

## **EXERCICE 1**

Une raffinerie prépare deux carburants en mélangeant 4 constituants : l'isopentane, la gasoline, le reformat et le platformat. La composition volumétrique de ces 2 carburants est donnée par le tableau suivant :

	carburant n°1	carburant n°2
isopentane	20%	10%
gasoline	30%	10%
reformat	30%	60%
platformat	20%	20%

Elle dispose de 9000 m<sup>3</sup> d'isopentane et de 14000 m<sup>3</sup> de platformat. Par contre, les quantités de gasoline et de reformat ne sont pas limitées. Au contraire, les stocks de ces deux constituants ayant tendance à augmenter, la raffinerie doit nécessairement utiliser au moins 6000 m<sup>3</sup> de gasoline et au moins 18000 m<sup>3</sup> de reformat.

La raffinerie souhaite organiser sa production pour maximiser son bénéfice, tout en tenant compte des contraintes ci-dessus.

Aidez-la en modélisant ce problème sous la forme d'un programme linéaire.

Trouvez ensuite la production optimale

## **EXERCICE 2**

Un importateur de whisky dispose d'un marché illimité mais se trouve restreint par la réglementation des importations quant aux quantités mensuelles maximales autorisées; celles-ci s'établissent comme suit:

Walter : au plus 2000 litres par mois

Rivas : au plus 2500 litres par mois

Vat70 : au plus 1200 litres par mois

A l'aide de ces 3 variétés de whisky, il effectue deux mélanges A et B en respectant les conditions suivantes :

mélange A	mélange B
pas moins de 60% de Walter	pas moins de 15% de Walter
pas plus de 20% de Vat70	pas plus de 60% de Vat70

Les mélanges A et B sont vendus aux prix respectifs de 6 Euros et 5 Euros.

On recherche les mélanges qui rendent maximal le bénéfice de l'importateur sachant que le prix d'achat d'un litre de Walter est de 5 Euros, de Rivas est de 4 Euros et de Vat 70 est de 3 Euros.

Modélisez ce problème sous la forme d'un programme linéaire.

Trouvez ensuite la production optimale

### **EXERCICE 3**

Monsieur Frémid, doreur de son métier, a l'occasion d'acheter un lot important de cadres à restaurer. Le vendeur lui prétend qu'ils datent de l'époque baroque

Compte tenu de l'offre de prix qu'on lui fait et de la possibilité qu'il a, de par son métier, de restaurer les cadres, Monsieur Frémid estime pouvoir tirer de l'opération un bénéfice global de 60.000 € si les cadres sont authentiques. Si, par contre, il s'avère que les cadres ne sont que des copies, il perdra globalement 30.000 €.

Monsieur Frémid a examiné les cadres et estime qu'il y a une chance sur deux qu'ils soient réellement d'époque.

Monsieur Jean propose à Monsieur Frémid ses services.

Pour une somme de  $z$  € ( somme à discuter ), il peut expertiser les cadres et dire si, à son avis, ils sont authentiques ou non.

Les probabilités que l'expertise de Monsieur Jean soit correcte ou non sont les suivantes:

$$p(\text{Jean dit "cadres authentiques"} \mid \text{les cadres sont réellement authentiques}) = 0,8$$

$$p(\text{Jean dit "cadres sont des copies"} \mid \text{les cadres sont réellement authentiques}) = 0,2$$

$$p(\text{Jean dit "cadres authentiques"} \mid \text{les cadres sont en réalité des copies}) = 0,3$$

$$p(\text{Jean dit "cadres sont des copies"} \mid \text{les cadres sont en réalité des copies}) = 0,7.$$

Par une analyse basée sur un arbre de décision et en utilisant l'approche de la valeur espérée, déterminer une valeur  $Z^*$  telle que,

pour tout  $z < Z^*$ , vous conseilleriez à Monsieur Frémid de faire réaliser l'expertise par Jean et pour tout  $z > Z^*$ , vous lui conseilleriez de ne pas faire réaliser l'expertise.

### **EXERCICE 4**

Vous êtes gestionnaire d'un projet comportant 8 tâches A, B, C, D, E, F, G et H, de durées diverses, et sur lesquelles existent certaines contraintes :

Tâche	Contraintes à satisfaire avant le début de la tâche	Durée
A	-	4
D	5 jours après le démarrage du projet	10
G	tâche A avancée de moitié	8
E	tâche G avancée de moitié	3
F	tâche A achevée	7
B	tâche G achevée	6
C	tâches E et F achevées	1
H	tâche F achevée et tâche B au 2/3 de son avancement	3

Modélisez ce problème sous forme d'un graphe A.O.N.

Donnez les dates aux plus tôt, au plus tard, intervalle de flottement et marges libres de chacune des tâches.

Quel est le chemin critique ? En pratique, que peut-on dire sur les tâches faisant partie de ce chemin ?

## QUESTION 5

Une entreprise fabrique 3 types de meubles en bois A, B et C.

Elle occupe 7 ouvriers 20 heures par semaine chacun.

La disponibilité en matière première (le bois) limite sa production totale hebdomadaire à 120 meubles.

La fabrication d'un meuble A ou B nécessite 2 heures de travail, tandis que la fabrication d'un meuble C ne demande qu'une heure de travail.

L'expérience a montré que toute la production était entièrement absorbée par le marché si la production des meubles de type B était limitée à un maximum de 60 unités.

Les bénéfices sont respectivement de 1200, 4000 et 1500 francs par meuble.

On veut déterminer les quantités hebdomadaires à fabriquer pour que le bénéfice total soit maximum et toute la production vendue.

Le problème peut être modélisé comme suit:

- variables de décision:  $x_1$  : nombre de meubles A à fabriquer par semaine  
 $x_2$  : nombre de meubles B à fabriquer par semaine  
 $x_3$  : nombre de meubles C à fabriquer par semaine

- fonction à maximiser:  $1200 x_1 + 4000 x_2 + 1500 x_3$

- contraintes: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 120 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 140 \\ x_2 \leq 60 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{cases}$$

Les tableaux simplexes initial et final sont les suivants:

**tableau initial:**

		X1	X2	X3	S1	S2	S3		
Basis	c(j)	1200	4000	1500	0	0	0	RHS	Ratio
S1	0	1	1	1	1	0	0	120	
S2	0	2	2	1	0	1	0	140	
S3	0	0	1	0	0	0	1	60	
c(j)-z(j)		1200	4000	1500	0	0	0	0	

**tableau final (celui qui présente la solution optimale):**

		X1	X2	X3	S1	S2	S3		
Basis	c(j)	1200	4000	1500	0	0	0	RHS	
S1	0		0	0	1			40	
X3	1500	2	0	1	0	1		20	
X2	4000	0	1	0	0	0		60	
c(j)-z(j)		-1800	0	0	0	-1500		270000	

QUESTIONS.

1. Complétez les 6 cases blanches dans le tableau simplexe final.

2. Le plan hebdomadaire de fabrication pour que le bénéfice total soit maximum est le suivant (complétez les 4 cases blanches):

$x_1 =$	
$x_2 =$	
$x_3 =$	
bénéfice =	

3. Vous constatez que la fabrication de meubles de type A n'est pas rentable.

Pour produire des meubles de type A en maintenant le bénéfice maximal ci-dessus, la marge bénéficiaire par meuble devrait être de

--

 francs (complétez).

Si l'on adopte cette nouvelle marge et qu'on décide de produire 10 meubles de type A par semaine, le nouveau plan hebdomadaire optimal sera (complétez les 3 cases blanches):

$x_1 =$	10
$x_2 =$	
$x_3 =$	
bénéfice =	

4. Si l'entreprise engageait un ouvrier supplémentaire pour 10 heures de travail par semaine ("à quart-temps") **sans changer les marges bénéficiaires initiales** (1200, 4000, 1500) et **sans imposer la fabrication de meubles de type A**, le nouveau plan hebdomadaire optimal de fabrication serait (complétez les 4 cases blanches):

$x_1 =$	
$x_2 =$	
$x_3 =$	
bénéfice =	

5. Si, au lieu d'engager un ouvrier supplémentaire, l'entreprise parvenait à obtenir plus de bois pour porter sa limite de production hebdomadaire à 130 meubles (au lieu de 120), quelle serait l'augmentation du bénéfice total qui en résulterait (complétez la case blanche):

--