

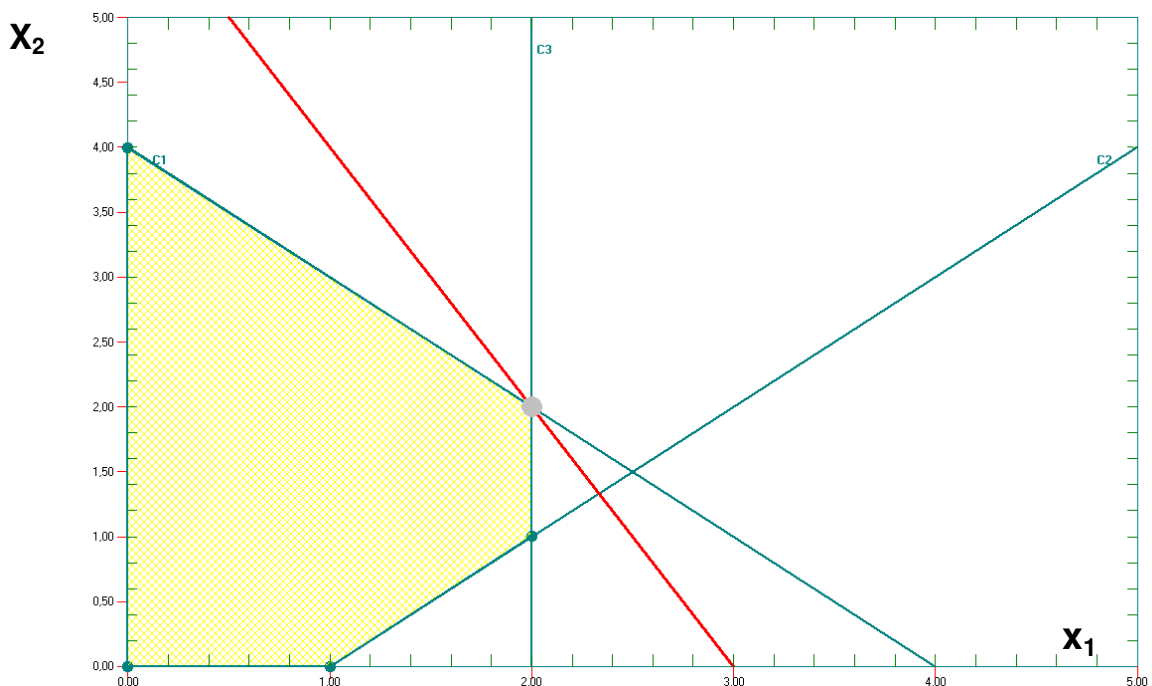
Programmation linéaire: analyse de tableaux simples

Exercice 1

$$\begin{aligned} \text{Max } 2x_1 + x_2 \text{ sc. } & \quad x_1 + x_2 \leq 4 \text{ (C1)} \\ & \quad x_1 - x_2 \leq 1 \text{ (C2)} \\ & \quad x_1 \leq 2 \text{ (C3)} \\ & \quad x_1 \geq 0 \text{ (C4)} \\ & \quad x_2 \geq 0 \text{ (C5)} \end{aligned}$$

1°) Représentation graphique :

⇒ polyèdre des actions potentielles et détermination de l'optimum



Sommet du polyèdre = intersection de 2 contraintes vérifiant toutes les autres contraintes

Intersections	Sommets		$Z = 2x_1 + x_2$
C1 et 2	$x_1=5/2, x_2=3/2$	Hors polyèdre	
C1 et 3	$x_1 = 2, x_2 = 2$		$Z = 6$ optimum
C1 et 4	$x_1 = 0, x_2 = 4$		$Z = 4$
C1 et 5	$x_1 = 4, x_2 = 0$	Hors polyèdre	
C2 et 3	$x_1 = 2, x_2 = 1$		$Z = 5$
C2 et 4	$x_1 = 0, x_2 = -1$	Hors polyèdre	
C2 et 5	$x_1 = 1, x_2 = 0$		$Z = 2$
C3 et 4	$x_1 = 2 \text{ et } x_1 = 0$	impossible	
C3 et 5	$x_1 = 2, x_2 = 0$	Hors polyèdre	
C4 et 5	$x_1 = 0, x_2 = 0$		$Z = 0$

2°) mise sous forme standard : introduction de variables d'écart

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 & = 4 \\ x_1 - x_2 + s_2 & = 1 \\ x_1 + s_3 & = 2 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 & \geq 0 \end{cases}$$

- Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Détermination analytique des sommets :

Base : sous-ensemble de variables dont le dét(coefficients)≠0 ; le système peut être résolu dans ces variables

Solution de base : obtenue en annulant les variables hors base et en résolvant le système

Solution de base admissible: solution de base vérifiant les *contraintes de signe*
 ⇒ correspondent aux sommets du polyèdre

<i>Bases possibles</i>	<i>Solution de base</i>	
{x ₁ , x ₂ , s ₁ }	x ₁ =2, x ₂ =1, s ₁ =1	
{x ₁ , x ₂ , s ₂ }	x ₁ =2, x ₂ =2, s ₂ =1	
{x ₁ , x ₂ , s ₃ }	x ₁ =5/2, x ₂ =3/2, s ₃ =-1/2	<i>Non admissible</i>
{x ₁ , s ₁ , s ₂ }	x ₁ =2, s ₂ =-1	<i>Non admissible</i>
{x ₁ , s ₁ , s ₃ }	x ₁ =3, s ₁ =3, s ₃ =1	
{x ₁ , s ₂ , s ₃ }	x ₁ =4, s ₂ =-3	<i>Non admissible</i>
{x ₂ , s ₁ , s ₂ }	<i>n'est pas possible</i>	
{x ₂ , s ₁ , s ₃ }	x ₂ =-1, s ₃ =2	<i>Non admissible</i>
{x ₂ , s ₂ , s ₃ }	x ₂ =4, s ₂ =5, s ₃ =2	
{s ₁ , s ₂ , s ₃ }	s ₁ =4, s ₂ =2, s ₃ =2	

3°) Analyse des tableaux simplexe

- Itération 1: initialisation de l'algorithme

Solution de base admissible initiale \Rightarrow variables initiales hors base

		<i>Variables du système sous forme standard</i>					
		X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	
		<i>Coeff des variables dans la fonction objectif</i>					
Basis	c(j)	2	1	0	0	0	RHS
S ₁	0	1	1	1	0	0	4
S ₂	0	1	-1	0	1	0	1
S ₃	0	1	0	0	0	1	2
c(j)-Z(j)		2	1	0	0	0	0
<i>Expression de z en fonction des seules variables hors base</i>							
$Z = 2X_1 + 1X_2 + 0$							
Current OBJ (Max.) = 0 IN: X1 OUT: S2							

- choix de variable **entrante** : variable de coefficient objectif positif le plus élevé (en cas de maximisation) ou négatif le plus petit (minimisation)
- choix de variable **sortante** : 1^{ère} variable de base à s'annuler, d'après le minimum du ratio
- Itération 2: calcul du nouveau sommet par pivotage (cf. Gauss-Jordan)

		X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	
Basis	c(j)	2	1	0	0	0	RHS
S ₁	0	1	1	1	0	0	4
S ₂	0	1	-1	0	1	0	1
S ₃	0	1	0	0	0	1	2
c(j)-Z(j)		2	1	0	0	0	0
$Z = 2X_1 + 1X_2 + 0$							

		X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	
Basis	c(j)	2	1	0	0	0	RHS
L ₁ -L ₂	S ₁	0	2	1	-1	0	3
L ₂ =L _{piv}	X ₁	2	1	0	1	0	1
L ₃ -L ₂	S ₃	0	1	0	-1	1	1
L _z -2L ₂	$Z = 0X_1 + 3X_2 - 2S_2 + 2$						

- **Critère d'arrêt**: solution optimale si tous les coefficients objectif sont négatifs ou nuls lorsque z est exprimée en fonction des seules variables hors base

...