Chapitre I : Préliminaires

Pour
- étudier des relations entre facteurs économiques
- résoudre des problèmes de gestion
- …

→ **variables numériques**

→ **modèles mathématiques** : équations, inéquations, fonctions.

I.1. Exemples de modèles mathématiques

Exemple 1 (gestion agricole)

Dans le but de minimiser ses coûts d'épandage d'engrais, un horticulteur a décidé de mélanger des engrais de marques A et B. Chaque are de terrain doit recevoir au minimum

12 kg de nitrate

et 8 kg de phosphate.

Un sac de marque A procure 2 kg de nitrate, 1 kg de phosphate et coûte 3 €.
Un sac de marque B procure 1 kg de nitrate, 1 kg de phosphate et coûte 2 €.

Aidez-le à résoudre son problème de minimisation.

Modélisation

Variables numériques

Q_A = quantité d'engrais de marque A à épandre par are de terrain (en sacs)

Q_B = quantité d'engrais de marque B à épandre par are de terrain (en sacs)

C = coût de l'épandage, par are (en €)

Modèle mathématique **:**

$$2\,Q_A + Q_B \geq 12$$
$$Q_A + Q_B \geq 8$$
$$Q_A \geq 0$$
$$Q_B \geq 0$$
$$C = 3\,Q_A + 2\,Q_B$$

Problème **:** Minimiser C

Exemple 2 (Théorie économique)

Variables numériques

$$\left.\begin{array}{l} Y = \text{revenu national} \\ C = \text{dépenses liées à la consommation privée} \\ I = \text{dépenses liées à l'investissement privé} \\ G = \text{dépenses publiques (gouvernementales)} \\ T = \text{montant des impôts} \end{array}\right\} \text{exprimés dans une même unité monétaire}$$

Modèle mathématique

$$Y = C + I + G$$
$$C = \alpha + \beta.(Y - T) \qquad (\alpha > 0\ ,\ 0 < \beta < 1)$$
$$T = \gamma + \delta.Y \qquad (\gamma > 0\ ,\ 0 < \delta < 1)$$
$$(Y, C, I, G, T \geq 0)$$

I.2. A propos des variables

variable ≡ symbole (représentant aspect, facteur)

qui peut prendre différentes modalités.

SI ces modalités sont des nombres, on parle de **variable numérique**.

Dans ce cours, uniquement variables numériques et nombres **réels**.

I.3. Mesure de la variation d'une variable numérique

Soit **P** variable numérique représentant le poids d'une personne en kgs.

Supposons que : $P_{initial} = 80$ (kg)

$P_{final} = 84$ (kg)

1°) Variation absolue (ou en valeur)

$$\Delta P = P_{final} - P_{initial} = 4 \text{ (kg).}$$

(ΔP s'exprime dans la même unité **P**).

ΔP peut être < 0 : si $P_{initial} = 80$ (kg)

$P_{final} = 76$ kg,

on a $\Delta P = -4$ (kg).

2°) Variation relative (ou en pourcentage)

$$\frac{\Delta P}{P_{initial}} = \frac{P_{final} - P_{initial}}{P_{initial}} = \frac{4}{80} = \frac{5}{100} = 5\% :$$

(sans unité)

$\frac{\Delta P}{P_{initial}}$ **peut être < 0 :** si $\begin{cases} P_{initial} = 80 \text{ (kg)} \\ P_{final} = 76 \text{ kg,} \end{cases}$

on a $\frac{\Delta P}{P_{initial}} = -5\%$

Traditionnellement, variations relatives en « pourcentages ».

Parfois « variation en pourcentage »

ou « taux de variation en pourcentage ».

<u>Attention aux opérations sur les taux de variation en pourcentage.</u>

Exemple : si la valeur d'une action augmente de 30% un jour
puis baisse de 25 % le lendemain,

quel est l'effet global (baisse ou hausse de …%) ?.

$$\mathbf{V_{final} = V_{initial} \times 1.3 \times 0.75 = 0.975 \times V_{initial}.}$$

Donc, globalement, **baisse de 2.5%**.

Exemple : dans un pays, le taux d'inflation (variation relative des prix) a été de

60% la première année

et 20% la deuxième année.

Calculez le **taux d'inflation moyen annuel** pendant ces deux ans.

$$\mathbf{P_{initial}} \times \mathbf{1.6} \times \mathbf{1.2} = \mathbf{P_{initial}} \times \mathbf{1.92} = \mathbf{P_{initial}} \times \sqrt{\mathbf{1.92}} \times \sqrt{\mathbf{1.92}}$$

$$= \mathbf{P_{initial}} \times \mathbf{1.386} \times \mathbf{1.386}$$

Donc, **taux d'inflation moyen annuel pendant ces deux ans = 38,6%**.

Définition :

« variation relative moyenne » annuelle (ou autre) ≡ variation relative théorique qui, appliquée **chaque** année, conduirait au même résultat global que la suite des variations relatives observées.

Exercice I.1. Un capital de 10000 € est placé à « intérêts composés » pendant 3 ans. Le taux d'intérêt annuel est de 9% la première année, de 6% la deuxième et de 4% la troisième année. Calculez :

a) la variation absolue du capital au bout des 3 ans ;
b) la variation relative du capital au bout des 3 ans ;
c) la variation relative annuelle moyenne du capital pendant ces 3 ans .

A faire !

Exercice I.2. Un capital de 20000 € est placé à « intérêts composés ». Le taux d'intérêt annuel est de 8%. Calculez après combien de temps le capital aura doublé.

Solution : trouver z (exprimé en années) tel que

$20000 \times (1.08)^{z} = 40000$ c'est-à-dire $(1.08)^{z} = 2$

c'est-à-dire $\ln [(1.08)^{z}] = \ln(2)$

c'est-à-dire $z \times \ln(1.08) = \ln(2)$

On trouve $z = \dfrac{\ln(2)}{\ln(1.08)} = 9.006$ années

I.4. Nombres réels et couples, triples, … ,n-uples de nombres réels

(2, –1) : « **couple** » de nombres réels

(–4, –2, 5) : « **triple** » de nombres réels

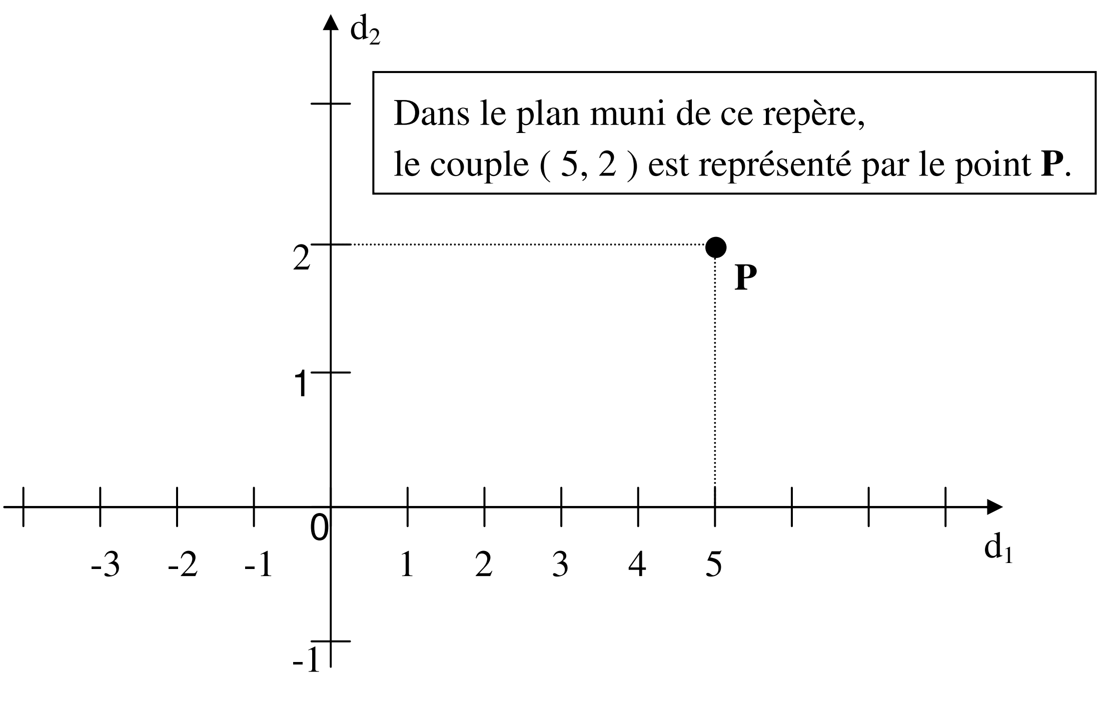
(0, 87, –54, 269) : « **4-uple** » de nombres réels

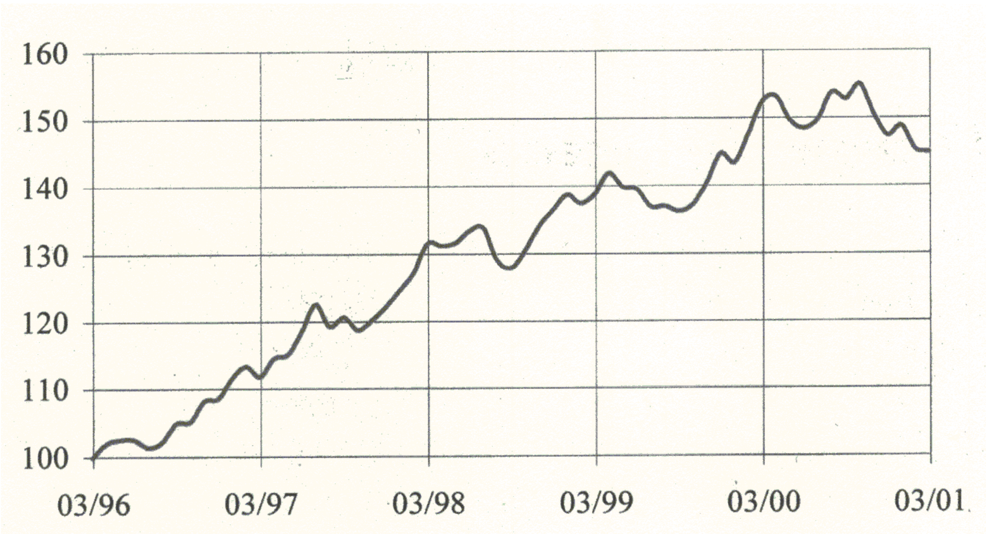
$(r_1 , r_2 , \dots , r_n)$: « **n-uple** » de nombres réels (où $r_1 , r_2 , \dots , r_n \in$ **R**)

Notation : $\mathbf{R}^n = \{ (r_1, r_2, \dots, r_n) \mid r_1 , r_2 , \dots, r_n \in \mathbf{R} \}$

Attention : $(2 , 1) \neq (1 , 2)$

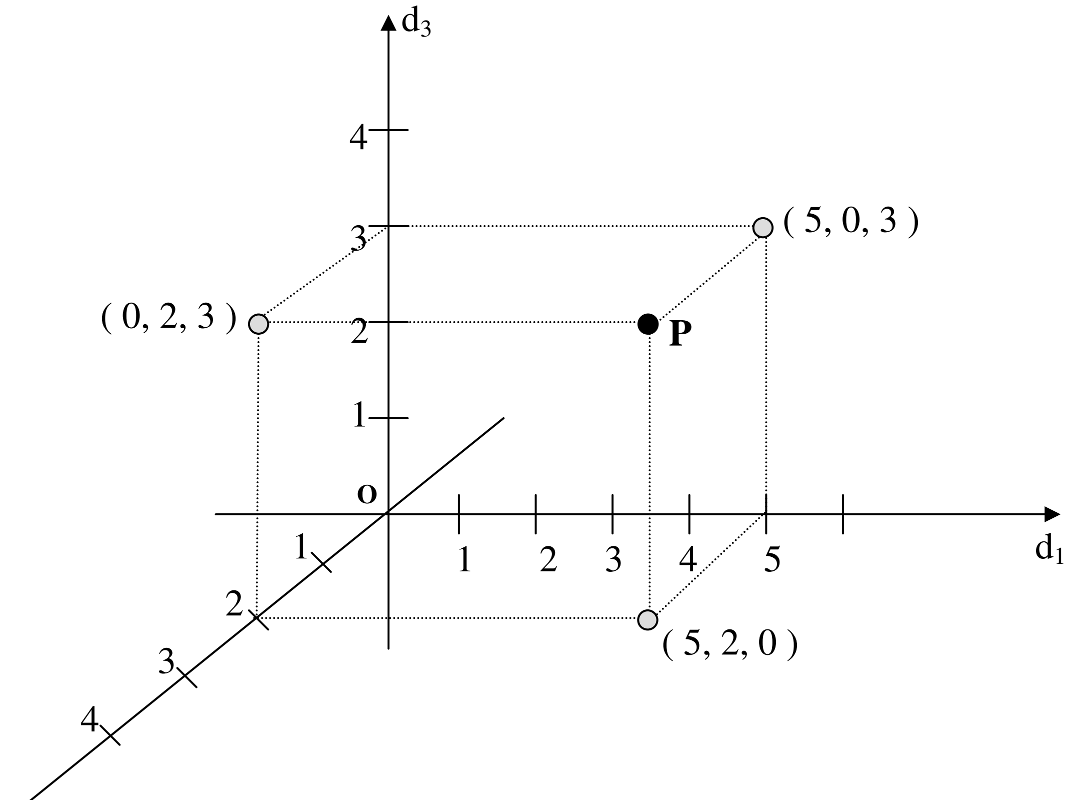
- **nombre** réel → point d'une droite graduée
- **couple** de nombres réels → point d'un plan muni d'un repère orthogonal





- **triple** de nombres réels $\rightarrow$ point d'un espace à 3 dimensions muni d'un repère orthogonal

Exemple : le triple (5, 2, 3) est représenté par le point **P** .



I.5. Équations et systèmes d'équations

- **équation** à n variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$

  ≡ égalité entre expressions math. en ces n variables.

$\mathbf{z_1^2 - z_2^2 = z_3}$ et $\mathbf{2\,z_1 - 3\,z_2 + 0.z_3 = 6}$: équations à 3 variables z_1, z_2, z_3

- **solution d'une équation** à n variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$

  ≡ tout n-uple $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ tel que

  si on remplace dans l'équation chaque z_i par r_i $(i = 1,2,\ldots,n)$,

  alors l'égalité est vérifiée.

(3, 2, 5) est une solution de l'équation à 3 variables z_1, z_2, z_3 : $\mathbf{z_1^2 - z_2^2 = z_3}$

(0, 0, 0) est une autre solution de cette équation.

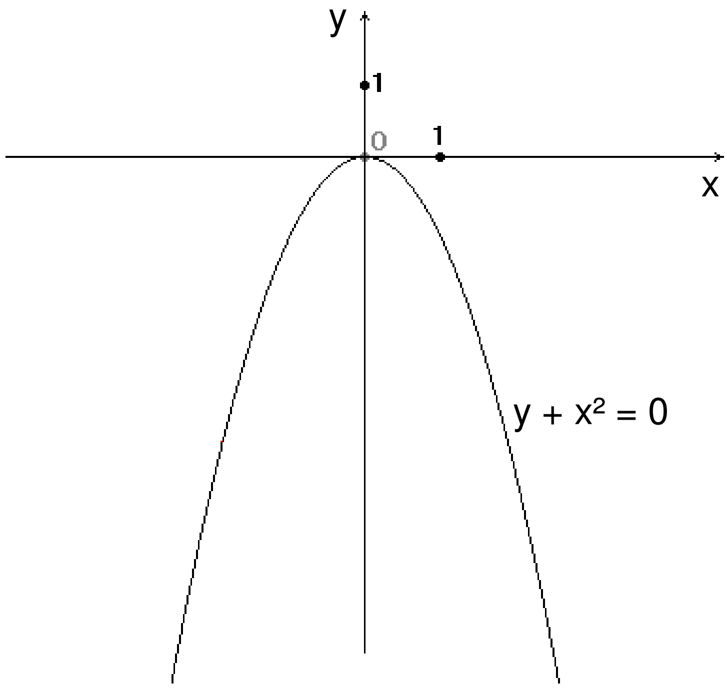
Attention : (2, 3, 5) **n**'est **pas** une solution de cette équation.

On écrira souvent $\begin{cases} \mathbf{z_1 = 3} \\ \mathbf{z_2 = 2} \\ \mathbf{z_3 = 5} \end{cases}$ est une solution de l'équation $\mathbf{z_1^2 - z_2^2 = z_3}$

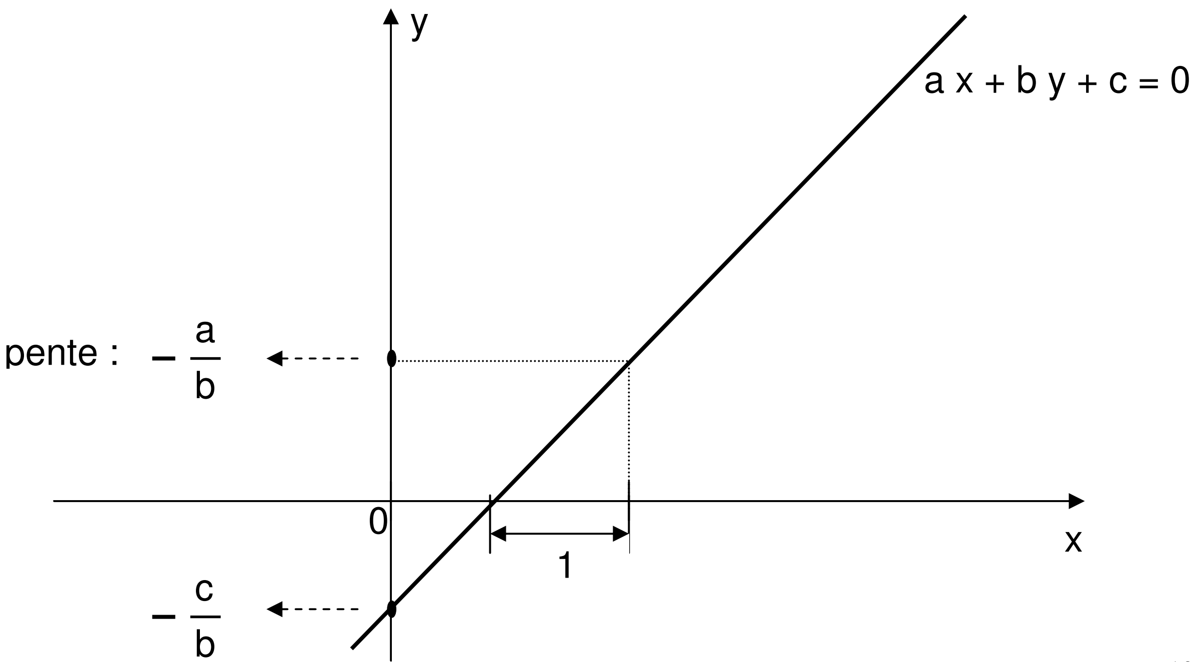
Représentation graphique

A) L'ensemble des solutions d'une **<u>équation à 2 variables</u>** peut être représenté par un ensemble de points dans un plan muni d'un repère.

Exemple 1 : représentation graphique de l'ensemble des solutions de l'équation à 2 variables x et y : $y + x^2 = 0$



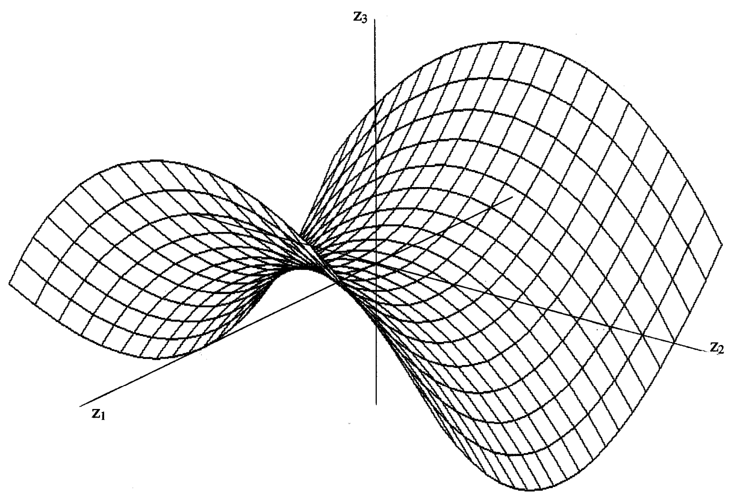
Exemple 2 : représentation graphique de l'ensemble des solutions de l'équation à 2 variables x et y : $a x + b y + c = 0$ (où $b \neq 0$)



B) L'ensemble des solutions d'une **<u>équation à 3 variables</u>** peut être représenté par un ensemble de points dans un espace à 3 dimensions muni d'un repère.

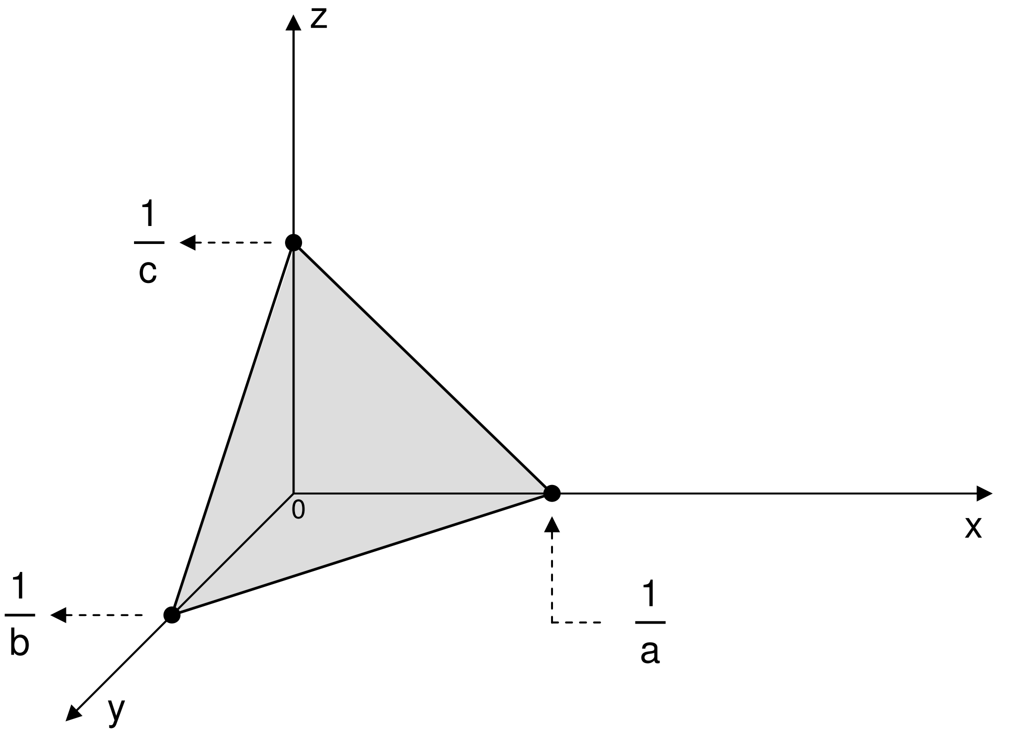
Exemple 1 : représentation graphique (obtenue avec le logiciel Derive) de l'ensemble des solutions de l'équation à 3 variables z_1, z_2, z_3 :

$$\mathbf{z_1^2 - z_2^2 = z_3}$$



Exemple 2 : représentation graphique (limitée au *premier octant*) de l'ensemble des solutions de l'équation à 3 variables x, y, z :

$$\mathbf{a\,x + b\,y + c\,z = 1}$$



Définition

deux **équations** sont **équivalentes** lorsqu'elles possèdent les mêmes solutions.

$2x - y = 1$ et $2y - 4x + 2 = 0$ sont deux équations équivalentes.

$x - 1 = 0$ et $2x - x^2 = 1$ sont deux équations équivalentes.

Deux grandes règles d'équivalence

1. $[\, 2x - y = 1 \,]$

 et $[\, 2x - y \boldsymbol{+ (x + 2)} = 1 \boldsymbol{+ (x + 2)} \,]$ sont équivalentes.

2. $[\, 2x - y = 1 \,]$

 et $[\, \boldsymbol{5} * (2x - y) = \boldsymbol{5} * 1 \,]$ sont équivalentes.

Exercice I.3. Résoudre les équations suivantes (trouver toutes les solutions) :

1) $3x - x^2 = 2$ (variable x)
2) $2x^2 - x + 1 = 0$ (variable x)
3) $y^3 - 1 = 0$ (variable y)
4) $\alpha x^2 - x - \alpha = 0$ (variable x)

I.5.2. Systèmes d'équations

- **système d'équations** à n variables

  ≡ ensemble d'équations en ces n variables

  qu'il faut considérer ***en même temps***.

- **solution d'un système d'équations** à n variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$

  ≡ tout n-uple de nombre réels $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ tel que,

  si on remplace dans chaque équation z_i par r_i $(i = 1,2,\ldots,n)$,

  alors toutes les égalités sont vérifiées.

- deux **systèmes d'équations** sont **équivalents** lorsqu'ils possèdent les mêmes solutions.

<u>Deux grands principes d'équivalence</u>

1. $\begin{cases} z_1 - 2z_2 = 1 \\ 4z_1 + z_2 = 4 \end{cases}$ et $\begin{cases} z_1 = 2z_2 + 1 \\ 4(2z_2 + 1) + z_2 = 4 \end{cases}$ sont équivalents.

→ **méthode de résolution « par substitution »**.

2. $\begin{cases} z_1 = 2z_2 + 1 \\ 4z_1 + z_2 = 4 \end{cases}$ et $\begin{cases} z_1 = 2z_2 + 1 \\ 4z_1 + z_2 - 4z_1 = 4 - 4(2z_2 + 1) \end{cases}$ sont équivalents

→ **méthode de résolution « par combinaison d'équations »**.

Exemple

Résoudre le système de 2 équations à 2 variables z_1 et z_2 suivant :

$$\begin{cases} 6.z_1 - 12.z_2 = 0 \\ 6.z_2^2 + 42.z_2 - 12.z_1 - 24 = 0 \end{cases}$$

Il est équivalent au système $\begin{cases} z_1 = 2.z_2 \\ 6.z_2^2 + 18.z_2 - 24 = 0 \end{cases}$,

L'équation $\mathbf{6.z_2^2 + 18.z_2 - 24 = 0}$ admet deux solutions : 1 et -4 ,
Donc, **les 2 solutions du système de départ sont : (2, 1) et (– 8, – 4)** .

Exemple

A partir du système de 3 équations à 5 variables Y, C, T, I et G suivant :

$$\begin{cases} Y = C + I + G \\ C = \alpha + \beta.(Y - T) \\ T = \gamma + \delta.Y \end{cases}$$

exprimer les variables Y, C et T en fonction des deux autres I et G .

1ère équation équivalente à $C = Y - I - G$.

3ème équation équivalente à $T = \gamma + \delta.Y$

D'où : 2ème équation équivalente à $Y - I - G = \alpha + \beta.Y - \beta.(\gamma + \delta.Y)$

équivalente à $Y.(1 - \beta + \beta.\delta) = \alpha - \beta.\gamma + I + G$

Le système de départ est donc équivalent au système

$$\begin{cases} C = Y - I - G \\ Y.(1-\beta+\beta.\delta) = \alpha - \beta.\gamma + I + G \quad \rightarrow \text{une seule variable (parmi Y, C et T)} \\ T = \gamma + \delta.Y \end{cases}$$

(on supposera que $1 - \beta + \beta.\delta \neq 0$)

En remplaçant Y par $\dfrac{\alpha - \beta.\gamma + I + G}{1 - \beta + \beta.\delta}$ dans 1ère et 3ème équations, on obtient :

$$\begin{cases} C = \dfrac{\alpha - \beta.\gamma + (\beta - \beta.\delta).(I + G)}{1 - \beta + \beta.\delta} \\ Y = \dfrac{\alpha - \beta.\gamma + I + G}{1 - \beta + \beta.\delta} \\ T = \dfrac{\alpha.\delta + (1 - \beta).\gamma + \delta.(I + G)}{1 - \beta + \beta.\delta} \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : C , Y et T sont les variables ***endogènes ("expliquées")***

I et G sont les variables ***exogènes ("explicatives")***

I.5.3. Équations linéaires et systèmes d'équations linéaires

- **expression linéaire** en $\mathbf{z_1, z_2, \dots, z_n}$

  ≡ expression du type $\mathbf{c_1.z_1 + c_2.z_2 + \dots + c_n.z_n}$ (+ c)

  où $\mathbf{c_1, c_2, \dots, c_n}$ et **c** représentent des constantes réelles.

Exemple : $2x + 3y - z$ est une expression linéaire en x , y et z

Contre-exemple : $\mathbf{x - y^2}$ **n**'est **pas** une expression linéaire en x et y

- **équation linéaire**

  ≡ équation dont les 2 membres sont des expressions linéaires

- **système d'équations linéaires**

  ≡ système d'équations composé uniquement d'équations linéaires

$$\begin{cases} \mathbf{a_{11}.z_1 + a_{12}.z_2 + \dots + a_{1n}.z_n = d_1} \\ \mathbf{a_{21}.z_1 + a_{22}.z_2 + \dots + a_{2n}.z_n = d_2} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \mathbf{a_{m1}.z_1 + a_{m2}.z_2 + \dots + a_{mn}.z_n = d_m} \end{cases}$$

$\mathbf{a_{ij}}$ (i = 1,…,m et j = 1,…,n) : **coefficients** des variables.
$\mathbf{d_i}$ (i = 1,…,m) : **termes indépendants**.

Lorsque tous les termes indépendants sont nuls, le système est dit **homogène**.

***Exercices* : Syllabus TP pages 5 à 7**