x$

équations du 1<sup>er</sup> degré à une variable : $mx + p = 0$
équations du 2<sup>ème</sup> degré à une variable : $a.x^2 + b.x + c = 0$

**<u>équations à deux variables</u>** $x , y$
équations du 1<sup>er</sup> degré à deux variables : $a.x + by + c = 0$
équations du 2<sup>ème</sup> degré à deux variables : exemples $y = a.x^2 + b.x + c$ ou $x^2 + y^2 = r^2$

**<u>équations à trois variables</u>** $x , y , z$
équations du 1<sup>er</sup> degré à trois variables $a.x + by + cz + d = 0$

# 2.2. EQUATIONS A UNE VARIABLE

## 2.2.1. Equations du 1$^{er}$ degré à une variable

Équation en x : $mx + p = 0$

si $m \neq 0$, une seule solution : $S = \left\{ \frac{-p}{m} \right\}$

## 2.2.2. Equations du 2$^{ème}$ degré à une variable

**équation de base** : $x^2 = r$

Si $r > 0$, deux solutions : $S = \{-\sqrt{r}, \sqrt{r}\}$
Si $r = 0$, une solution : $S = \{0\}$
Si $r < 0$, pas de solution : $S = \phi$

**équation générale** : $a.x^2 + b.x + c = 0$

Calculer $\Delta = b^2 - 4.a.c$

Si $\Delta > 0$, deux solutions $Sol = \left\{ \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a}, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a} \right\}$

Si $\Delta = 0$, une solution $Sol = \left\{ \frac{-b}{2.a} \right\}$

Si $\Delta < 0$, pas de solution $Sol = \phi$

# 2.3. EQUATIONS à DEUX VARIABLES

Résoudre une équation à deux variables, c'est déterminer les **couples** de valeurs de ces variables qui rendent vraie l'égalité qui définit l'équation.
Ces couples sont appelées **solutions** de l'équation.

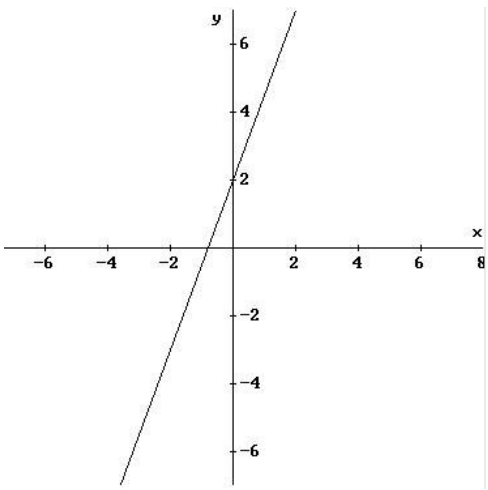
## 2.3.1. Equations du 1^er^ degré (ou linéaire) à deux variables

$a.x + by + c = 0$ possède une infinité de solutions : $S = \{\ (x, y) \mid a.x + by + c = 0\ \}$

**Graphiquement** (dans une repère orthogonal à 2 axes),
l'ensemble des solutions d'une équation linéaire (ou du 1er degré) à deux variables
peut être représenté par une **droite du plan**

<u>Exemple</u> : $5x - 2y + 4 = 0$

Quelques couples qui sont solution de cette équation : $(10,27)$ , $(-2,-3)$ , $(0,2)$ , …
Graphiquement, l'ensemble des solutions peut être représenté par la droite ci-dessous.



# Rappel sur les droites du plan

**équation générale** : $d \equiv a \,.\, x + b \,.\, y + c = 0 \quad a, b, c \in R$

## Equations particulières

droite parallèle à l'axe y : $d \equiv x = r \quad , \quad r \in R$

droite parallèle à l'axe x : $d \equiv y = p \quad , \quad p \in R$

droite non parallèle à l'axe y : $d \equiv y = m.x + p \quad , \quad m, p \in R$

droite non parallèle à l'axe y et comprenant deux points donnés $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$

$$d \equiv y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right).(x - x_1)$$

*où* $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *est le coefficient angulaire ( pente )*

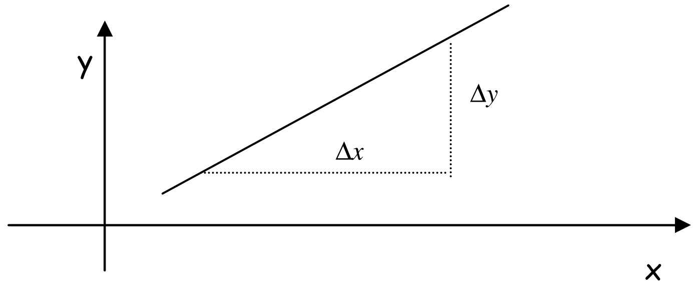
## Pente d'une droite

La **pente** (ou **coefficient angulaire**) d'une droite est aussi appelé **coefficient multiplicateur**.

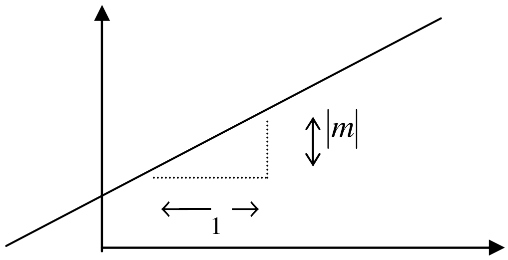
N'oublions pas : La pente d'une droite parallèle à l'axe y ($d \equiv x = r$) n'existe pas !

- La **pente** d'une droite $d \equiv y = m.x + p$ (non parallèle à l'axe $y$) est $m$.
- La **pente** d'une droite comprenant deux points donnés $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$, à la condition $x_1 \neq x_2$, vaut $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .
- Toute droite dont **la pente** est **positive** est croissante ;
  toute droite dont **la pente** est **nulle** est parallèle à l'axe $Ox$ ;
  toute droite dont **la pente** est **négative** est décroissante.

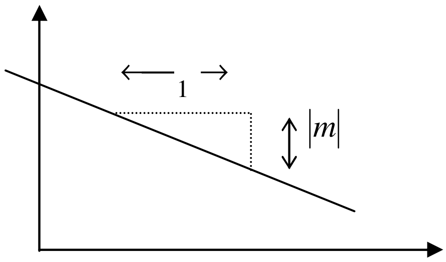
- **Signification graphique** de la pente d'une droite




pente d'une ***droite de coefficient angulaire connu*** $m$




$m > 0$




$m < 0$

## Droites parallèles entre elles

Deux droites <u>non parallèles à l'axe y</u> sont parallèles
si elles ont le même coefficient angulaire (pente)

$$d_1 \equiv y = m.x + p_1 \quad // \quad d_2 \equiv y = m.x + p_2$$

Deux droites <u>parallèles à l'axe y</u> sont parallèles entre elles

$$d_1 \equiv x = r_1 \quad // \quad d_2 \equiv x = r_2$$

## Droites perpendiculaires entre elles

Deux droites <u>non parallèles aux axes</u> sont perpendiculaires
si leurs coefficients de direction $m_1$ et $m_2$ sont tels que $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$

$$d_1 \equiv y = m_1.x + p_1 \quad \perp \quad d_2 \equiv y = -\frac{1}{m_1}.x + p_2$$

Deux droites <u>parallèles aux axes</u> sont perpendiculaires

$$d_1 \equiv x = c_1 \quad \perp \quad d_2 \equiv y = c_2$$

## 2.3.2. Equations du 2ème degré à deux variables

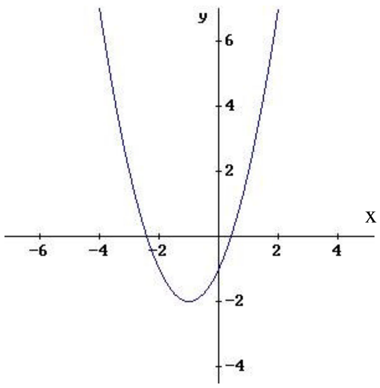
**Exemple 1** : $y = a.x^2 + b.x + c$

Cette équation possède une infinité de solutions : $S = \{ (x, y) \mid y = a.x^2 + b.x + c \}$

**Graphiquement** (dans une repère orthogonal), l'ensemble des solutions de cette équation du 2ème degré à deux variables peut être représenté par une **parabole du plan** (muni d'un repère) dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe des $y$.

<u>Exemple</u> : $y = x^2 + 2x + 1$

Quelques couples qui sont solution de cette équation : (0,1), (-2,1), (2,9), …
Graphiquement, l'ensemble des solutions peut être représenté par la parabole ci-dessous.



# Rappel sur les paraboles du plan

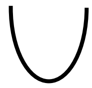
(dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe des y)

| |
|---|
| **équation générale** : $P \equiv y = a\ .\ x^2 + b\ .\ x + c \qquad a, b, c \in R, a \neq 0$ |

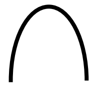
## 1. CONCAVITE

La concavité est déterminée par le signe du coefficient de $x^2$

$a > 0 \quad \Rightarrow$ la parabole a sa concavité tournée vers le haut :



$a < 0 \quad \Rightarrow$ la parabole a sa concavité tournée vers le bas :



## 2. AXE DE SYMETRIE

L'axe de symétrie est parallèle à l'axe OY et a pour équation $sym \equiv x = \dfrac{-b}{2.a}$

## 3. EXTREMUM

$a > 0 \quad \Rightarrow$ l ' **extremum** est un minimum

$a < 0 \quad \Rightarrow$ l ' **extremum** est un maximum

Calculer $\Delta = b^2 - 4.a.c$

L'extremum a pour coordonnée $\left(\dfrac{-b}{2.a}, \dfrac{-\Delta}{4.a}\right)$

## 4. INTERSECTION DE LA PARABOLE AVEC LES AXES

- intersection **avec l'axe des y** : un seul point de coordonnée $(0, c)$
- intersection **avec l'axe des x** : le nombre de points d'intersection varie de 0 à 2.

Calculer $\Delta = b^2 - 4.a.c$ (*déjà calculé au point 3*)

Si $\Delta > 0$, deux points d'intersection : $\left(\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a}, 0\right)$ et $\left(\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a}, 0\right)$

Si $\Delta = 0$, un seul point d'intersection : $\left(\dfrac{-b}{2.a}, 0\right)$

Si $\Delta < 0$, aucun point d'intersection

**Exemple 2 :** $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

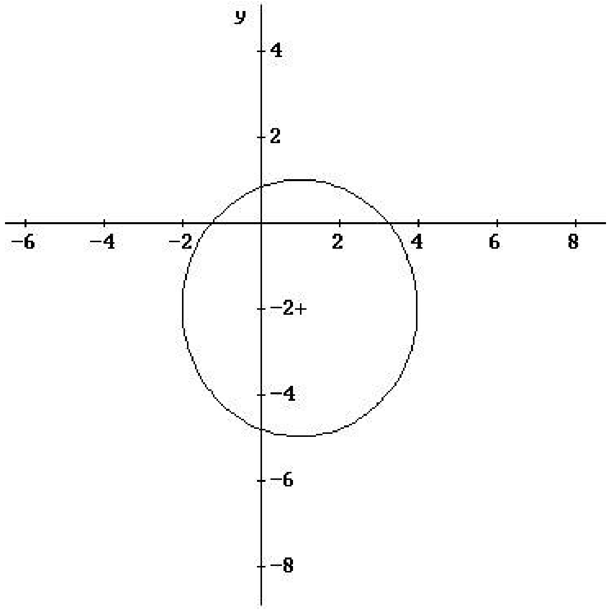
Cette équation possède une infinité de solutions : $S = \{\ (x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\ \}$

**Graphiquement** (dans une repère orthonormé), l'ensemble des solutions de cette équation du 2ème degré à deux variables peut être représenté par un **cercle d'un plan** (muni d'un repère orthonormé) **de centre** $(a,b)$ **et de rayon** $r$.

Exemple : $(x\text{-}1)^2 + (y\text{+}2)^2 = 9$

Quelques solutions de cette équation : (0,1) , (-2,0) , …

Graphiquement, l'ensemble des solutions de cette équation peut être représenté par un cercle de centre (1,-2) et de rayon 3.



# 2.4. EQUATIONS DU 1er DEGRE (ou LINEAIRE) A TROIS VARIABLES

Résoudre une équation à trois variables, c'est déterminer les triplets de valeurs de ces variables qui rendent vraie l'égalité qui définit cette équation.
Ces **triplets** sont appelés **solutions** de l'équation.

Une **équation du 1er degré, ou équation linéaire, à trois variables** $x, y, z,$ est une équation de la forme $a.x + b.y + c.z + d = 0$ (avec $a, b, c$ non tous nuls).

Cette équation possède une infinité de solutions : $S = \{ \ (x, y, z) \mid a.x + by + cz + d = 0 \ \}$

**Graphiquement** (dans un repère orthogonal à 3 axes), l'ensemble des solutions d'une équation du 1er degré à trois variables peut être représenté par un **plan de l'espace**.

# Rappel sur les plans de l'espace

Trois points non alignés déterminent un plan de l'espace .

| |
|---|
| **équation générale d'un plan de l'espace** : $a.x + by + cz + d = 0$ , $a, b, c, d \in R$ ($a, b, c$ non tous nuls) |

**<u>équations particulières :</u>**

plan comprenant trois points situés sur les axes $(a_x, 0, 0)$ , $(0, b_y, 0)$ , $(0, 0, c_z)$

$$\frac{x}{a_x} + \frac{y}{b_y} + \frac{z}{c_z} = 1 \quad , \; a_x, b_y, c_z \in R_0$$

équation d'un plan **comprenant l'origine** : $a.x + b.y + c.z = 0$
( terme indépendant nul )

équation d'un plan **parallèle à l'axe** $Oz$ : $a.x + b.y + d = 0$
( coefficient de la variable $z$ nul )

équation d'un plan **parallèle à l'axe** $Oy$ : $a.x + c.z + d = 0$
( coefficient de la variable $y$ nul )

équation d'un plan **parallèle à l'axe** $Ox$ : $b.y + c.z + d = 0$
( coefficient de la variable $x$ nul )

équation d'un plan **parallèle au plan** $Oxy$ (et perpendiculaire à l'axe $Oz$) :
$z = r$ , $r \in R$
( coefficient des variables $x$ et $y$ nuls )

équation d'un plan **parallèle au plan** $Oxz$ (et perpendiculaire à l'axe $Oy$) :
$y = r$ , $r \in R$
( coefficient des variables $x$ et $z$ nuls )

équation d'un plan **parallèle au plan** $Oyz$ (et perpendiculaire à l'axe $Ox$) :
$x = r$ , $r \in R$
( coefficient des variables $y$ et $z$ nuls )

remarque :
Un **système** de deux équations linéaires (ou du 1er degré) à trois variables
Correspond à la recherche de l'intersection de deux plans .
Les équations cartésiennes d'une droite de l'espace sont déterminées par l'intersection de deux plans .

# Chapitre 3 : Inéquations

## 3.1. INTRODUCTION

Une **inéquation** est un énoncé qui exprime que deux expressions mathématiques ne sont pas égales et que l'une est (strictement ou pas) plus petite que l'autre.
**Résoudre une inéquation**, c'est déterminer les valeurs des variables qui rendent cette inégalité vraie. Ces valeurs sont appelées **solutions** de l'inéquation.

Deux **inéquations** sont **équivalentes** si elles ont exactement les mêmes solutions.

Partant d'une inéquation, on obtient une **inéquation équivalente**
- si on **additionne** (ou soustrait) aux deux membres d'une inéquation *un même **réel***
- si on **multiplie** (ou divise) les deux membres d'une inéquation par *un même **réel** <u>**positif**</u> **non nul.***

Si on **multiplie** (ou divise) les deux membres d'une inéquation **par *un même réel <u>négatif</u> non nul,*** alors **l'inégalité « se retourne »** .

<u>Exemple</u> : $-2x > 5$

$$(-\frac{1}{2}) \cdot (-2x) < (-\frac{1}{2}) \cdot 5$$

$$x < \frac{-5}{2}$$

Les expressions figurant dans une inéquation n'existent qu'à certaines conditions.
Cela amène à imposer des **conditions d'existence** sur les variables.

Si, après calcul, on est amené à trouver une solution qui ne satisfait pas les conditions d'existence, il faudra les rejeter.

- **Classification de quelques inéquations** (étudiées dans ce cours)

**<u>Inéquations à une variable</u>** $x$

inéquations du 1^er^ degré à une variable : $mx + p \geq 0$ , $mx + p > 0$
$mx + p \leq 0$ , $mx + p < 0$

inéquations du 2^ème^ degré à une variable : $a.x^2 + b.x + c \geq 0$ , $a.x^2 + b.x + c > 0$
$a.x^2 + b.x + c \leq 0$ , $a.x^2 + b.x + c < 0$

**<u>Inéquations à deux variables</u>** $x, y$

inéquations du 1^er^ degré à deux variables : $a.x + by + c \geq 0$ , $a.x + by + c > 0$
$a.x + by + c \leq 0$ , $a.x + by + c < 0$

# 3.2. INEQUATIONS A UNE VARIABLE

Résoudre une inéquation à une variable, c'est déterminer les valeurs de cette variable qui rendent vraie l'inégalité qui définit cette inéquation.
Ces valeurs sont appelées **solutions** de l'inéquation.

## 3.2.1. Inéquations du 1er degré à une variable

**Toute** inéquation du 1er degré à une variable peut s'écrire sous une des formes

$a.x+b>0$ **ou** $a.x+b\geq 0$ **ou** $a.x+b<0$ **ou** $a.x+b\leq 0$

avec $a,b\in R$ et $a\neq 0$

**<u>1ère méthode : utilisation des principes d'équivalence des inéquations</u>**

Exemple : résolution de l'inéquation $a.x+b\leq 0$ *où* $a,b\in R$ *et* $a\neq 0$

$$a.x+b\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad a.x\leq -b$$

si $a>0$ : $a.x+b\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\leq\frac{-b}{a}$ *principe d'équivalence*

**si** $a<0$ : $a.x+b\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\geq\frac{-b}{a}$ ***le signe d'inégalité change***

**<u>2ème méthode : utilisation d'un tableau de signes</u>**

1. Transformer l'énoncé pour obtenir une inéquation équivalente comparée à 0.
2. Ecrire le tableau des signes.

| valeur de $x$ | | $\frac{-b}{a}$ | |
|---|---|---|---|
| **signe de** $a.x+b$ | **signe de** $(-a)$ | **0** | **signe de** $a$ |

3. Lire les signes exprimés dans l'énoncé.

**Convention** : **vert** pour les signes acceptés et **rouge** pour les signes rejetés

*pour l'inéquation* $a.x+b>0$ ***vert** pour les signes* **+**
*pour l'inéquation* $a.x+b\geq 0$ ***vert** pour les signes* **+ et 0**
*pour l'inéquation* $a.x+b<0$ ***vert** pour les signes* **–**
*pour l'inéquation* $a.x+b\leq 0$ ***vert** pour les signes* **– et 0**

4. Ecrire l'ensemble des solutions.

# Exemple de résolution d'une inéquation du 1er degré à 1 variable

Résoudre dans $R$ : $-2.x+3 \leq 0$

**Première méthode**

$$-2.x+3 \leq 0$$
$$-2.x \leq 3$$
$$-x \leq \frac{3}{2}$$
$$x \geq \frac{3}{2}$$
$$S = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

**Seconde méthode**

1. Rechercher la solution de **l'équation** $-2.x+3=0$ : on obtient $x = \frac{3}{2}$

2. Ecrire les tableaux des signes

| valeur de $x$ | | $\frac{3}{2}$ | |
|---|---|---|---|
| signe de $-2.x+3$ | + | 0 | - |

3. Lire les **signes – et 0** dans le tableau des signes.

4. $S = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$

## 3.2.2. Inéquations du 2ème degré à une variable

**Toute** inéquation du 2ème degré à une variable peut s'écrire sous une des formes

$a.x^2+b.x+c>0$ **ou** $a.x^2+b.x+c\geq 0$ **ou** $a.x^2+b.x+c<0$ **ou** $a.x^2+b.x+c\leq 0$
avec $a,b,c\in R$ et $a\neq 0$

__**Méthode unique : utilisation d'un tableau de signes**__

1. Calculer $\Delta=b^2-4.a.c$ et **observer son signe.**

2. **Ecrire le tableau des signes**.

   - Si $\Delta>0$ alors les deux solutions $x_1,x_2$ de l'**équation** sont $\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}$
     on choisit $x_1<x_2$

| valeur de $x$ | | $x_1$ | | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $a.x^2+b.x+c$ | signe de $a$ | 0 | signe de $(-a)$ | 0 | signe de $a$ |

   - Si $\Delta=0$ alors la solution unique $x_0$ de l'**équation** est $\dfrac{-b}{2.a}$

| valeur de $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| signe de $a.x^2+b.x+c$ | signe de $a$ | 0 | signe de $a$ |

   - Si $\Delta<0$ alors l'**équation** ne possède aucune solution

| valeur de $x$ | **toutes** |
|---|---|
| signe de $a.x^2+b.x+c$ | signe de $a$ |

3. Lire les signes exprimés dans l'énoncé :

**Convention** : **vert** pour les signes acceptés et **rouge** pour les signes rejetés

*pour l'inéquation* $a.x^2+b.x+c>0$ ***vert*** *pour les signes +*
*pour l'inéquation* $a.x^2+b.x+c\geq 0$ ***vert*** *pour les signes* ***+ et 0***
*pour l'inéquation* $a.x^2+b.x+c<0$ ***vert*** *pour les signes –*
*pour l'inéquation* $a.x^2+b.x+c\leq 0$ ***vert*** *pour les signes* ***– et 0***

4. Ecrire l'ensemble des solutions.

## <u>Exemples</u> de résolution d'une inéquation du 2ème degré à 1 variable

**Exemple 1 :** résoudre dans $R$ $4-x^2 \leq 0$

1. Les solutions de **l'équation** sont $x = \pm 2$
   $\Delta > 0$ car **l'équation** $4 - x^2 = 0$ possède deux solutions.

2. Ecrire le tableau des signes.

| valeur de $x$ | | -2 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $4-x^2$ | - | 0 | + | 0 | - |

4. Lire le tableau des signes :
   les solutions de $4 - x^2 \leq 0$ sont données par $S = \left]-\infty,-2\right] \cup \left[2,+\infty\right[$ .

**Exemple 2 :** résoudre dans $R$ $x^2 + 1 \leq 0$

1. **L'équation** ne possède aucune solution : $\Delta = -4$ donc $\Delta < 0$

2. Ecrire le tableau des signes.

| valeur de $x$ | |
|---|---|
| signe de $x^2+1$ | + |

3. Lire le tableau des signes : aucune valeur de $x$ n'est associée à $x^2 + 1 \leq 0$ et $S = \phi$.

**Exemple 3 :** résoudre dans $R$ $(4-x)^2 > 0$

1. La solution de **l'équation** $x_0 = 4$ est unique
   $\Delta = b^2 - 4.a.c$ n'a pas été calculé mais on connaît son signe :
   $\Delta = 0$ car **l'équation** $(4-x)^2 = 0$ possède une seule solution.

2. Ecrire le tableau des signes.

| valeur de $x$ | | 4 | |
|---|---|---|---|
| signe de $(4-x)^2$ | + | 0 | + |

3. Lire le tableau des signes :
   les solutions de $(4-x)^2 > 0$ sont données par $S = R \setminus \{4\}$.

# 3.3. INEQUATIONS A DEUX VARIABLES

Résoudre une inéquation à deux variables, c'est déterminer les couples de valeurs de ces variables qui rendent vraie l'inégalité qui définit cette inéquation.
Ces couples de valeurs sont appelés **solutions** de l'inéquation.

## • Inéquations du 1^er^ degré à deux variables

Toute inéquation du **1er degré à deux variables** peut s'écrire sous la forme

$a.x+b.y+c<0$ **ou** $a.x+b.y+c>0$ **ou** $a.x+b.y+c\leq 0$ **ou** $a.x+b.y+c\geq 0$

où $a,b,c\in R$

Cette inéquation possède une **infinité de solutions,** dont la représentation graphique est un **demi-plan délimité par une droite**.

La représentation graphique des solutions des inéquations
$a.x+b.y+c<0$ **ou** $a.x+b.y+c>0$ est un **demi-plan ouvert**

La représentation graphique des solutions des inéquations
$a.x+b.y+c\leq 0$ **ou** $a.x+b.y+c\geq 0$ est un **demi-plan fermé**

## Rappel sur les demi-plans

**Pour représenter un demi-plan ouvert ou fermé :**

1. Représenter la droite qui le détermine
   en rouge si l'inéquation est du type $a.x+b.y+c<0$ **ou** $a.x+b.y+c>0$
   en vert si l'inéquation est du type $a.x+b.y+c\leq 0$ **ou** $a.x+b.y+c\geq 0$

2. Choisir un point extérieur à cette droite

3. En remplaçant les coordonnées de ce point dans l'expression algébrique $a.x+b.y+c$ , on obtient un nombre réel.

4. Le signe de ce nombre réel est le signe du demi-plan auquel il appartient.
   Le demi-plan qui convient est surligné en vert et l'autre en rouge.

<u>Exemples</u> de résolution d'une inéquation du 1er degré à 2 variables

**Exemple 1** : représenter dans $R^2$ les solutions de $-2.x-2>y$

Cette inéquation est équivalente à $2.x+y+2<0$

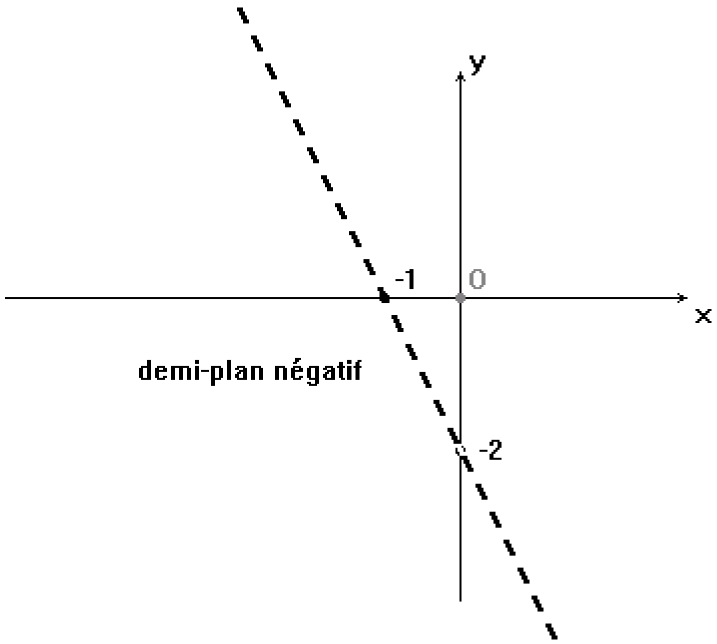
Représenter la **droite** d'équation $4.x+y+2=0$ en **rouge** car l'**inégalité** est **stricte**.

Choisir un point n'appartenant pas à cette droite et remplacer dans $2.x+y+2$
*ex :* $(0,0)$
$2.0+0+2=2$ et $2$ est un réel positif.

Le demi-plan comprenant le point $(0,0)$ est donc le demi-plan positif.
Le demi-plan ne comprenant pas le point $(0,0)$ est donc le demi-plan négatif.

Les solutions de $2.x+y+2<0$ sont représentées par le **demi-plan** ouvert **négatif**.

Ce demi-plan est à hachurer en vert, la droite est à dessiner en rouge.



**Exemple 2 :** représenter dans $R^2$ les solutions de l'inéquation $x \geq 0$

Demander une représentation des solutions dans $R^2$ implique qu'il faut considérer cette inéquation comme une inéquation à deux variables $x$ et $y$.

Cette inéquation est équivalente à $x + 0.y \geq 0$

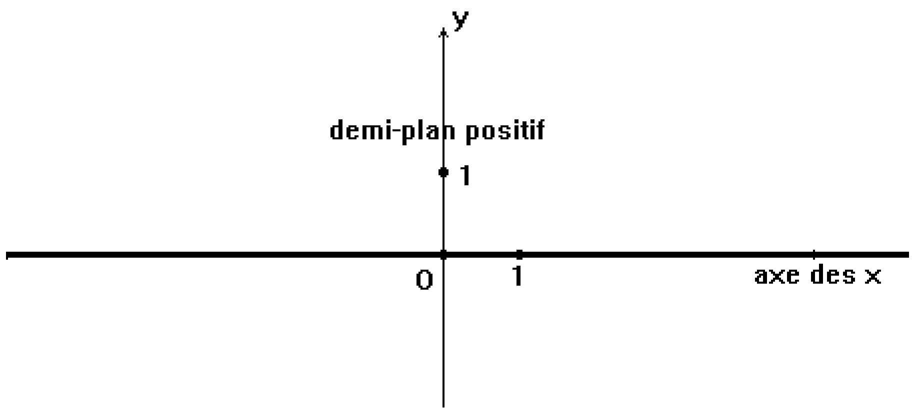
Représenter la **droite** d'équation $x = 0$ en **vert** car l' **inégalité** n'est **pas stricte**.

Choisir un point n'appartenant pas à cette droite et remplacer dans $x + 0.y$
*ex :* $(1,1)$
$1 + 0.1 = 1$ et $1$ est un réel positif.

Le demi-plan comprenant le point $(1,1)$ est donc le demi-plan positif.
Le demi-plan ne comprenant pas le point $(1,1)$ est donc le demi-plan négatif.

Les solutions de $x \geq 0$ sont représentées par le **demi-plan** fermé **positif**.

Ce demi-plan est à hachurer en vert, la droite est à dessiner en vert.



# Chapitre 4 :
# Systèmes d'(in)équations du premier degré à deux variables

## 4.1. SYSTEMES DE DEUX EQUATIONS DU 1^er DEGRE A 2 VARIABLES

- Un **système** de 2 équations du premier degré en les 2 variables $x$ et $y$

se note $\begin{cases} a_1.x + b_1.y = c_1 \\ a_2.x + b_2.y = c_2 \end{cases}$

- **Résoudre un système d'équations,** c'est déterminer les valeurs des variables qui rendent vraies **toutes** les égalités du système.

Ces valeurs sont appelées **solutions** du système d'équations.

- **Nombre de solutions d'un système :**

Un système à 2 variables peut posséder

- une solution unique
- une infinité de solutions ( système indéterminé )
- aucune solution ( système impossible )

### 4.1.1 Résolution algébrique d'un système de 2 équations du premier degré en les variables $x$ et $y$

$$\begin{cases} a_1.x + b_1.y = c_1 \\ a_2.x + b_2.y = c_2 \end{cases}$$

**Méthodes de résolution** : méthode de substitution
méthode des combinaisons linéaires
méthode de Cramer

(Remarque : la méthode de Cramer sera étudiée au cours de bases mathématiques)

Exemple 1 :

**Résolution du système** $\begin{cases} 2.x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ **par la méthode de substitution.**

1. Isoler une variable dans un membre d'une des équations.

$$\begin{cases} x = \dfrac{4-y}{2} \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

2. Remplacer cette variable dans l'autre équation.

$$\begin{cases} x = \dfrac{4-y}{2} \\ 3.\left(\dfrac{4-y}{2}\right) + 2.y = 7 \end{cases}$$

3. Résoudre l'équation du premier degré à une variable ainsi obtenue.

$$\begin{cases} x = \dfrac{4-y}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

4. Remplacer la valeur obtenue pour cette variable dans l'autre équation.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

5. La solution du système est $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ .

<u>Exemple 2</u> :

**Résolution du système** $\begin{cases} 2.x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ **par la méthode des combinaisons linéaires.**

1. Multiplier les 2 membres de chaque équation afin d'obtenir des coefficients opposés pour une des variables dans chacune des équations.

   variable $x$ : manipulation à effectuer $\begin{array}{c} L_1 \to 3.L_1 \\ L_2 \to -2.L_2 \end{array}$ $\begin{cases} 6.x + 3.y = 12 \\ -6x - 4y = -14 \end{cases}$

2. Remplacer l'une des équations (disons la seconde) par l'addition, membre à membre, des deux équations.

   manipulation à effectuer : $\begin{array}{c} rien \\ L_2 \to L_1 + L_2 \end{array}$ $\begin{cases} 6.x + 3.y = 12 \\ -y = -2 \end{cases}$

3. Résoudre l'équation du premier degré à une variable ainsi obtenue (i.e. la seconde équation).

   $\begin{cases} 6.x + 3.y = 12 \\ y = 2 \end{cases}$

4. Remplacer $y$ par sa valeur dans la première équation ; résoudre cette première équation en $x$.

   $\begin{cases} 6.x + 3.2 = 12 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6.x = 12 - 6 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

5. La solution du système est $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

On note aussi $S = \{(1,2)\}$.

## 4.1.2 Résolution graphique d'un système de 2 équations du premier degré en les variables $x$ et $y$

<u>Dans le plan</u>, la représentation graphique d'une équation du premier degré à 2 variables est une droite (voir plus haut).
La représentation graphique de la solution d'un système de deux équations du premier degré à 2 variables est l'intersection de deux droites.

- Si les 2 droites sont <u>sécantes</u>, il existe **un** seul couple – solution.

Il correspond au point d'intersection des 2 droites.

- Si les 2 droites sont <u>confondues</u>, il existe **une infinité** de solution.

Elles correspondent à l'ensemble des points de la droite.
Le système est **indéterminé**.

- Si les 2 droites sont <u>parallèles non confondues</u>, il n' existe **pas** de solution.

Le système est **impossible**.

<u>Exemple</u> :

**Résolution graphique du système** $\begin{cases} 2.x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ .

1. Représenter la droite $d_1 \equiv 2.x + y = 4$

$$d_1 \equiv y = -2.x + 4$$

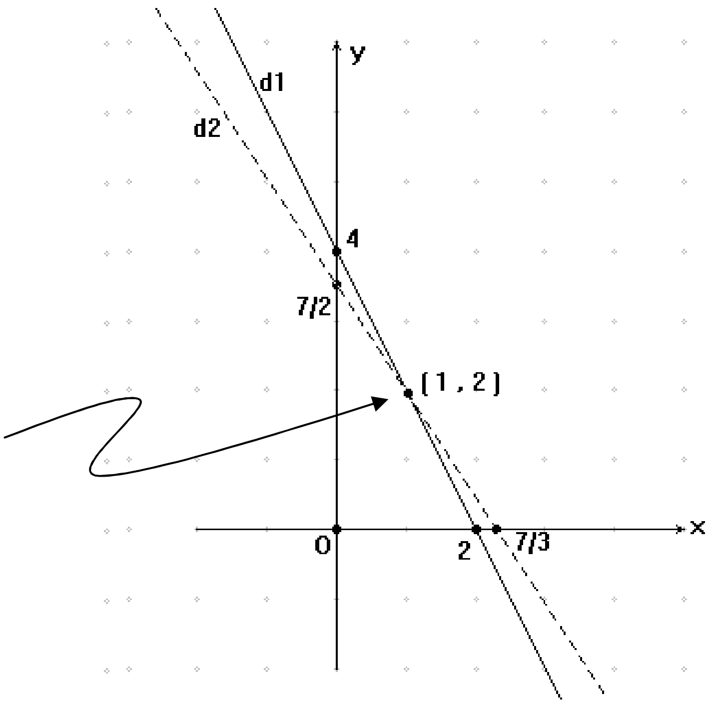
Deux points de la droite : $(0,4)$ et $(2,0)$.

2. Représenter la droite $d_2 \equiv 3.x + 2.y = 7$

$$d_2 \equiv y = -\frac{3}{2}.x + \frac{7}{2}$$

Deux points de la droite : $(0, \frac{7}{2})$ et $(\frac{7}{3}, 0)$ .

3. La solution se lit sur le graphe :
   ce sont les coordonnées du point d'intersection de la droite $d_1$ et de la droite $d_2$ .



# 4.2. SYSTEMES D'INEQUATIONS DU 1^er^ DEGRE A 2 VARIABLES

Nous envisageons uniquement la **résolution graphique** d'un système de 2 inéquations du premier degré en les variables $x$ et $y$.

La représentation graphique d'une inéquation du premier degré à 2 variables est un demi-plan.
La représentation graphique de la solution d'un système de deux inéquations du premier degré à 2 variables est donc l'intersection de deux demi-plans.

Exemple :

**Résolution graphique du système** $\begin{cases} 2.x + y > 4 \\ 3x + 2y \leq 7 \end{cases}$.

1. Traiter l'inéquation $2x + y > 4$

a) Représenter la droite $d_1 \equiv 2x + y = 4$
c'est-à-dire $d_1 \equiv y = -2x + 4$

Deux points de la droite : $(0,4)$ et $(2,0)$ .

b) Trouver le demi-plan déterminé par l'inéquation en choisissant un point test.

Choisissons le point test $(0,0)$ : $2.0 + 0 = 0$ et $0 < 4$
L'inégalité à respecter étant $2x + y > 4$,
le point test $(0,0)$ n'est pas dans le demi-plan demandé.

c) Le demi-plan défini par l'inéquation $2x + y > 4$ est donc le demi-plan ouvert déterminé par la droite $d_1 \equiv 2x + y = 4$ qui ne comprend pas le point test.

2. Traiter l'inéquation $3x + 2y \leq 7$

a) Représenter la droite $d_2 \equiv 3x + 2y = 7$

$$d_2 \equiv y = -\frac{3}{2}.x + \frac{7}{2}$$

Deux points de la droite : $(0,\frac{7}{2})$ et $(\frac{7}{3},0)$.

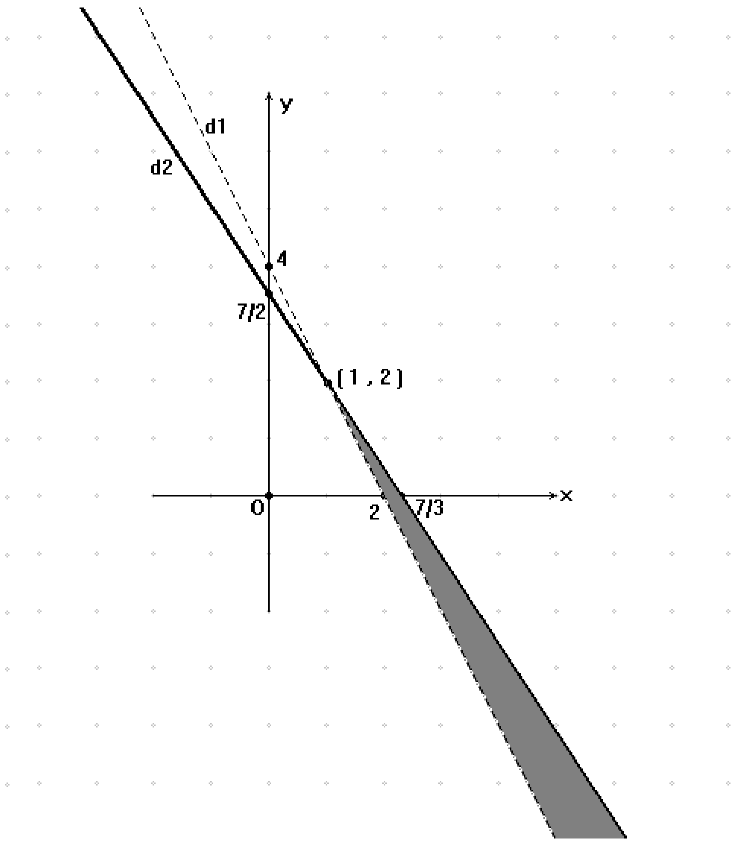
b) Trouver le demi-plan déterminé par l'inéquation en choisissant un point test.

Choisissons le point test $(0,0)$ : $3.0 + 2.0 = 0$ et $0 \leq 7$
L'inégalité à respecter étant $3x + 2y \leq 7$ ,
le point test $(0,0)$ est dans le demi-plan demandé.

c) Le demi-plan défini par l'inéquation $3x + 2y \leq 7$est donc le demi-plan fermé déterminé par la droite $d_2 \equiv 3x + 2y = 7$ qui ne comprend pas le point test .

3. L'ensemble des solutions du système $\begin{cases} 2.x + y > 4 \\ 3x + 2y \leq 7 \end{cases}$

   est représenté par l'intersection des deux demi-plans.



# Chapitre 5 : Théorème de Pythagore

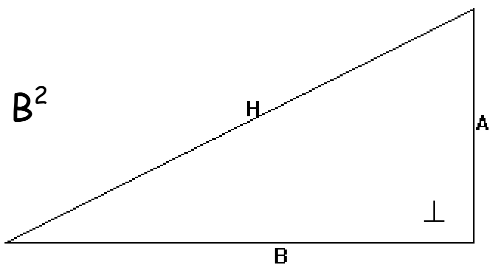
## 5.1. Théorème de Pythagore

Vocabulaire :
Dans un triangle rectangle , le côté opposé à l'angle droite est appelé **hypoténuse**.

**Théorème** :

Dans tout triangle rectangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des deux autres côtés.

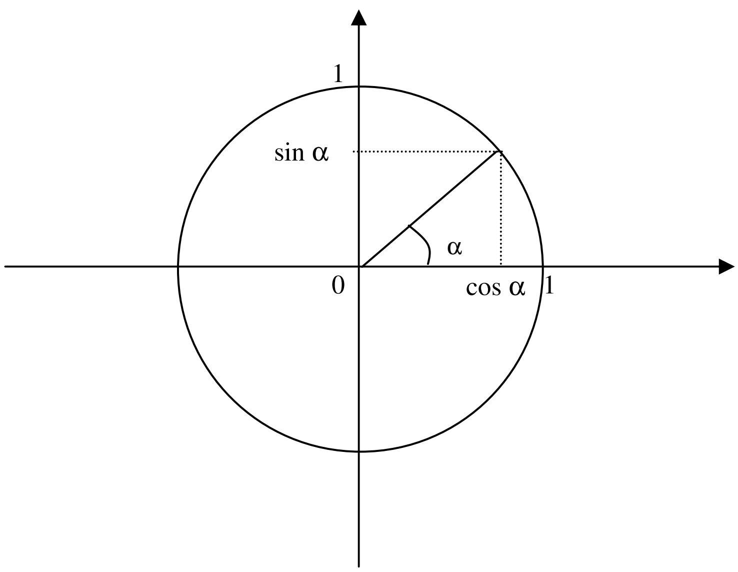
$H^2 = A^2 + B^2$




## 5.2. Applications du théorème de Pythagore

- Théorème fondamental de la trigonométrie

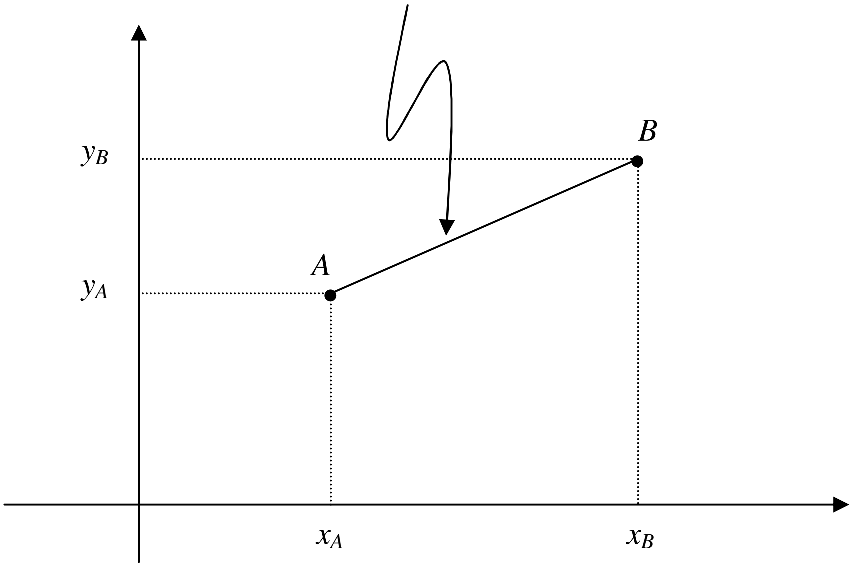
Quel que soit l'angle $\alpha$ : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$



- Distance entre 2 points du plan dans un repère orthonormé

Soient deux points $A$ et $B$, de coordonnées $(x_A , y_A )$ et $(x_B , y_B )$.

La distance entre $A$ et $B$ est donnée par $d_{ist.}(A,B)$ = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$




- Equation d'un cercle

Un cercle est le lieu des points du plan situés à la même distance $r > 0$ d'un centre $(x_0 , y_0)$ :

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$

# Chapitre 6 : Fonctions exponentielles, fonctions logarithmes

## 6.1. EXPONENTIELLE DE BASE $a$ ( $a \in R_0^+ \setminus \{1\}$ )

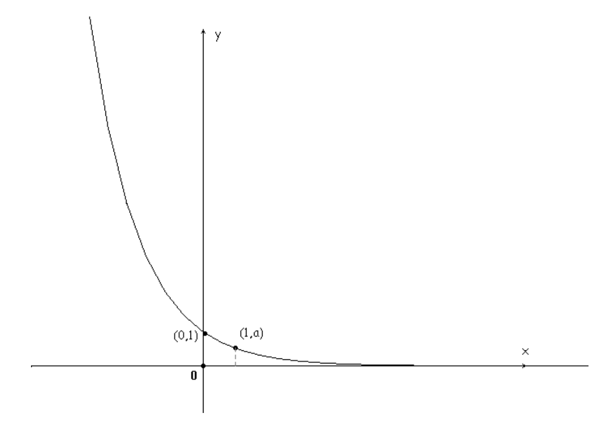
Considérons la fonction exponentielle de base $a$

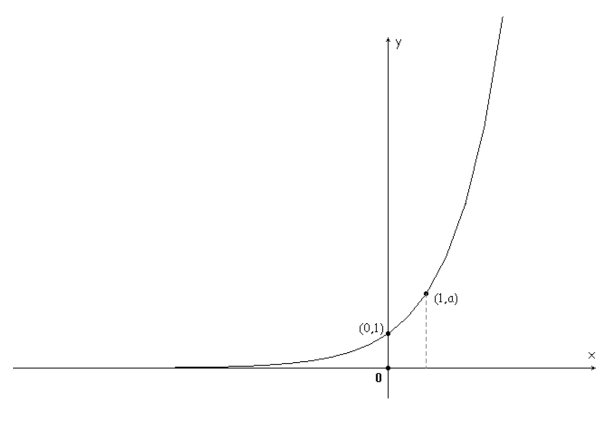
$$f : R \rightarrow R : x \rightarrow y = a^x$$

<u>Graphe de la fonction</u> :

- $\mathrm{Dom}\, f = \boldsymbol{R}$
- Le graphe de $f$ comprend les points de coordonnées $(0,1)$ et $(1, a)$
- Le graphe de $f$ possède une **asymptote** horizontale d'équation $y = 0$

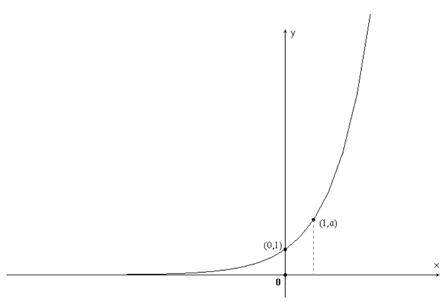
| **si $0 < a < 1$ :** | **si $a > 1$ :** |
|---|---|
| - $f$ est une fonction **décroissante** | - $f$ est une fonction **croissante** |




<u>Un cas particulier</u> : la fonction exponentielle de base $e$ ($e = 2{,}71\ldots$)

$$f : R \rightarrow R : x \rightarrow y = e^x$$



Propriétés (rappel) :

$\forall a \in R_0^+ \setminus \{1\}$ , $\forall x \in R$ , $\forall t \in R$ :

- $a^x . a^t = a^{x+t}$
- $\left(a^x\right)^t = a^{x.t}$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^{\frac{n}{d}} = \sqrt[d]{a^n} = \left(\sqrt[d]{a}\right)^n$

en particulier, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

attention : *ne pas confondre fonction exponentielle et fonction puissance :*

La fonction « exponentielle de base ½ » est définie par $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

La fonction « puissance ½ » est définie par $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$.

# 6.2. LOGARITHME DE BASE $a$ ( $a \in R_0^+ \setminus \{1\}$ )

Définition : Le **logarithme de base $a$ d'un nombre réel positif non nul** est la puissance à laquelle il faut élever $a$ pour obtenir ce nombre.

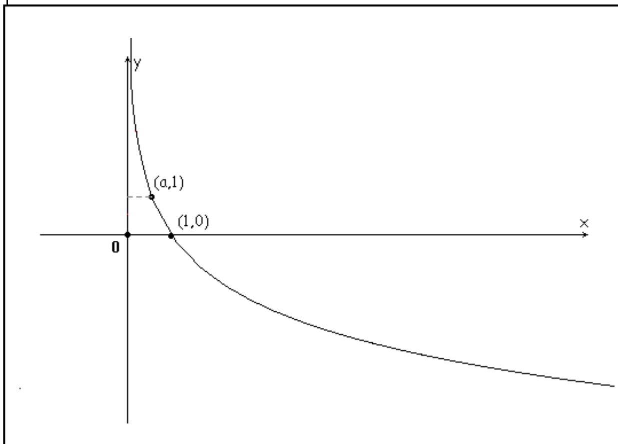
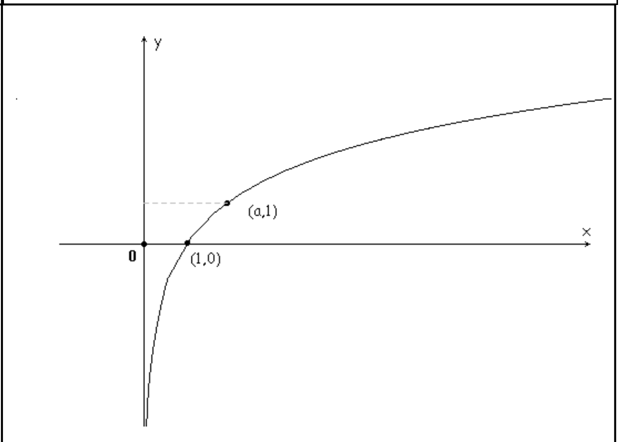
En d'autres termes, si $b > 0$ alors $\boxed{\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b}$

Valeurs particulières : « $\log_a(0)$ » n'est pas défini et ne devrait même pas s'écrire.
Remarquons de plus que $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$, $\log_a(a^r) = r$.

Graphe de la fonction :

Considérons la fonction $f : R_0^+ \to R : x \to y = log_a\, x$

- $\text{Dom} f = R_0^+$
- Le graphe de $f$ possède une **asymptote verticale** d'équation $x = 0$
- Le graphe de $f$ comprend les points de coordonnées $(1,0)$ et $(a,1)$

| **si $0 < a < 1$ :** $f$ est une fonction **décroissante** | **si $a > 1$ :** $f$ est une fonction **croissante.** |
|---|---|
|  |  |





Propriétés :

Si $x, y > 0$,

$$\log_a(x.y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log\left(x^r\right) = r \,.\, \log_a(x)$$

attention : $\log_a(x + y) \neq \log_a(x) \,.\, \log_a(y)$

Utilité : résolution d'équations où la variable est située en exposant.

Exemple $c^X = d$

$\log (c^X) = \log (d)$

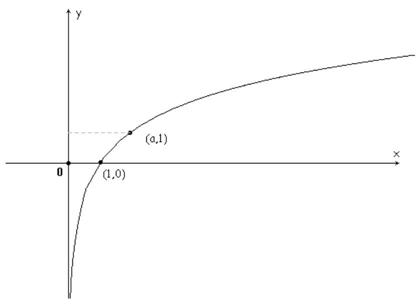
$X \,.\, \log (c) = \log (d)$

$X = \dfrac{\log(d)}{\log(c)}$

Deux cas particuliers :

1. La fonction logarithme de base *e* se note **ln** plutôt que $\log_e$ , et est plus communément appelée fonction **logarithme népérien.**

$$f : R_0^+ \rightarrow R : x \rightarrow y = \ln x$$




2. La fonction **logarithme de base 10** se note $\log_{10}$ ou encore **log** (c'est le log des calculatrices !).

Formule de **changement de base** : $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

En particulier, si $a = 10$ : $\log_b(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(b)}$,

ce qui permet de calculer n'importe quel logarithme avec une calculatrice.

Relation entre les fonctions logarithmes et exponentielles

Les fonctions logarithmes et exponentielles sont des fonctions **réciproques**

$\log_a(a^x) = x$ et $\forall x \in R_0^+ \;:\; a^{\log_a(x)} = x$

$\ln(e^x) = x$ et $\forall x \in R_0^+ \;:\; e^{\ln x} = x$

# 6.3. A propos du nombre $e$…

## 6.3.1. L'intérêt composé

### a) Introduction

- **Notations :**

Soient $C_0$ la valeur de départ d'un capital exprimé en €,

$i$ le taux d'intérêt **annuel**
exprimé sous la forme d'un nombre décimal ou d'une fraction,

$C_n$ la valeur acquise au bout de $n$ années
lorsque les **intérêts** sont **capitalisés par année**.

- **Exemple** :

On place $1000$ € à un intérêt composé de 4 % l'an.
Quelle sera l'évolution de ce capital année par année ?

$C_0 = 1000$ et $i = 0{,}04$

au bout d' 1 an :

$$C_1 = 1000 + 1000.0{,}04$$
$$C_1 = 1000(1 + 0{,}04)$$
$$= 1040 \text{ €}$$

au bout de 2 ans :

$$C_2 = 1040 + 1040.0{,}04$$
$$C_2 = 1040(1 + 0{,}04)$$
$$C_2 = 1000.(1 + 0{,}04)^2$$
$$= 1081{,}6 \text{ €}$$

au bout de 3 ans :

$$C_3 = 1081{,}6 + 1081{,}6.0{,}04$$
$$C_3 = 1081{,}6.(1 + 0{,}04)$$
$$C_3 = 1000.(1 + 0{,}04)^3$$
$$= 1124{,}86 \text{ €}$$

etc. . .

## b) Capitalisation annuelle des intérêts

formule des intérêts composés

lorsque les intérêts sont capitalisés annuellement sur $n$ années :

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

## c) Capitalisation des intérêts par périodes

- **Notations**

$C_0$ est la valeur de départ d'un capital exprimé en €.

$\frac{i}{p}$ est le taux d'intérêt **par période** exprimé sous la forme d'un nombre décimal ou d'une fraction.

$C_{\frac{m}{p}}$ est la valeur acquise au bout de $m$ **périodes** lorsque les **intérêts** sont **capitalisés par période.**

- **Exemple**

Quelle est l'évolution de ce même capital si on garde le même intérêt annuel mais en capitalisant par mois ?

Dans l'exemple à traiter, une période de capitalisation est un mois.
Il y a donc 12 périodes de capitalisation sur une année.
$C_0 = 1000$ et l'intérêt mensuel vaut $\frac{i}{12} = \frac{0,04}{12}$

au bout d' 1 **mois** : $C_{\frac{1}{12}} = 1000 + 1000.\frac{0,04}{12}$

$$C_{\frac{1}{12}} = 1000\left(1+\frac{0,04}{12}\right)$$

$$= 1003,33 \text{ €}$$

au bout de 2 **mois** : $C_{\frac{2}{12}} = 1033{,}33 + 1033{,}33.\frac{0{,}04}{12}$

$$C_{\frac{2}{12}} = 1033{,}33\left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)$$

$$C_{\frac{2}{12}} = 1000\left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^2$$

$$= 1006{,}68 \text{ €}$$

au bout de 3 **mois** : $C_{\frac{3}{12}} = 1066{,}68 + 1066{,}68.\frac{0{,}04}{12}$

$$C_{\frac{3}{12}} = 1066{,}68\left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)$$

$$C_{\frac{3}{12}} = 1000\left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^3$$

$$= 1077{,}38 \text{ €}$$

etc . . .

**formule « mensuelle »** des intérêts composés

lorsque les intérêts sont capitalisés mensuellement sur $m$ mois :

$$C_{\frac{m}{12}} = C_0\left(1 + \frac{i}{12}\right)^m$$

**formule « par période »** des intérêts composés

lorsque les intérêts sont capitalisés par période sur $m$ périodes

(une année est constituée de $p$ périodes) :

$$C_{\frac{m}{p}} = C_0\left(1 + \frac{i}{p}\right)^m$$

Si on veut exprimer cette formule en années, on pose $\frac{m}{p} = n$

**formule « annuelle »** des intérêts composés

lorsque les intérêts sont capitalisés par période sur $n$ années

( une année est constituée de $p$ périodes ) :

$$C_n = C_0\left(1+\frac{i}{p}\right)^{p.n}$$

## 6.3.2. Le nombre e

### a) Introduction

On connaît $C_n = C_0\left(1+\frac{i}{p}\right)^{p.n}$ la formule « annuelle » des intérêts composés lorsque les intérêts sont capitalisés par période sur $n$ années (une année est constituée de $p$ périodes),

où $C_0$ est la valeur de départ d'un capital

$\frac{i}{p}$ est le taux d'intérêt **par période**

$C_n$ est la valeur acquise au bout de $n$ **années**
lorsque les intérêts sont capitalisés au bout d' **une période**.

Que deviendrait un capital $C_0 = 1$ placé à un intérêt annuel $i = 1$ pendant une année
si on capitalise sur des périodes de plus en plus courtes ?
Effectuer les calculs pour $p = 10$, $p = 100$ , . . . . $p = 10000000$

formule $C_1 = \left(1+\frac{1}{p}\right)^{p}$

pour $p = 10$ , $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}59374246$

pour $p = 100$ , $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}70481383$

pour $p = 1000$ , $\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2{,}71692393$

pour $p = 10000$ , $\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2{,}71814593$

pour $p = 100000$ , $\left(1+\frac{1}{100000}\right)^{100000} = 2{,}71826824$

pour $p = 1000000$ , $\left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 2{,}71828047$

pour $p = 10000000$ , $\left(1+\frac{1}{10000000}\right)^{10000000} = 2{,}71828169$

Cette suite numérique converge vers un nombre irrationnel noté $e$ : $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p} = e$

$$e \approx 2{,}71...$$

# Chapitre 7 : Technique de dérivation de fonctions d'une variable

notation : on note $f'(x)$ la fonction dérivée de la fonction d'une seule variable $x$ notée $f : R \to R : x \to f(x)$

Pour les fonctions d'une seule variable , on peut simplifier les notations en notant $f'$ la dérivée de la fonction $f$ .

## fonction d'une variable : formules générales de dérivation

- Dérivée d'une fonction constante $f(x) = c$ : $(c)' = 0$
- Dérivée de la fonction identité $f(x) = x$ : $(x)' = 1$
- Dérivée d'une somme de fonctions : $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- Dérivée d'un produit de fonctions : $(f . g)' = f' . g + f . g'$

  **cas particulier :** $(c . g)' = c . g'$
- Dérivée d'une puissance d'une fonction : $(f^n)' = n . f^{n-1} . f'$
- Dérivée d'un quotient de fonctions : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'.g - f.g'}{g^2}$

  **cas particulier :** $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$
- Dérivée du logarithme d'une fonction : $(\log_a f)' = \dfrac{f'}{f} . \dfrac{1}{\ln a}$

  **cas particulier :** $(\ln f)' = \dfrac{f'}{f}$
- Dérivée de l'exponentielle d'une fonction : $(a^f)' = a^f . f' . \ln a$

  **cas particulier :** $(e^f)' = e^f . f'$
- Dérivée du sinus d'une fonction : $(\sin f)' = \cos f . f'$
- Dérivée du cosinus d'une fonction : $(\cos f)' = - \sin f . f'$

Bases Mathématiques
pour l'économie et la gestion

Pré-requis

# Exercices-tests et corrigés

# Chapitre 1 : Calcul dans les réels

## Exercices

- **Calculer les expressions suivantes pour** $x = \frac{-2}{3}$

  **Donner la réponse sous la forme d'une fraction simplifiée .**

1. $2.x^2 + 4 =$
2. $(2.x)^2 + 4 =$
3. $\frac{(2.x+4)^2}{3} =$
4. $2.\left(\frac{x+4}{3}\right)^2 =$

- **Calculer les expressions suivantes pour** $a = \frac{-3}{2}$ **,** $b = \frac{-2}{3}$ **,** $c = \frac{10}{9}$ **.**

  **Donner la réponse sous la forme d'une fraction simplifiée.**

5. $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} =$

- **Ecrire une expression équivalente ne faisant plus intervenir le symbole** $|...|$ **.**

6. $|3 - x|$ si $x < 3$
7. $|a - b|$ si $a < b$
8. $|-5 - c^2|$

- **Calculer**

9. $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{9^{49}}}\right)^{\frac{1}{7}}$
10. $\frac{125^{\frac{2}{3}}.25^{\frac{3}{2}}}{5^2}$
11. $\frac{5^3}{4} + \frac{10}{5}$

- **Que vaut $x$ ?**

12. $\frac{1}{2^3} = 2^x$

13. $\frac{1}{\sqrt[5]{3^4}} = 3^x$

14. $\sqrt[3]{2^2}.2^5 = 2^x$

- **Simplifier**

15. $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{a^2}}.\frac{1}{a^{\frac{-5}{2}}}$ avec $a > 0$

16. $\frac{125^{\frac{2}{3}}.\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}{75}$

- **Simplifier**

17. $\sqrt{x^2}$ si $x < 0$

18. $\sqrt{a^2.b^2}$ $\forall a, b \in R$

19. $\sqrt{a^2 - 2.a.b + b^2}$

20. $\sqrt{a^2 + b^2}$

- **Simplifier**

21. $\left(a^{-1} + b^{-1}\right)^{-1}$

22. $\left(a^3\right)^2$

23. $a^{\left(3^2\right)}$

- **Simplifier**

24. $\sqrt[3]{a}.\sqrt{a}$

25. $\sqrt{\sqrt[3]{6}}$

26. $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

- **Sur base des identités remarquables, développer les produits suivants**

27. $\left(-a^2-\sqrt{7}.b\right).\left(a^2-\sqrt{7}.b\right)$

28. $\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right).\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}.y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)$

29. $(t-3.s)^3$

- **Sur base des identités remarquables, factoriser les polynômes suivants**

30. $-4.x^4.y^2+81.z^6$

31. $a^6-b^6$

32. $24.x-16-9.x^2$

- **Simplifier jusqu'à obtenir une fraction irréductible**

33. $\dfrac{5.x^2+12.x+4}{x^2-16}.\dfrac{x^2-4.x}{25.x^2+20.x+4}$

34. $\dfrac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

35. $\dfrac{\left(x^2-1\right)^4.(2.x)-x^2.(4).\left(x^2-1\right)^3.(2.x)}{\left(x^2-1\right)^8}$

36. $\dfrac{\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{3}}.(3).(3.x).\left(\frac{1}{3}\right).\left(x^2+4\right)^{-\frac{2}{3}}.(2.x)}{\left(\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2}$

- **Transformer jusqu'à écrire le dénominateur sans racine**

37. $\dfrac{\sqrt{5}+6}{6-\sqrt{5}}$

- **Calculer les sommes suivantes**

38. $\sum_{i=2}^{5} i$
39. $\sum_{n=0}^{3} 2^{n}$
40. $\sum_{j=1}^{6} 4.(j-1)$

- **Utiliser le symbole de sommation $\sum$ pour réécrire les sommes suivantes :**

41. $1+3+5+7+9$
42. $12+16+20+24+28+32$
43. $\frac{1}{4}+\frac{2}{9}+\frac{3}{14}+\frac{4}{19}+\frac{5}{24}+\frac{6}{29}$

# Réponses aux exercices (Ch. 1)

- **Calculer les expressions suivantes pour** $x=\frac{-2}{3}$

  **Donner la réponse sous la forme d'une fraction simplifiée.**

1. $\frac{44}{9}$
2. $\frac{52}{9}$
3. $\frac{64}{27}$
4. $\frac{200}{81}$

- **Calculer les expressions suivantes pour** $a=\frac{-3}{2}$, $b=\frac{-2}{3}$, $c=\frac{10}{9}$.

  **Donner la réponse sous la forme d'une fraction simplifiée.**

5. $\frac{-10}{9}$

- **Ecrire une expression équivalente ne faisant plus intervenir le symbole $|...|$ .**

6. $3-x$
7. $b-a$
8. $5+c^2$

- **Calculer**

9. $\frac{1}{9}$
10. $125$
11. $\frac{133}{4}$

- **Que vaut $x$ ?**

12. $x=-3$
13. $x=\frac{-4}{5}$
14. $x=\frac{17}{3}$

- **Simplifier**

15. $\sqrt[3]{a^7}=a^{\frac{7}{3}}$
16. $\frac{25}{3}$

- **Simplifier**

17. $-x$
18. $|a.b|$
19. $|a-b|$
20. non simplifiable

- **Simplifier**

21. $\frac{a.b}{a+b}$
22. $a^6$
23. $a^9$

- **Simplifier**

24. $a^{\frac{5}{6}}$
25. $\sqrt[6]{6}$
26. $2$

- **Sur base des identités remarquables , développer les produits suivants**

27. $7.b^2 - a^4$
28. $x - y$
29. $t^3 - 9.t^2.s + 27.t.s^2 - 27.s^3$

- **Sur base des identités remarquables , factoriser les polynômes suivants**

30. $\left(9.z^3 - 2.x^2.y\right)\left(9.z^3 + 2.x^2.y\right)$
31. $(a-b).\left(a^2 + a.b + b^2\right).(a+b).\left(a^2 - a.b + b^2\right)$
32. $-(3.x-4)^2$

- **Simplifier jusqu'à obtenir une fraction irréductible**

33. $\dfrac{x.(x+2)}{(x+4).(5.x+2)}$
34. $b + a$
35. $\dfrac{-2.x.\left(3.x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^5}$
36. $.\dfrac{6.x^2}{x^2+4}$

- **Transformer jusqu'à écrire le dénominateur sans racine**

37. $\dfrac{41+12.\sqrt{5}}{31}$

- **Calculer les sommes suivantes**

38. 14
39. 15
40. 60

- **Utiliser le symbole de sommation $\sum$ pour réécrire les sommes suivantes :**

41. $\sum_{i=0}^{4}(2.i+1)$ ou $\sum_{i=1}^{5}(2.i-1)$
42. $\sum_{i=3}^{8} 4.i$
43. $\sum_{i=1}^{6}\left(\dfrac{i}{5.i-1}\right)$

# Chapitre 2 : Equations

## Exercices

- **Résoudre dans R les équations suivantes**

1. $\frac{3.x}{x-2} = 1 + \frac{6}{x-2}$

2. $6.(2.y+3) - 3.(y-5) = 0$

3. $\frac{5.x+2}{10.x-3} = \frac{x-8}{2.x+3}$

4. $\frac{3}{2.x+5} + \frac{4}{2.x-5} = \frac{14.x+3}{4.x^2-25}$

5. $4.x^2 + x = 14$

6. $25.x^2 = 9$

7. $x^2 = 3 + 6.x$

8. $7.x^2 = -2.x$

9. $\frac{x+1}{3.x+2} = \frac{x-2}{2.x-3}$

10. $x^{\frac{4}{3}} = 2.x$

11. $\sqrt{7-x} = x - 5$

12. $x^4 - 25.x^2 - 150 = 0$

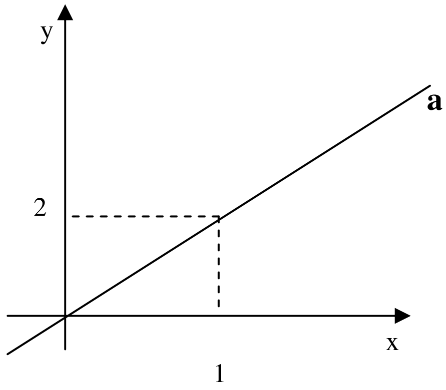
13. $4^{(x-2)} = 5$

14. $\ln(x-1) + \ln(x+1) = 1$

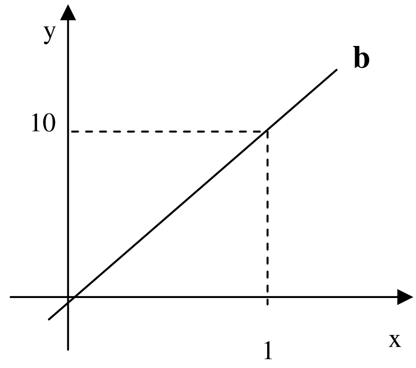
15. $2.\log(2.x-5) = 1$

- **Trouvez l'équation de chacune des droites suivantes :**

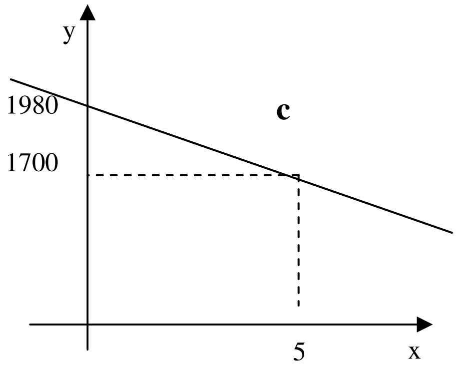
16.



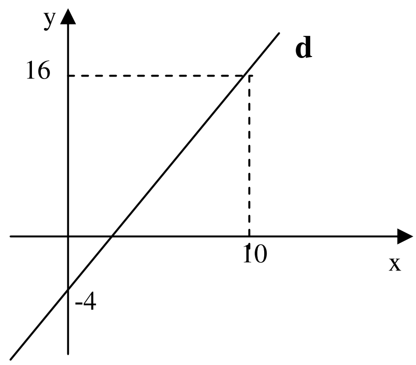

17.




18.




19.




- **Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des équations linéaires à 2 variables $x, y$ :**

20. $d \equiv 2.x + y - 2 = 0$

21. $d \equiv x + 2.y - 2 = 0$

22. $d \equiv x - 2.y - 2 = 0$

23. $d \equiv -x + 2.y - 2 = 0$

24. $d \equiv y - 1 = 0$

- **Représenter dans $R^2$ les solutions des équations suivantes**

25. $2.x + y + 4 = 0$

26. $2.x - 10 = 0$

27. $y + 3 = 0$

28. $2.x - y = 0$

- **Représenter dans $R^2$ les solutions des équations suivantes**

29. $y = x^2 - 4.x - 5$

30. $x^2 + y = 0$

31. $x^2 + y^2 = 9$

32. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$

- **Représenter dans $R^3$ les solutions des équations suivantes**

33. $6.x + 3.y + 2.z - 6 = 0$
34. $2x + 3.y - 6 = 0$
35. $3x + z - 3 = 0$
36. $y + z - 2 = 0$
37. $y - 4 = 0$

- **Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des équations linéaires à 3 variables $x, y, z$ :**

38. $2.x + y + z - 2 = 0$
39. $z + y - 3 = 0$
40. $y - 5 = 0$
41. $z = 0$
42. $2.x + 3.y = 6$

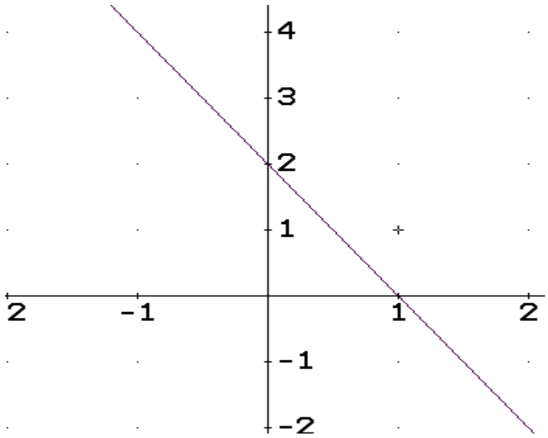
# réponses aux exercices (Ch. 2)

- **Résoudre dans R**

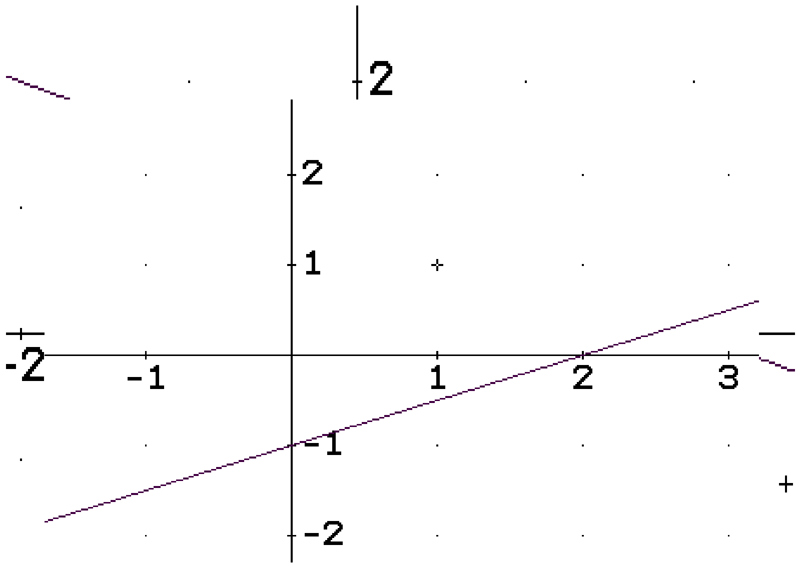
1. $Sol = \phi$ **attention** : ne pas oublier la condition d'existence $x - 2 \neq 0$
2. $Sol = \left\{ \frac{-11}{3} \right\}$
3. $Sol = \left\{ \frac{3}{17} \right\}$
4. $Sol = \phi$
5. $Sol = \left\{ \frac{7}{4}, -2 \right\}$
6. $Sol = \left\{ \frac{3}{5}, \frac{-3}{5} \right\}$
7. $Sol = \left\{ 3 + 2\sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3} \right\}$
8. $Sol = \left\{ 0, \frac{-2}{7} \right\}$
9. $Sol = \left\{ \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \right\}$
10. $Sol = \{8, 0\}$
11. $Sol = \{6\}$ **attention** : ne pas oublier les conditions d'existence $7 - x \geq 0$ et $x - 5 \geq 0$
12. $Sol = \left\{ \sqrt{30}, -\sqrt{30} \right\}$
13. $Sol = \left\{ \frac{\ln 5}{\ln 4} + 2 \right\}$
14. $Sol = \left\{ \sqrt{e + 1} \right\}$ **attention** : ne pas oublier les conditions d'existence $x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$
15. $Sol = \left\{ \frac{5 + \sqrt{10}}{2} \right\}$ **attention** : ne pas oublier la condition d'existence $2.x - 5 > 0$
16. $d \equiv y = 2.x$
17. $d \equiv y = 10.x$
18. $d \equiv y = -56.x + 1980$

19. $d \equiv y = 2.x - 4$

20.

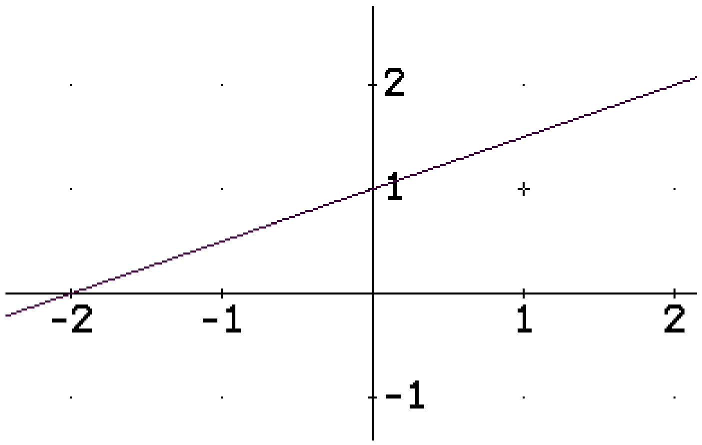



21.

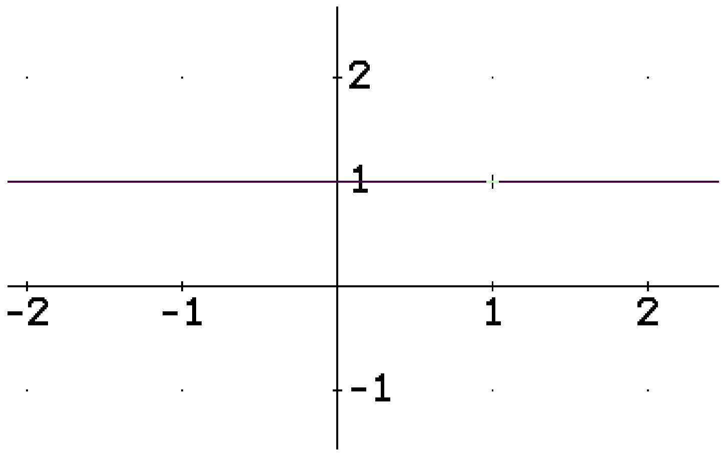



22.

23.

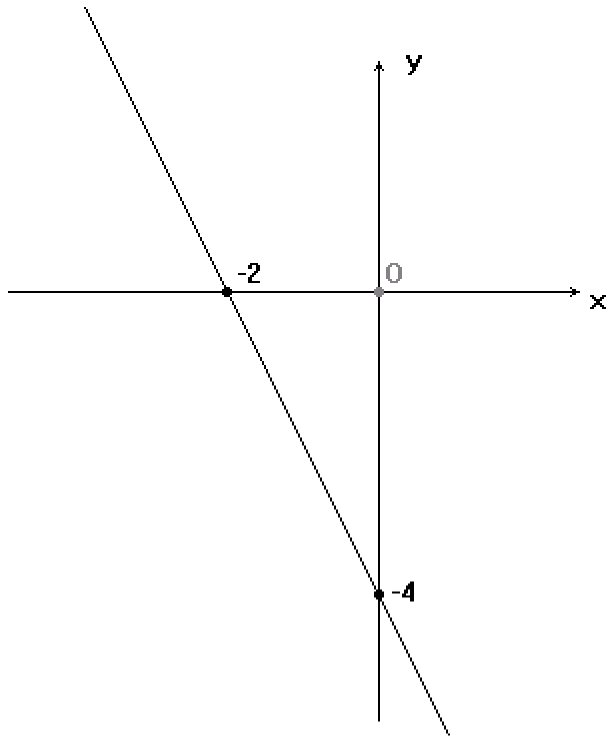



24.

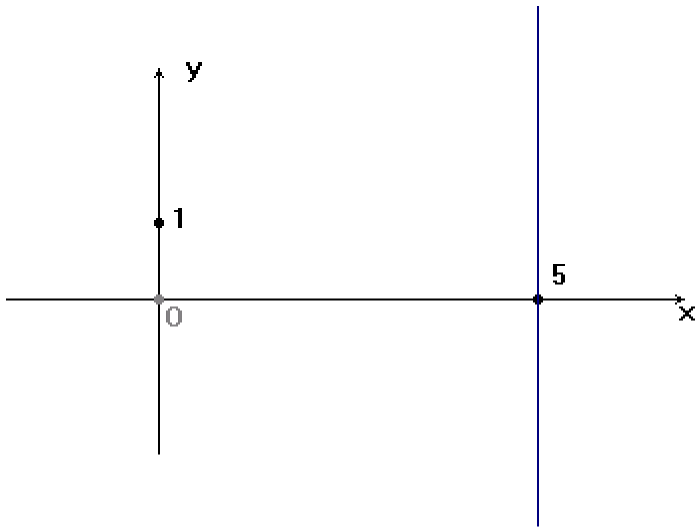


- **Représenter dans $R^2$ les solutions**

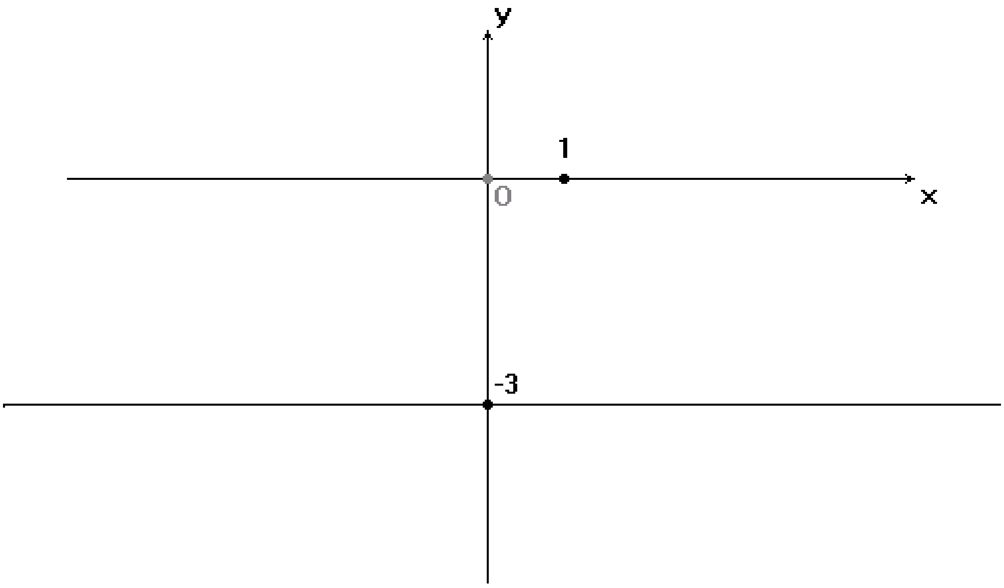
25. La représentation graphique des solutions est une droite du plan



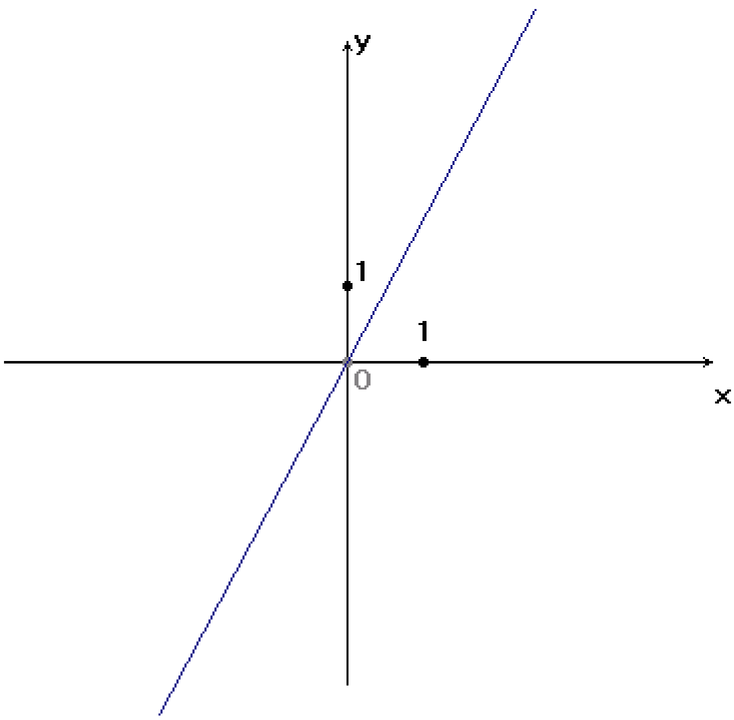

26. La représentation graphique des solutions est une droite du plan parallèle à l'axe $y$



27. La représentation graphique des solutions est une droite du plan parallèle à l'axe $x$

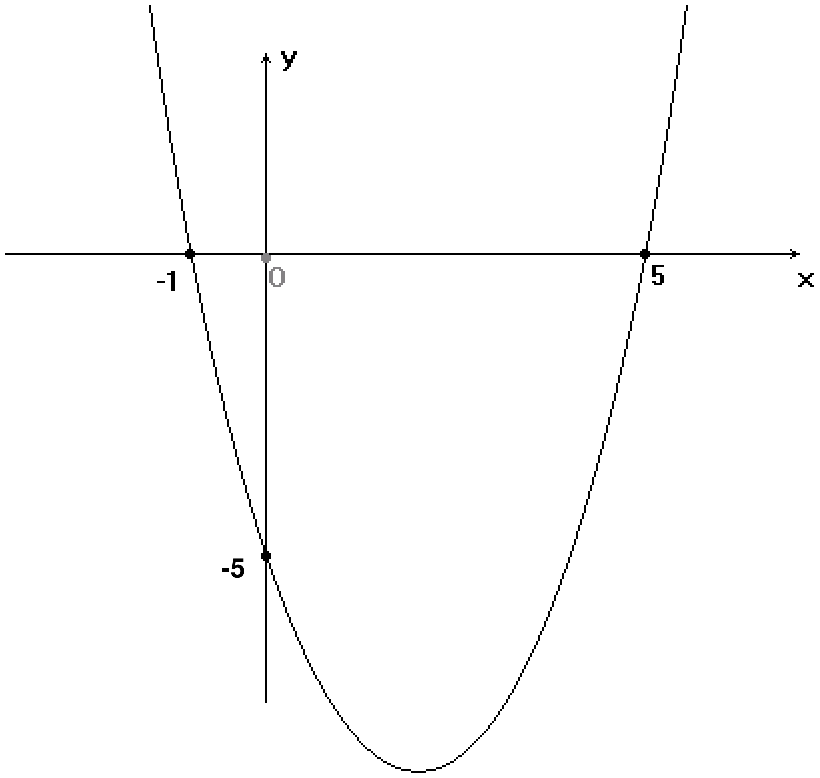



28. La représentation graphique des solutions est une droite du plan comprenant l'origine

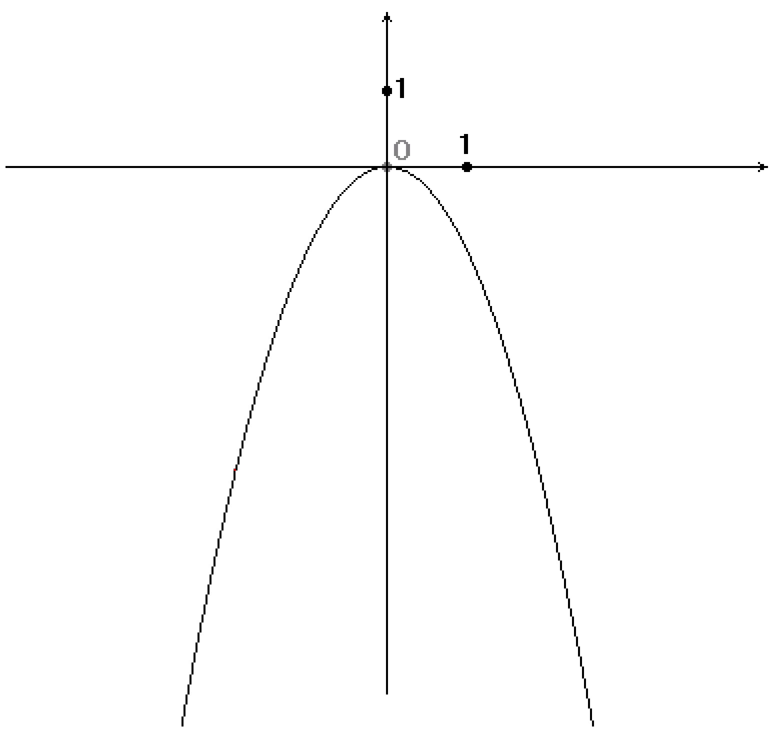


- **Représenter dans $R^2$ les solutions**

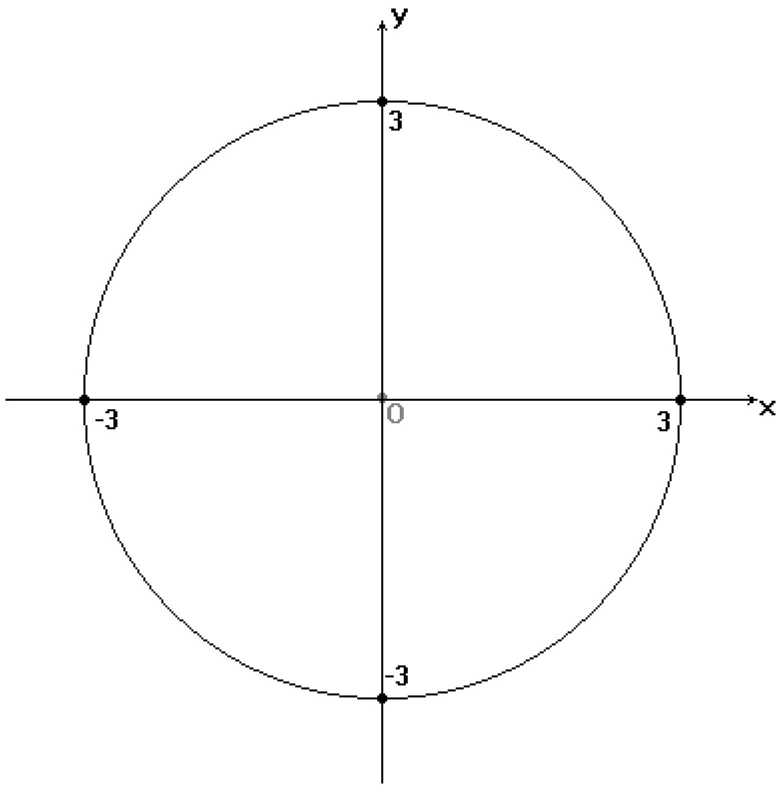
29. La représentation graphique des solutions est une parabole (concavité vers le haut)



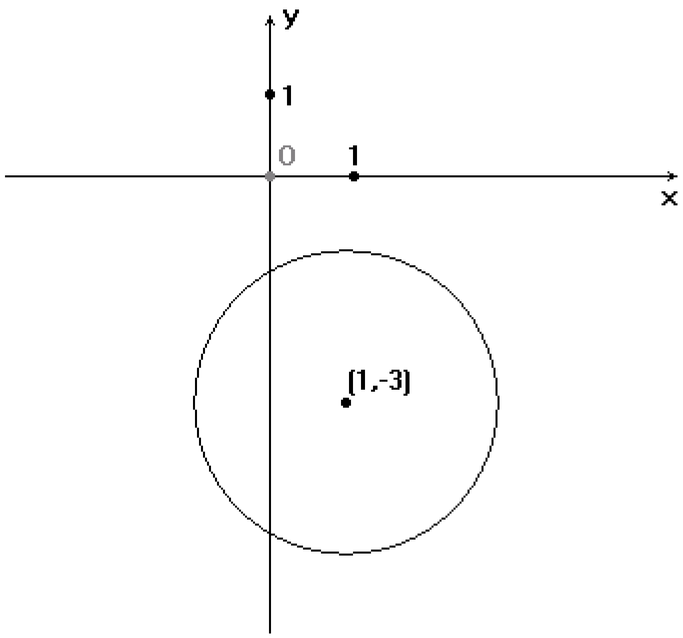

30. La représentation graphique des solutions est une parabole ( concavité vers le bas )



31. La représentation graphique des solutions est un cercle ce centre O et de rayon 3

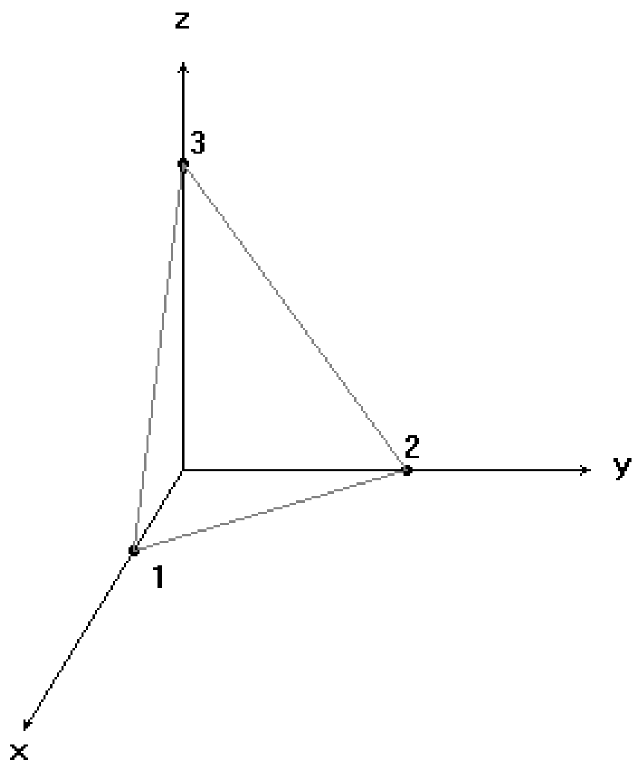



32. La représentation graphique des solutions est un cercle de centre $(1,-3))$ et de rayon 2

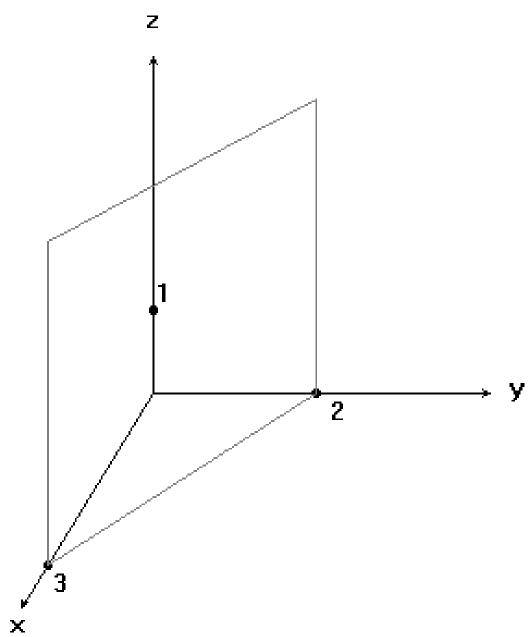


- **Représenter dans $R^3$ les solutions des équations suivantes**

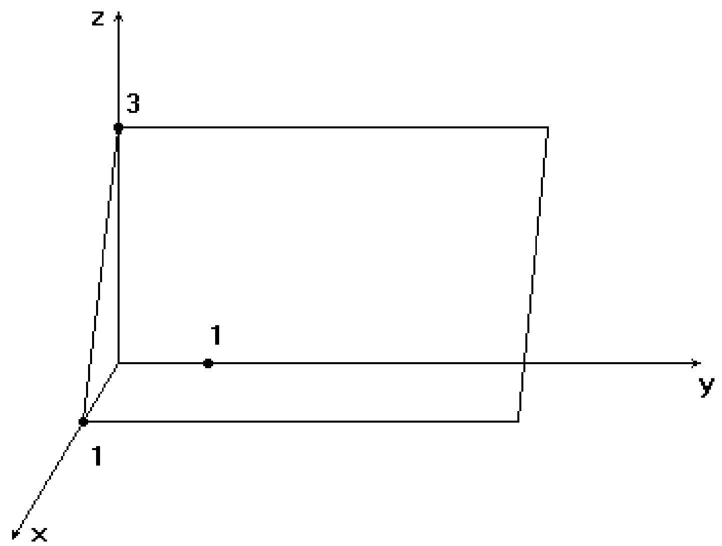
33. La représentation graphique des solutions est un plan de l'espace



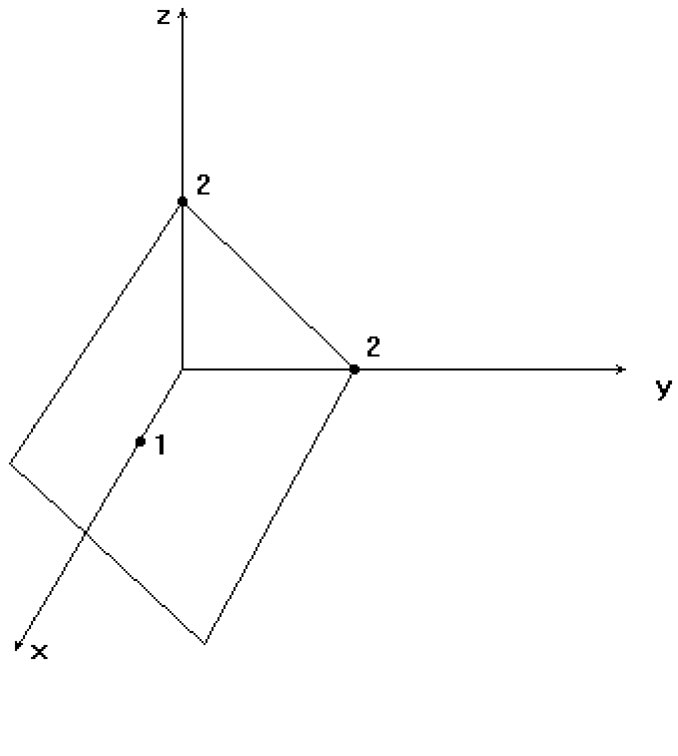

34. La représentation graphique des solutions est un plan parallèle à l'axe des $z$



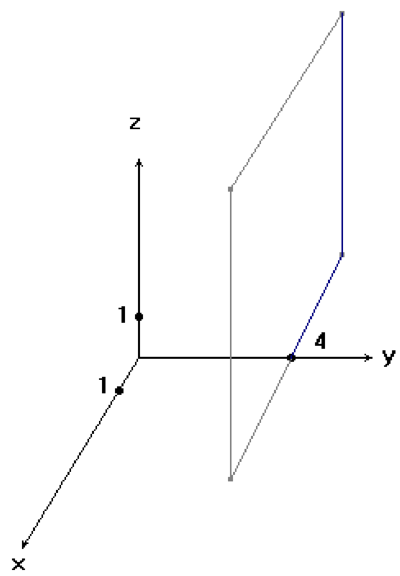
35. La représentation graphique des solutions est un plan parallèle à l'axe des $y$



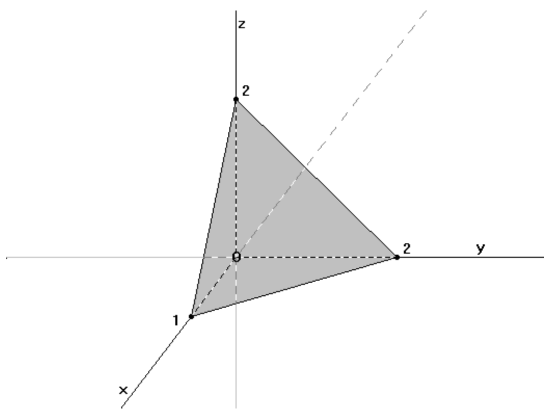

36. La représentation graphique des solutions est un plan parallèle à l'axe des $x$



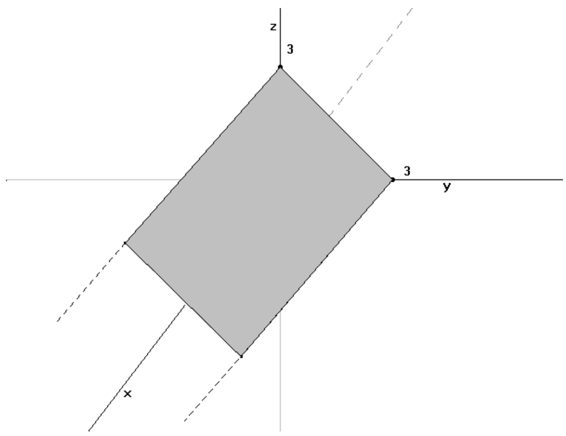
39. La représentation graphique des solutions est un plan parallèle au plan des $xz$



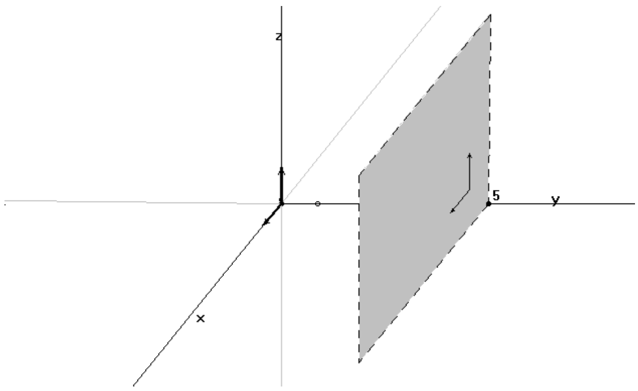

40. $2.x + y + z - 2 = 0$



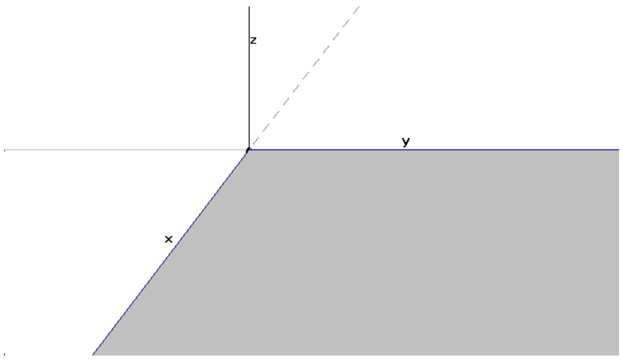

41. $z + y - 3 = 0$



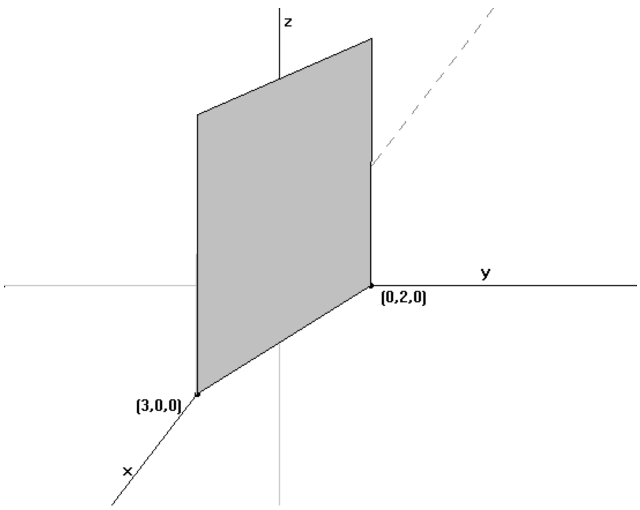
42. $y-5=0$




43. $z=0$




44. $2.x+3.y=6$



# Chapitre 3 : Inéquations

## Exercices

- **Résoudre dans R les inéquations suivantes**

1. $-5.x-2<x+4$
2. $-5 \leq \dfrac{4-3.x}{2}<1$
3. $(7-9.x).(4.x-2) \geq 0$
4. $\dfrac{x-2}{x+1}>0$

- **Résoudre dans R les inéquations suivantes**

5. $6.x-8>x^2$
6. $x^2-6.x+9 \leq 0$
7. $x^2>1$
8. $-x^2>x$
9. $(4-9.x^2).(3.x-1)>0$
10. $\dfrac{x-1}{2.x}<\dfrac{1}{x+2}$

- **Représenter dans $R^2$ les solutions des inéquations suivantes**

11. $2.x+y+4>0$
12. $-\dfrac{1}{4}.x+\dfrac{1}{2}.y-1 \leq 0$
13. $2.x-10 \geq 0$
14. $y+3<0$
15. $x-\dfrac{1}{2}.y>0$

# réponses aux exercices (Ch. 3)

- **Résoudre dans R les inéquations**

1. $Sol = ]-1,+\infty[$ **ou** $Sol = \{x \in R \mid x > -1\}$

2. $Sol = \left]\frac{2}{3},\frac{14}{3}\right]$ **ou** $Sol = \left\{x \in R \mid \frac{2}{3} < x \leq \frac{14}{3}\right\}$

3. $Sol = \left[\frac{1}{2},\frac{7}{9}\right]$ **ou** $Sol = \left\{x \in R \mid \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{9}\right\}$

4. $Sol = ]-\infty,-1[ \cup ]2,+\infty[$

- **Résoudre dans R les inéquations**

5. $Sol = ]2,4[$ **ou** $Sol = \{x \in R \mid 2 < x < 4\}$

6. $Sol = \{3\}$

7. $Sol = ]-\infty,-1[ \cup ]1,+\infty[$ **ou** $Sol = \{x \in R \mid -\infty \leq x < -1.ou.1 < x \leq +\infty\}$

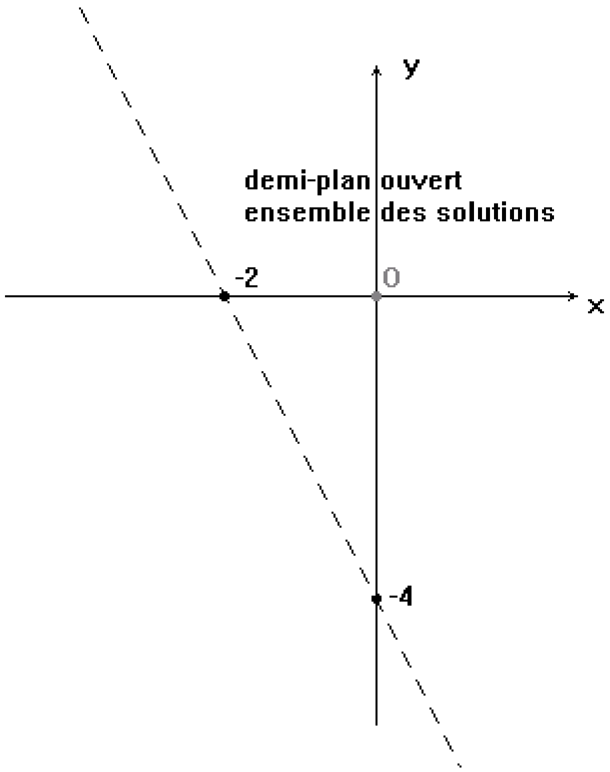
8. $Sol = ]0,1[$

9. $Sol = \left]-\infty,\frac{-2}{3}\right[ \cup \left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[$

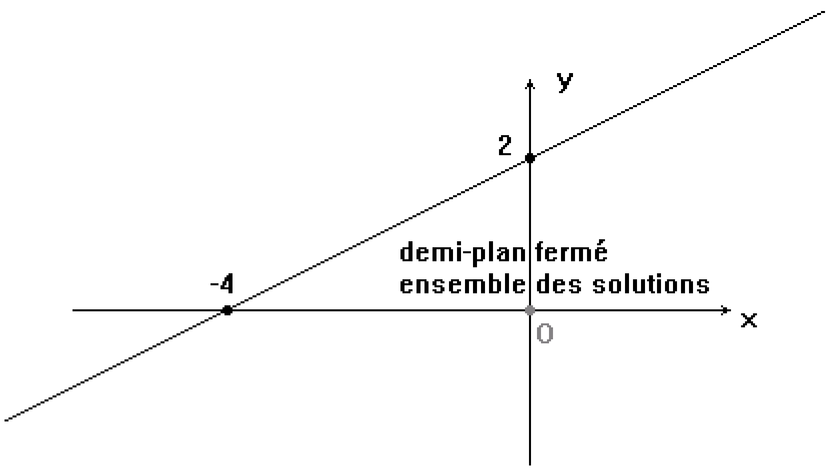
10. $Sol = ]-2,-1[ \cup ]0,2[$

- **Représenter dans $R^2$ les solutions**

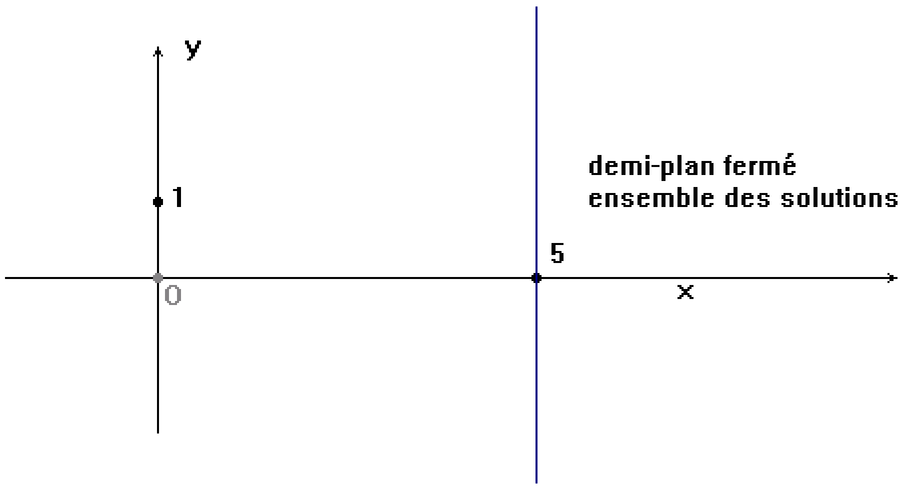
11. $S = \{(x, y) \mid 2x + y + 4 > 0\}$



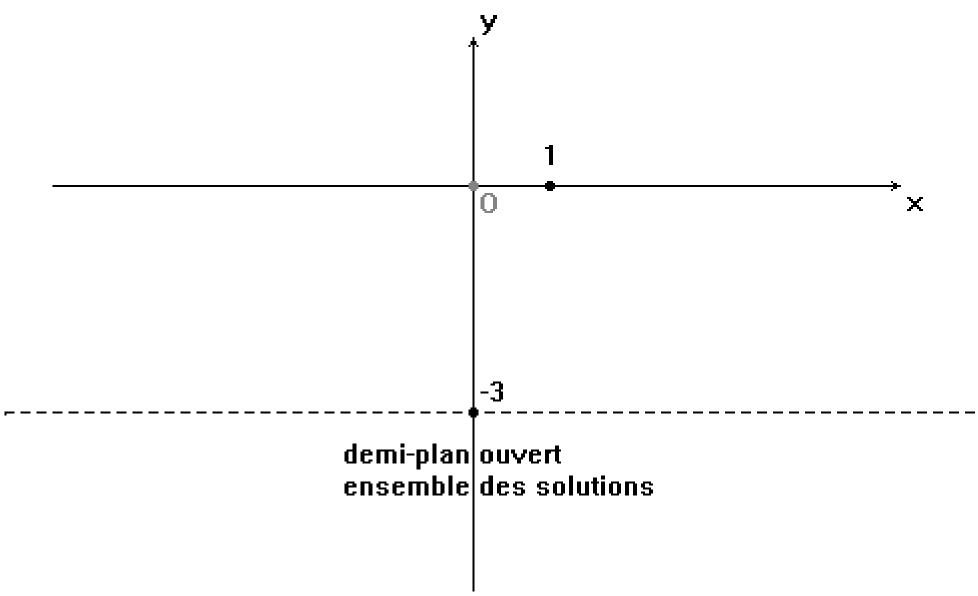

12. $S = \left\{(x, y) \mid -\frac{1}{4}.x + \frac{1}{2}.y - 1 \leq 0\right\}$



13. $S = \{(x, y) \mid 2.x - 10 \geq 0\}$




14. $S = \{(x, y) \mid y + 3 < 0\}$




15. $S = \left\{(x, y) \mid x - \frac{1}{2}.y > 0\right\}$

# Chapitre 4 :

# Systèmes d'(in)équations du premier degré à deux variables

## exercices

### a) Systèmes d'équations du 1er degré à 2 variables

**Exercice 1 :** résoudre le système

**a)** $\begin{cases} 3.x + 2.y = 6 \\ 2.x + 3.y = 3 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} 5.x - 2.y = 10 \\ 4.x + 10.y - 20 = 0 \end{cases}$

### b) Systèmes d'inéquations du 1er degré à 2 variables

**Exercice 2 :** résoudre le système

**a)** $\begin{cases} 4.x + 5.y \leq 20 \\ x \leq 3 \end{cases}$

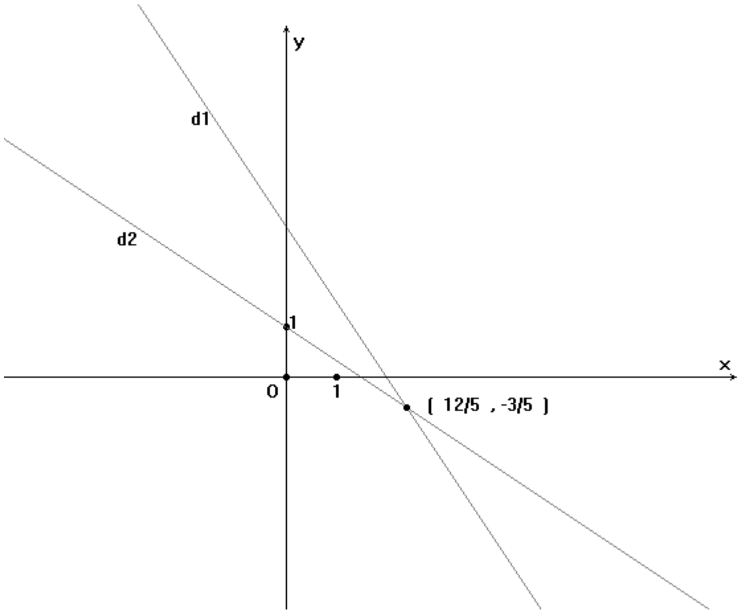
**b)** $\begin{cases} y - x \leq 0 \\ 2.y + 3.x \leq 15 \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} y - x \leq 0 \\ 2.y + 3.x \leq 15 \\ y = 2 \end{cases}$

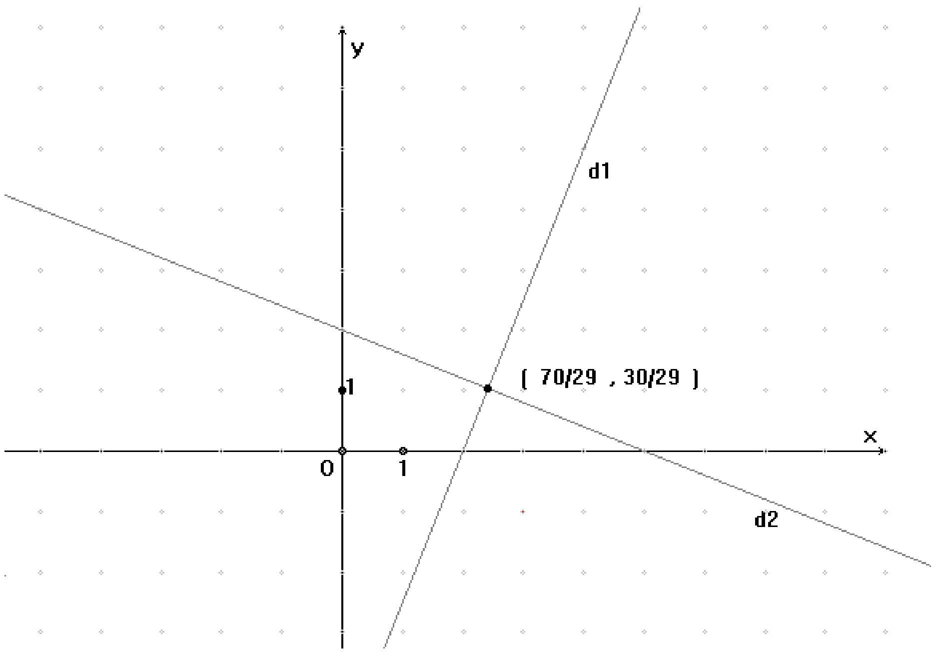
# réponses aux exercices (Ch. 4)

**Exercice 1** :

**a)** $S = \left\{ \left( \frac{12}{5}, \frac{-3}{5} \right) \right\}$

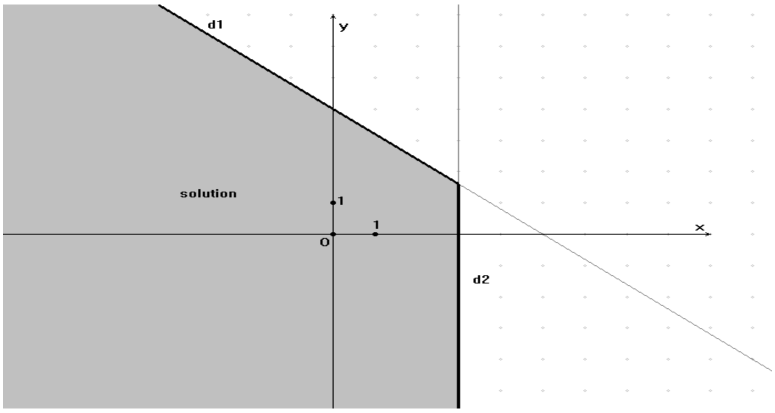



**b)** $S = \left\{ \left( \frac{70}{29}, \frac{30}{29} \right) \right\}$

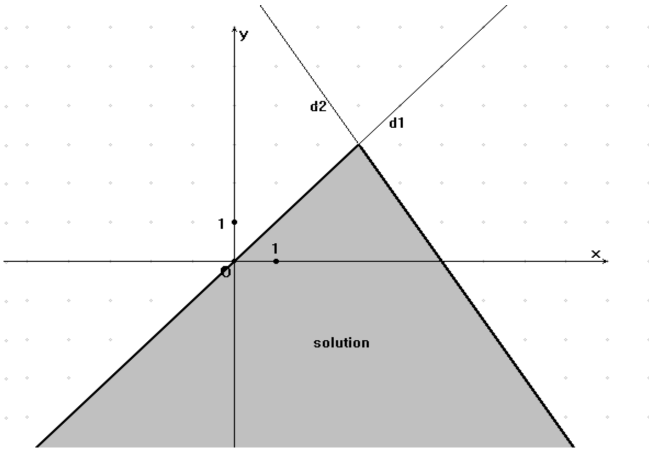


**Exercice 2 :**

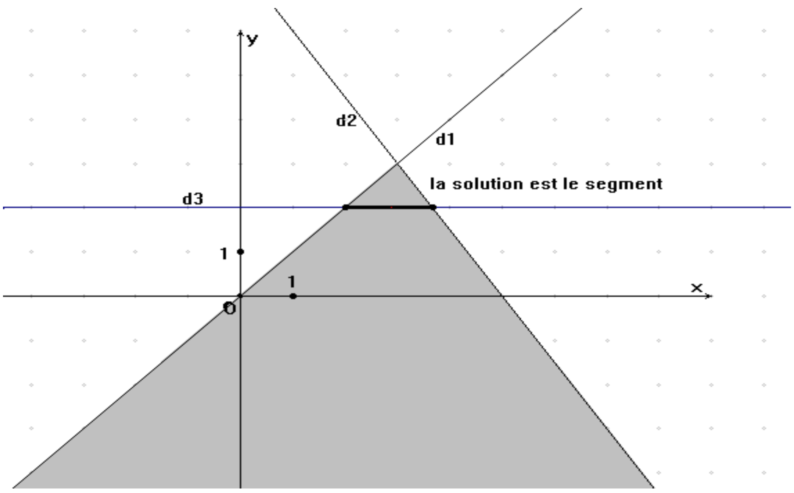
**a)**




**b)**




**c)**



# Chapitre 6 : Fonctions exponentielles, fonctions logarithmes

## exercices

1. Calculer les logarithmes suivants en utilisant les propriétés des logarithmes.

a) $\log_2 8 =$
b) $\log_5 125 =$
c) $\log_4 2 =$
d) $\log_{\frac{1}{2}} 4 =$
e) $\log_3 \frac{1}{9} =$
f) $\log_4 8 =$
g) $\log_2 \frac{1}{2} =$
h) $\log_2 \sqrt[3]{2} =$
i) $\log \ 0{,}001 =$

2. Comment écrire les logarithmes en base $4$ lorsqu'on connaît les logarithmes en base $2$ ?

3. Utiliser la calculatrice pour calculer $\log_2 29$ .

4. Utiliser la calculatrice pour calculer

a) $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$
b) $\frac{\ln 4}{3}$
c) $\ln\left(4^3\right)$
d) $(\ln 3)^4$
e) $\frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$

5. Résoudre dans $R$ l'équation $2^{x-1} = 4^{2.x+3}$

6. Résoudre dans $R$ l'équation $2^{x-1} = 7^{2.x+3}$

# réponses aux exercices (Ch. 6)

1. a) $\log_2 8 = 3$ b) $\log_5 125 = 3$ c) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ d) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$

e) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ f) $\log_4 8 = \frac{3}{2}$ g) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$ h) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$

i) $\log 0{,}001 = -3$

2. $\log_4 x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = \dfrac{1}{2}.\log_2 x$

3. $\log_2 29 = \dfrac{\log 29}{\log 2} \approx 4{,}85798099...$

4. a) $\approx 0{,}28768...$

b) $\approx 0{,}46209...$

c) $\approx 4{,}15888...$

d) $\approx 1{,}45672...$

e) $\approx -0{,}79248...$

5. Résoudre dans $R$ l'équation $2^{x-1} = 4^{2.x+3}$

$$2^{x-1} = \left(2^2\right)^{2.x+3}$$
$$2^{x-1} = 2^{4.x+6}$$
$$x - 1 = 4.x + 6$$
$$x = -\frac{7}{3}$$

6. Résoudre dans $R$ l'équation $2^{x-1} = 7^{2.x+3}$

$$\log\left(2^{x-1}\right) = \log\left(7^{2.x+3}\right)$$
$$(x-1).\log 2 = (2.x+3).\log 7$$
$$x.\log 2 - \log 2 = 2.x.\log 7 + 3.\log 7$$
$$x.\log 2 - 2.x.\log 7 = \log 2 + 3.\log 7$$
$$\left(\log 2 - 2.\log 7\right).x = \log 2 + 3.\log 7$$
$$x = \frac{\log 2 + 3.\log 7}{\log 2 - 2.\log 7} = \frac{\log\left(2.7^3\right)}{\log\left(\frac{2}{7^2}\right)} = \frac{\log 686}{\log\left(\frac{2}{49}\right)} \approx -2{,}04...$$

# Chapitre 7 : Technique de dérivation des fonctions d'une variable

## exercices

**Exercice 1** : Dériver

**a)** $f(x) = (6\,x^2 - 81)^5$

**b)** $f(x) = \cos^2(3x)$

**c)** $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

**d)** $f(x) = e^{(2x-1)}$

**Exercice 2** : Calculer la dérivée de la fonction $f$ dans les cas suivants

1. $f(x) = 3\,x^2 + \sqrt{x}$
2. $f(x) = \dfrac{2.x^2 + 3.x}{1 + 2.x}$
3. $f(x) = x^2 \,.\, \ln(x)$
4. $f(x) = \ln(3x)$
5. $f(x) = \ln^3(x)$
6. $f(x) = \ln(x^3)$
7. $f(x) = \ln(x.\sqrt{x^2+1})$
8. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$
9. $f(x) = \left(\sqrt{x^3 + 2.x}\right)^3$
10. $f(x) = x^3 \,.\, \sqrt{x}$

# réponses aux exercices (Ch. 7)

**Exercice 1 :**

**a)** $f'(x) = 60 \,.\, x \,.\, (6\,x^2 - 81)^4$

**b)** $f'(x) = -6 \,.\, \cos(3x) \,.\, \sin(3x)$

**c)** $f'(x) = \dfrac{2\,.\,x}{x^2 - 1}$

**d)** $f'(x) = 2 \,.\, \mathrm{e}^{(2x-1)}$

**Exercice 2 :**

1. $f'(x) = 6\,x + \dfrac{1}{2.\sqrt{x}}$
2. $f'(x) = \dfrac{4.x^2 + 4.x + 3}{(1 + 2.x)^2}$
3. $f'(x) = x \,.\, (2.\ln(x) + 1)$
4. $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
5. $f'(x) = \dfrac{3.\ln^2(x)}{x}$
6. $f'(x) = \dfrac{3}{x}$
7. $f'(x) = \dfrac{2.x^2 + 1}{x.(x^2 + 1)}$
8. $f'(x) = \dfrac{e^x.(x - 2)}{x^3}$
9. $f'(x) = \dfrac{3}{2}.(3.x^2 + 2).\sqrt{x^3 + 2.x}$
10. $f'(x) = \dfrac{7}{2}.x^{\frac{5}{2}}$