

BASES MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCONOMIE ET LA GESTION

Travaux pratiques

**B. BRUNQUERS
C. MOUSSET**

1^{er} Bachelier Sc. Gestion

1^{er} Bachelier Sc. Economiques et de Gestion

1^{er} Bachelier Ing. de Gestion

2008-2009

Code 3061

LES COURS NE SONT NI REPRIS NI ÉCHANGES

**BASES MATHÉMATIQUES POUR
L'ÉCONOMIE ET LA GESTION**

Travaux pratiques

**B. BRUNQUERS
C. MOUSSET**

**Bases mathématiques
pour l'économie et la gestion**
-
Travaux pratiques

Table des matières

PREMIERE PARTIE : QUELQUES OUTILS

Chapitre 1 : Traitement de systèmes d'équations

- 1.1. Résolution de systèmes par substitution page 5
- 1.2. Traitement de systèmes linéaires par la méthode dite de Gauss-Jordan page 8
- Solutions des exercices (Chapitre 1) page 12

Chapitre 2 : Matrices

- 2.1. Calcul matriciel : somme, produit, multiplication par un réel page 14
- 2.2. Inversion d'une matrice par la méthode de la matrice compagnon page 15
- 2.3. Calcul du déterminant d'une matrice carrée page 16
 - 2.3.1. Pour les matrices 1×1 , 2×2 , 3×3 page 16
 - 2.3.2. Pour les matrices quelconques $n \times n$ ($n \geq 1$) page 17
- 2.4. Inversion d'une matrice par la méthode de la matrice adjointe page 21
- 2.5. Résoudre un système linéaire par la méthode de Cramer page 23
- 2.6. Résoudre un système linéaire par inversion de matrice page 26
- Solutions des exercices (Chapitre 2) page 27

DEUXIEME PARTIE : VARIATIONS ET CALCUL DIFFERENTIEL

Chapitre 3 : Variations

3.1. Modèles à 2 variables	page 31
3.1.1. Variation absolue (ou en valeur)	page 31
3.1.2. Variation relative (ou en pourcentage)	page 35
3.2. Modèles à 3 variables ou plus	page 37
Solutions des exercices (Chapitre 3)	page 40

Chapitre 4 : Dérivées partielles de fonctions de plusieurs variables

4.1. Technique de dérivation	page 42
4.1.1. Dérivées partielles du premier ordre	page 42
4.1.2. Dérivées partielles du second ordre	page 42
4.2. Application : approximation linéaire	page 43
4.2.1. Fonctions d'une variable	page 43
4.2.2. Fonctions de plusieurs variables	page 44
4.2.3. Méthode de Newton	page 46
Solutions des exercices (Chapitre 4)	page 49

Chapitre 5 : Différentielles

5.1. Différentier une fonction	page 51
5.1.1. Notion de différentielle d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}	page 51
5.1.2. Notion de différentielle d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}	page 52
5.2. Equations aux variations différentielles	page 53
5.3. Systèmes d'équations aux variations différentielles	page 57
Solutions des exercices (Chapitre 5)	page 62

TROISIEME PARTIE : OPTIMISATION

Chapitre 6 : Optimisation

6.1. Recherche d'extrema de fonctions d'une variable	page 69
6.2. Recherche d'extrema de fonctions de n variables	page 73
6.2.1. Caractère défini positif, défini négatif d'une matrice carrée symétrique	page 73
6.2.2. Recherche des extrema libres d'une fonction de n variables	page 75
6.2.3. A propos des courbes de niveau d'une fonction de deux variables	page 80
6.3. Recherche d'extrema de fonctions de n variables sous contrainte d'égalité - Méthode de Lagrange	page 83
6.4. Optimisation sous contraintes, vision graphique	page 86
Solutions des exercices (Chapitre 6)	page 90

Première partie
-
Quelques outils

Chapitre 1 :

Traitement de systèmes d'équations

*** syllabus théorie : pages 12 à 17 ***

1.1. Résolution de systèmes par substitution

Quand on travaille avec un **système d'équations**, on envisage plusieurs équations *simultanément* (l'accolade {}, regroupant les équations du système, est là pour nous le rappeler). **Résoudre** un système d'équations consiste à trouver les *solutions communes* à toutes les équations du système.

Une technique de résolution d'un système : la **substitution**.

Supposons qu'on ait affaire à un système de deux équations à deux inconnues x et y .

1. Utiliser l'une des deux équations pour exprimer une inconnue, disons x en fonction de l'autre, disons y .
2. Substituer x trouvé à l'étape 1 dans l'autre équation, pour obtenir une équation en y uniquement.
3. Trouver les solutions de l'équation en y obtenue à l'étape 2.
4. Substituer les valeurs de y trouvées à l'étape 3 dans l'équation de l'étape 1 pour trouver les valeurs correspondantes de x .

La méthode « substitution » peut être étendue à des systèmes à plus de deux inconnues, ou même à des systèmes indéterminés.

Exercice résolu

Résoudre le système en (x,y) :

$$\begin{cases} x + y^2 = 6 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

Etape 1 : On peut utiliser la seconde équation pour exprimer x en fonction de y :

$$x = -2y + 3$$

Etape 2 : On substitue x trouvé à l'étape 1 dans la première équation :

$$(-2y + 3) + y^2 = 6$$

c'est-à-dire

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

Etape 3 : On résout l'équation de l'étape 2 par rapport à y :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$y = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 3 \quad \text{ou} \quad y = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -1$$

Etape 4 : On substitue les valeurs de y trouvées à l'étape 3 dans l'équation de l'étape 1 pour trouver les valeurs correspondantes de x :

$$\text{Si } y = 3, \text{ alors } x = -2 \cdot (3) + 3 = -3.$$

Si $y = -1$, alors $x = -2 \cdot (-1) + 3 = 5$.
 Les solutions du système d'équations sont donc $(-3,3)$ et $(5,-1)$ (on note $S = \{(-3,3),(5,-1)\}$).

Exercices

1. Résoudre le système en (x,y) :

$$\begin{cases} x \cdot y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

2. Résoudre le système en (x,y) :

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = -x^2 - 2x \end{cases}$$

3. Résoudre le système en (x,y) :

$$\begin{cases} y - 1 = x^2 - 2x \\ y - 2x = -3 \end{cases}$$

4. Résoudre le système en (p, q_d, q_p) :

$$\begin{cases} q_d = 11 - p^2 \\ q_p = p - 1 \\ q_p = q_d \end{cases}$$

5. Résoudre le système en (p, p^*, q_d, q_p) :

$$\begin{cases} q_d = 17 - p^2 \\ q_p = p^* - 2 \\ p^* = p - 1 \\ q_p = q_d \end{cases}$$

6. Résoudre le système en (p, p^*, q_d, q_p) :

$$\begin{cases} q_d = 11 - p^2 \\ q_p = p^* - 2 \\ p^* = \frac{3}{4} p \\ q_p = q_d \end{cases}$$

7. Résoudre le système en (λ, x_1, x_2) :

$$\begin{cases} (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = 25 \\ 6 - 2\lambda(x_1 - 4) = 0 \\ 8 - 2\lambda(x_2 - 3) = 0 \end{cases}$$

8. Résoudre le système en (x,y,z) :

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x y z = 0 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$

9. Résoudre le système en (x_1, x_2) :

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 25 \\ x_1^2 + (x_2 - 4)^2 = 9 \end{cases}$$

10. Résoudre le système en (x_1, x_2) :

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 25 \\ x_1^2 + x_2 = 19 \end{cases}$$

11. Résoudre le système en (λ, x_1, x_2) :

$$\begin{cases} (x_1 - 2)^2 + x_2^2 = 4 \\ x_2 - 2\lambda(x_1 - 2) = 0 \\ x_1 - 2\lambda x_2 = 0 \end{cases}$$

12. Résoudre le système en (x, y, z) :

$$\begin{cases} 5x + 4y + 10z = 20 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ 4x + 4y + z = 4 \end{cases}$$

13. Résoudre le système en (x, z) :

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ z = 3x + 5y^2 \end{cases}$$

Et pour le sport... Maîtrises-tu les fonctions logarithmes et exponentielles, revues dans le syllabus de prérequis ?

14. Résoudre le système en (x, y) :

$$\begin{cases} 3^x = 81y \\ 2^x = 16y \end{cases}$$

15. Résoudre le système en (x, y) :

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \log(x) + \log(y) = 1 \end{cases}$$

16. Résoudre le système en (x, y) :

$$\begin{cases} y - \log_3(x+2) = 1 \\ y = \log_3(x) + \log_3(x+4) \end{cases}$$

1.2. Traitement de systèmes linéaires par la méthode dite de GAUSS-JORDAN

La méthode de Gauss-Jordan est une méthode qui permet de traiter un système linéaire, quel que soit le nombre d'équations et de variables que ce système contienne.

Description de la méthode de GAUSS-JORDAN

Supposons que le système à résoudre soit un système de 3 équations linéaires à 3 variables (x,y,z) .

1. Ordonner le système à résoudre
$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x + a_{1,2} \cdot y + a_{1,3} \cdot z = b_1 \\ a_{2,1} \cdot x + a_{2,2} \cdot y + a_{2,3} \cdot z = b_2 \\ a_{3,1} \cdot x + a_{3,2} \cdot y + a_{3,3} \cdot z = b_3 \end{cases}$$

en faisant attention à faire apparaître un réel non nul à la place du terme $a_{1,1}$.
Il faut parfois permuter deux lignes du système.

2. Noter uniquement les coefficients , dans l'ordre :
$$\left| \begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{array} \right|$$

3. Faire apparaître 0 à la place du terme $a_{2,1}$
par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 2 et la ligne 1.
Faire apparaître 0 à la place du terme $a_{3,1}$
par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 3 et la ligne 1.

On obtient
$$\left| \begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array} \right| .$$

4. Faire apparaître 0 à la place du terme $a_{3,2}$
par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 3 et la ligne 2.

On obtient
$$\left| \begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array} \right| .$$

5. Faire apparaître 0 à la place du terme $a_{2,3}$
par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 2 et la ligne 3.

Faire apparaître 0 à la place du terme $a_{1,3}$
par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 1 et la ligne 3.

On obtient
$$\left| \begin{array}{ccc|c} * & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array} \right|.$$

6. Faire apparaître 0 à la place du terme $a_{1,2}$
par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 1 et la ligne 2.

On obtient
$$\left| \begin{array}{ccc|c} * & 0 & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array} \right|.$$

7. Faire apparaître 1 à la place du terme $a_{1,1}$ par division de la ligne 1.
Faire apparaître 1 à la place du terme $a_{2,2}$ par division de la ligne 2.
Faire apparaître 1 à la place du terme $a_{3,3}$ par division de la ligne 3.
... (attention : pas de division par 0)

8. Si le système admet une solution unique, on obtient
$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array} \right|,$$

ce qui est équivalent au système
$$\begin{cases} 1.x + 0.y + 0.z = r \\ 0.x + 1.y + 0.z = s \\ 0.x + 0.y + 1.z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

dont la solution unique évidente est le triple (r , s , t) .

Attention :

Lors de l'application de la méthode, si on obtient

- une ligne constituée de 0 alors le système est indéterminé ;
- une ligne constituée de 0 sauf pour le terme indépendant alors le système est impossible.

Si le système comporte plus de variables que d'équations, alors il y aura autant de variables expliquées que d'équations (les autres variables devenant alors des variables explicatives, traitées comme des paramètres).

Exercice résolu

Traiter ce système en (x,y,z) grâce à la méthode de « Gauss-Jordan » :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

Résolution

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{array} \right| \quad L_3 \rightarrow L_3 - L_2$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + 3L_3 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right| \quad L_1 \rightarrow 5L_1 + 2L_2$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 / 5 \\ L_2 \rightarrow -L_2 / 5 \\ L_3 \rightarrow -L_3 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right| \quad \text{est équivalent au système} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Le système admet donc une solution unique : le triple $(1,2,3)$.

On note aussi $S = \{ (1,2,3) \}$.

Exercices

Traitez les systèmes suivants grâce à la méthode de « GAUSS-JORDAN ».

17.
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - 4z = -5 \end{cases}$$

18.
$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 4x + 7y + 6z = 9 \end{cases}$$

19. Peut-on exprimer x et y en fonction de z ?

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x + y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

20.
$$\begin{cases} x - y + 2z - t = -2 \\ 2x + y + z = 4 \\ -3x - z + 2t = 5 \\ x + y + t = 8 \end{cases}$$

21.
$$\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 0 \\ 2x + y + z - t = 0 \\ 4x + 5y - z + 5t = 0 \\ 5x + 4y + z + t = 0 \end{cases}$$

22.
$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ x + 3y = 7 - z \\ 2x - 4z = 5 - 3y \\ 2x + 1 = 8z - y \end{cases}$$

23. Peut-on exprimer y_1 et y_2 en fonction de x ?

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + x = 5 \\ 4y_1 + 6y_2 - x = 0 \end{cases}$$

24. Soit le système de 3 équations à 6 variables r, s, t, u, v, w :

$$\begin{cases} 2r + 2s - 2t + u - 2v = 0 \\ -r + s - 5t - 2u + 3v - w = 0 \\ 3r + s + 3t + u - v = 0 \end{cases}$$

a) Ce système permet-il de définir les variables r, s, t en fonction des variables u, v, w ?

b) Ce système permet-il de définir les variables u, v, w en fonction des variables r, s, t ?

25. Résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} 6x + 10y + 15z = 30 \\ 4x + 3y + 6z = 12 \\ -8x + 5y = 0 \end{cases}$$

Représenter ensuite, dans un repère $oxyz$, les solutions de chacune des trois équations ; vérifier que l'intersection graphique de ces trois plans correspond au type de solution trouvée analytiquement (intersection vide, un point, une droite ou un plan).

Solution des exercices (Chapitre 1)

1. $S = \{ (0,1), (1,0) \}$
2. $S = \emptyset$
3. $S = \{ (2,1) \}$
4. $S = \{ (3,2,2), (-4,-5,-5) \}$
5. $S = \{ (4,3,1,1), (-5,-6,-8,-8) \}$
6. $S = \{ (\frac{13}{4}, \frac{39}{16}, \frac{7}{16}, \frac{7}{16}), (-4,-3,-5,-5) \}$
7. $S = \{ (-1,1,-1), (1,7,7) \}$
8. $S = \{ (0,-1/3,5/3), (1,0,1), (5/2,1/2,0) \}$
9. $S = \{ (3,4); (-3,4) \}$
10. $S = \{ (4,3), (-4,3), (\sqrt{21},-2), (-\sqrt{21},-2) \}$
11. $S = \{ (0,0,0), (\frac{\sqrt{3}}{2}, 3, \sqrt{3}), (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 3, -\sqrt{3}) \}$
12. $S = \{ (4/7, 0, 12/7) \}$
13.
$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = 5y^2 + 6y - 3 \end{cases}$$
14. $S = \{ (4,1) \}$
15. $S = \{ (5,2), (2,5) \}$
16. $S = \{ (2, 1 + \log_3(4)) \}$
17. $S = \{ (1,2,3) \}$
18. $S = \emptyset$
19.
$$\begin{cases} x = 3z + 1 \\ y = 2 - 5z \end{cases}$$
20. $S = \{ (3,-2,0,7) \}$
21.
$$\begin{cases} x = \frac{5t - 3z}{3} \\ y = \frac{3z - 7t}{3} \end{cases}$$
22.
$$\begin{cases} x = 5z - 2 \\ y = 3 - 2z \end{cases}$$

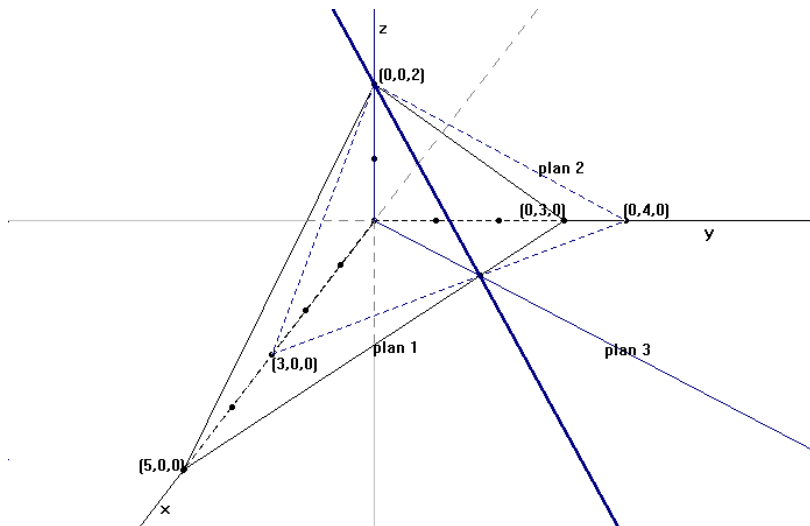
23. Non, on ne peut pas exprimer y_1 et y_2 en fonction de x .

Commentaires : Et pourtant, le système n'est pas impossible... Cet exercice est là pour attirer votre attention sur le fait important suivant : en général, les économistes ne cherchent pas à connaître les solutions d'un système, mais bien à savoir s'ils peuvent **exprimer certaines variables** (les endogènes) **en fonction d'autres** (les exogènes).

24. a) Non
b) Oui

$$25. \begin{cases} x = \frac{5}{8} \cdot y \\ z = -\frac{11}{12} \cdot y + 2 \end{cases}$$

Graphiquement :



L'intersection des trois plans de l'énoncé est une droite, ce qui correspond bien à la solution trouvée analytiquement.

Chapitre 2 : Matrices

♣♣♣ syllabus théorie : pages 19 à 49 ♣♣♣

2.1. Calcul matriciel : somme, produit, **multiplication par un réel**

Exercices

Exercice 1

Soient les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer, si possible :

1. $A+B$
2. $B+C$
3. $A+D$
4. $-A$
5. $2.B - 3.C$
6. $B.A$
7. $A.B$
8. $C.B$
9. $B.C$

Exercice 2

Si possible, effectuer les multiplications suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$
3. $(2 \ 1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (3 \ -1)$

2.2. Inversion d'une matrice **par la méthode de la matrice compagnon**

Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ revient à trouver la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\text{telle que } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Pour inverser la matrice $A_{n \times n}$ par la méthode de la matrice compagnon :

1. Ecrire côte à côte la matrice A et la matrice identité I :

$$A_{n \times n} \mid I_{n \times n}$$

2. Appliquer la méthode de Gauss Jordan à la matrice A jusqu'à obtenir la matrice I . Appliquer au fur et à mesure les mêmes modifications à la matrice *compagnon*.

3. On obtient $I_{n \times n} \mid A^{-1}_{n \times n}$
La matrice inverse est $A^{-1}_{n \times n}$.

Remarque 1 :

La matrice $I_{n \times n}$ est la matrice identité.

Elle comporte des 0 partout

sauf sur la diagonale « descendante » où elle ne comporte que des 1.

Exemple : $I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque 2 :

S'il est impossible de faire apparaître la matrice $I_{n \times n}$ à gauche (par exemple si on obtient une ligne entière de zéros), c'est que la matrice $A_{n \times n}$ n'est pas inversible.

Exercices

Exercice 3

Inverser les matrices suivantes par la méthode de la matrice compagne.

$$1. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.3. Calcul du déterminant d'une matrice carrée

2.3.1. Pour les matrices 1x1, 2x2, 3x3 :

$$\text{dét}(4) = 4$$

$$\text{dét} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 2 = 13$$

$$\text{dét} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 7 & -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{matrix} = 4 \cdot 5 \cdot 9 + (-1) \cdot 0 \cdot 7 + 6 \cdot 3 \cdot (-2) - 7 \cdot 5 \cdot 6 - (-2) \cdot 0 \cdot 4 - 9 \cdot 3 \cdot (-1) = -39$$

Remarque :

La méthode appliquée ici (dite de **SARRUS**) n'est valable **que** pour le calcul d'un déterminant d'une matrice **3X3** !!!

Exercices

Exercice 4 : calculer

1. $\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$

2. $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2.3.2. Pour les matrices quelconques $n \times n$ ($n \geq 1$) :

- Le **mineur** associé à un élément d'une matrice A est le déterminant de la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant dans la matrice A la ligne et la colonne contenant cet élément.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$

calcul du **mineur** associé au terme $a_{1,1}$:

$$\det \begin{pmatrix} \bullet & \times & \times \\ \times & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \times & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{3,2} \cdot a_{2,3}$$

calcul du **mineur** associé au terme $a_{1,2}$:

$$\det \begin{pmatrix} \times & \bullet & \times \\ a_{2,1} & \times & a_{2,3} \\ a_{3,1} & \times & a_{3,3} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{3,1} \cdot a_{2,3}$$

calcul du **mineur** associé au terme $a_{1,3}$:

$$\det \begin{pmatrix} \times & \times & \bullet \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \times \\ a_{3,1} & a_{2,3} & \times \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{2,3} \end{pmatrix} = a_{2,1} \cdot a_{2,3} - a_{3,1} \cdot a_{2,2}$$

•

Le **cofacteur** associé à un élément a_{ij} d'une matrice A est le produit du mineur associé à cet élément par $(-1)^{i+j}$.

Exemple : soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$

calcul du **cofacteur** associé au terme $a_{1,1}$:

$$(-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = (-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

calcul du **cofacteur** associé au terme $a_{1,2}$:

$$(-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

calcul du **cofacteur** associé au terme $a_{1,3}$:

$$(-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{2,3} \end{pmatrix} = (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{2,3} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$

• **Calcul d'un déterminant par la méthode des cofacteurs**

Le déterminant de la matrice A est égal à la somme des produits des éléments d'une rangée de A par les cofacteurs associés à ces éléments.

Exemple :

Calcul du déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$

par la méthode des cofacteurs en développant selon la première ligne de la matrice .

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} &= a_{1,1} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \bullet & \times & \times \\ \times & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \times & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \\ &+ a_{1,2} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} \times & \bullet & \times \\ a_{2,1} & \times & a_{2,3} \\ a_{3,1} & \times & a_{3,3} \end{pmatrix} \\ &+ a_{1,3} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} \times & \times & \bullet \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \times \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \times \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} &= a_{1,1} \cdot (a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{3,2} \cdot a_{2,3}) \\ &- a_{1,2} \cdot (a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{3,1} \cdot a_{2,3}) \\ &+ a_{1,3} \cdot (a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{3,1} \cdot a_{2,2}) \end{aligned}$$

• Intérêt de la méthode des cofacteurs

- 1) La règle des cofacteurs est valable pour calculer le déterminant de **toute matrice carrée** $n \times n$.
- 2) La règle des cofacteurs est très simple lorsqu'elle est appliquée à une **rangée** qui comporte **beaucoup d'éléments nuls**.

Exemple : calculer $\det \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

La rangée comportant le plus de zéros est la deuxième ligne :

$$a_{2,1} \quad a_{2,2} \quad a_{2,3} = 2 \quad 0 \quad 0$$

La règle des cofacteurs appliquée à cette ligne donne

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix} &= 2 \cdot \text{cofacteur}(a_{2,1}) + 0 \cdot \text{cofacteur}(a_{2,2}) + 0 \cdot \text{cofacteur}(a_{2,3}) \\ &= 2 \cdot \text{cofacteur}(a_{2,1}) \\ &= 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \times & 7 & -5 \\ \bullet & \times & \times \\ \times & 4 & 6 \end{pmatrix} \\ &= -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \\ &= -124 \end{aligned}$$

Exercices

Exercice 5

Calculer les déterminants suivants en utilisant la méthode des cofacteurs.

1. $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -9 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{pmatrix}$

6. $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & d \\ c & e & f \end{pmatrix}$

2.4. Inversion d'une matrice **par la méthode de la matrice adjointe**

Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ revient à trouver la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\text{telle que } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

On peut inverser cette matrice en utilisant la **méthode de la matrice compagnon**.
On peut aussi inverser cette matrice en utilisant la **méthode de la matrice adjointe**.

Inversion d'une matrice **par la méthode de la matrice adjointe**

1. **Calculer le déterminant** de la matrice A à inverser.

Si $\det(A) = 0$, alors la matrice A n'est pas inversible

Si $\det(A) \neq 0$, alors la matrice A est inversible

2. Ecrire la **matrice des cofacteurs**.

3. **Transposer** la matrice des cofacteurs. On obtient la **matrice adjointe** $\text{adj}(A)$.

4. La **matrice inverse** est donnée par $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$

Exercice résolu

Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ par la méthode des cofacteurs

Résolution :

1. **Calculer le déterminant**.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2 \neq 0 : \text{ la matrice } A \text{ est inversible.}$$

2. **Ecrire la matrice des cofacteurs**.

Cofacteur du terme $a_{1,1}$: $(-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \bullet & \times \\ \times & 4 \end{pmatrix} = 4$

Cofacteur du terme $a_{1,2}$: $(-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} \times & \bullet \\ 3 & \times \end{pmatrix} = -3$

Cofacteur du terme $a_{2,1}$: $(-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \times & 2 \\ \bullet & \times \end{pmatrix} = -2$

Cofacteur du terme $a_{2,2}$: $(-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & \times \\ \times & \bullet \end{pmatrix} = 1$

La matrice des cofacteurs est $\text{cft}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

3. Transposer la matrice des cofacteurs.

$${}^t \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \text{adj}(A)$$

4. Ecrire la matrice inverse.

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercices

Exercice 6

Pour chacune des matrices suivantes,

- déterminer si la matrice est inversible
- si oui, calculer la matrice inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5. Résoudre un système linéaire par la méthode de Cramer

La méthode de Cramer permet de résoudre un système linéaire

$$\text{de } n \text{ équations à } n \text{ variables} \begin{cases} a_{1,1} \cdot z_1 + a_{1,2} \cdot z_2 + \dots + a_{1,n} \cdot z_n = b_1 \\ a_{2,1} \cdot z_1 + a_{2,2} \cdot z_2 + \dots + a_{2,n} \cdot z_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n,1} \cdot z_1 + a_{n,2} \cdot z_2 + \dots + a_{n,n} \cdot z_n = b_n \end{cases}$$

$$\text{écrit sous forme matricielle} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ou encore $A_{n \times n} \cdot Z_{n \times 1} = B_{n \times 1}$

Résolution d'un système linéaire par la méthode de Cramer

1. Calculer $\det(A)$;

si $\det(A) \neq 0$ alors le système possède une **solution unique**.

2. Quel que soit l'indice i , la valeur de la variable z_i est donné par :

$$z_i = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & b_1 & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & b_2 & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & b_n & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

La $i^{\text{ème}}$ colonne de A est remplacée par la colonne B des termes indépendants

Exercice résolu

Résoudre le système $\begin{cases} x + 2.y = 5 \\ 3.x + 4.y = 11 \end{cases}$ par la méthode de Cramer.

Résolution :

Le système s'écrit, sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$

$$A_{2 \times 2} \cdot Z_{2 \times 1} = B_{2 \times 1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A :

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{le système possède une solution unique.}$$

2. Cette solution est donnée par :

$$\text{la première variable } x = \frac{\det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\text{la deuxième variable } y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} = \frac{-4}{-2} = 2$$

La solution du système est : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Exercices

Exercice 7

Déterminer si les systèmes suivants ont une solution unique.

Si oui, utiliser la méthode de Cramer pour résoudre le système.

$$1. \begin{cases} x - 4y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + 5y + 3z = 1 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + 3y - 3z = 3 \\ 5x - y + 2z = 21 \\ x + y + z = 12 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 2z - y = 4 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

Exercice 8

Soit le modèle de 3 équations linéaires à 5 variables y_1, y_2, y_3, x_1, x_2 :

$$\begin{cases} \alpha.y_1 + y_2 - 2.y_3 + 5.x_2 = 2 \\ -y_1 + 4.y_2 + 3.x_1 - 2.x_2 = 0 \\ -\alpha.y_1 - y_2 + 2.y_3 - x_1 = 1 \end{cases}$$

où les variables y_1, y_2, y_3 sont endogènes et les variables x_1, x_2 sont exogènes et où α désigne un paramètre (pouvant prendre n'importe quelle valeur réelle).

- A quelle condition peut-on exprimer y_1, y_2, y_3 en fonction de x_1, x_2 ?
- En supposant que cette condition est remplie, exprimez y_1 en fonction de x_1, x_2 .

2.6. Résoudre un système linéaire par inversion de matrice

♣♣♣ syllabus théorie : pages 44 à 48 ♣♣♣

Exercice 9

Déterminer si les systèmes suivants ont une solution unique.

Si oui, utiliser la méthode de l'inversion de matrice pour résoudre le système.

$$1. \begin{cases} 3x + z = 1 \\ 2x + y + 4t = -1 \\ 3y + 2z = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Exercice 10

En utilisant la méthode de l'inversion de matrice, exprimer x et y en fonction de t et u à partir du système suivant :

$$\begin{cases} 5x - y + 7t - 0,5u = 1 \\ -10x + 4y - t - u = -2 \end{cases}$$

Solutions des exercices (Chapitre 2)

Exercice 1

1. $A + B$ impossible vu la dimension des matrices

$$2. B + C = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$$

3. $A + D$ impossible vu la dimension des matrices

$$4. -A = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -3 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$5. 2.B - 3.C = \begin{pmatrix} -17 & -6 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$$

6. $B.A$ impossible vu la dimension des matrices

$$7. A.B = \begin{pmatrix} 28 & 64 \\ 6 & 0 \\ 13 & 8 \end{pmatrix}$$

$$8. C.B = \begin{pmatrix} 20 & 16 \\ 21 & 24 \end{pmatrix}$$

$$9. B.C = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 69 & 30 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

$$1. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$3. (8 \ 2)$$

4. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

5. impossible vu la dimension des matrices

6. $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 3

1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$

2. La matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

3. $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{8}{16} & -\frac{8}{16} & \frac{8}{16} & \frac{8}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{11}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{7}{16} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{1}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}$

Exercice 4

1. 0
2. -2

Exercice 5

1. 10
2. -9
3. 0
4. 12
5. $a.b.c$
6. $-a.b.c$

Exercice 6

$$1. A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ La matrice } B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix} \text{ n'est pas inversible.}$$

$$3. C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

$$1. \begin{cases} x = 2/3 \\ y = -1/3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = -1/2 \\ y = -1/2 \\ z = 3/2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = 3/2 \\ y = -1 \\ z = 3/2 \end{cases}$$

Exercice 8

a) Il faut que $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -\frac{1}{4}$.

$$b) y_1 = \frac{(\alpha + 3).x_1 + (2\alpha - 22).x_2 + 4\alpha + 8}{-4\alpha^2 + 3\alpha + 1}$$

Exercice 9

1.
$$\begin{cases} x = -\frac{13}{12} \\ y = -\frac{17}{6} \\ z = \frac{17}{4} \\ t = 1 \end{cases}$$

2. Le système n'a pas de solution unique

3.
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

système homogène à solution unique

Exercice 10

$$\begin{cases} x = \frac{-27t+3u+2}{10} \\ y = \frac{-13t+2u}{2} \end{cases}$$

Chapitre 3 : Variations

♣♣♣ syllabus théorie : pages 5-6 et 72-73 ♣♣♣

Remarque préliminaire importante !!!

Dans tout ce chapitre, nous travaillerons avec des modèles mathématiques pour lesquels **il est possible d'exprimer explicitement les variables endogènes en fonctions des variables exogènes**. Les autres cas devront être traités différemment, comme nous le verrons plus tard dans ce cours.

3.1. Modèles à deux variables

Soit $y = f(x)$ un modèle explicitant la variable y en fonction de la variable x .

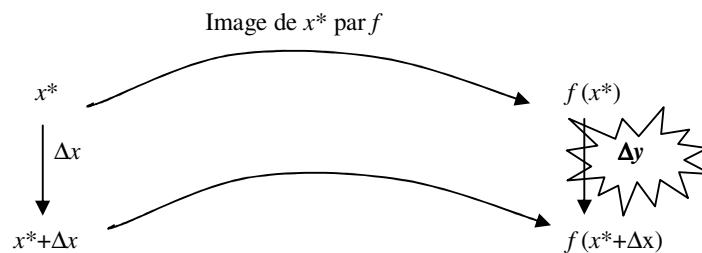
Objectif :

étudier le comportement de la variable endogène y
au voisinage de x^* ,
valeur particulière de la variable exogène x

(on dit aussi étudier le comportement local de la fonction f au voisinage de x^*).

3.1.1. Variation absolue (ou en valeur)

On envisage une variation en valeur de la variable x à partir de x^* . Cette variation sera positive ou négative ; on la notera Δx .



Nous allons nous intéresser à la variation Δy (induite par la variation Δx) :

comment varie y
(c'est-à-dire comment la fonction f réagit-elle)
si x^* devient $x^* + \Delta x$?
(c'est-à-dire si l'on fait subir à x une variation absolue de valeur Δx ?)

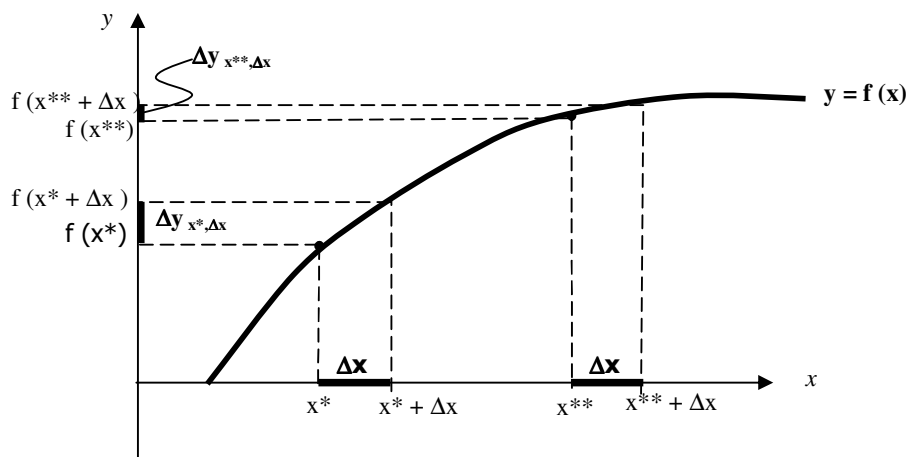
La variation absolue Δy de y
(ou encore variation en valeur de la fonction f)

est égale à :

$$\Delta y = f(x^* + \Delta x) - f(x^*)$$

La variation absolue d'une variable s'exprime dans la même unité que cette variable.
Elle peut être un nombre positif ou négatif.

Attention : Pour un même Δx
mais pour deux valeurs différentes de la variable x ,
le Δy peut être différent !



DONC : Pour être précis, il faudrait faire apparaître dans la notation que Δy dépend à la fois de x^* et de Δx . Une notation du type $\Delta y(x^*, \Delta x)$ ou $\Delta y_{x^*, \Delta x}$ serait donc meilleure. Afin de ne pas alourdir la présentation, nous continuerons cependant à écrire Δy (mais il faut veiller à garder cette remarque en mémoire).

Il est parfois intéressant de calculer le **rapport des variations absolues :**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Exemple

Considérons l'expression suivante :

$$C = 3.Q^3 - 1800.Q^2 + 360000.Q + 1000000$$

$f(Q)$

Nous allons faire varier Q et voir ce qui se passe.

Choisissons $\Delta Q = 1$ et regardons comment C varie ...	
autour de $Q^* = 100$	autour de $Q^* = 200$
<ul style="list-style-type: none">• Pour $Q^* = 100$, $f(Q^*) = 22000000$• Pour $Q^* + \Delta Q = 101$, $f(Q^* + \Delta Q) = 22089103$	<ul style="list-style-type: none">• Quand $Q^* = 200$, $f(Q^*) = 25000000$• Quand $Q^* + \Delta Q = 201$, $f(Q^* + \Delta Q) = 25000003$
ΔC vaut donc...	
$\Delta C = 89103$	$\Delta C = 3$

Remarquons que pour un même ΔQ , ΔC varie d'après la valeur de Q^* !!!

Exercice 1

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow y = \sqrt{x}$.

Partant de $x^* = 1$, on donne à la variable x une variation absolue de valeur

- a) 2
- b) -1.

Quelles sont les variations absolues de la variable y correspondantes ?

Calculez aussi les rapports des variations absolues $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ correspondants.

Visualisez graphiquement chacune des valeurs qui apparaissent dans l'exercice.

Exercice 2

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow y = \sqrt{x}$.

Partant de $x^* = 2$, on donne à la variable x une variation absolue de valeur

- a) 2
- b) -1.

Quelles sont les variations absolues de la variable y correspondantes ?

Calculez aussi les rapports des variations absolues $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ correspondants.

Cas particulier : Fonction linéaire à une variable

Soit le modèle linéaire $y = a x + b$. Rappelons que la représentation graphique de ce modèle dans un repère oxy est une droite, de pente a .

Nous travaillons au voisinage du point x^* et nous recherchons la variation Δy correspondant à une variation Δx de x .

Rappel : La variation Δy de y est $\Delta y = f(x^* + \Delta x) - f(x^*)$

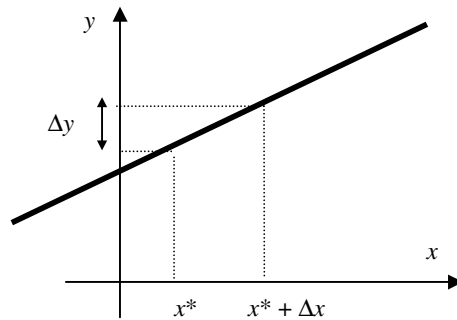
En appliquant cette formule dans ce cas particulier, on obtient :

$$\Delta y = [a(x^* + \Delta x) + b] - [a(x^*) + b] = a \cdot \Delta x.$$

Dans le cas linéaire, on a donc :

$$\Delta y = a \cdot \Delta x$$

où a est la pente de la droite.



Donc, si Δx est constant, Δy est constant aussi :

Δy ne dépend pas de la valeur x^* à partir de laquelle on considère la variation Δx .

De plus, on constate que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est constant

et vaut la pente de la droite d'équation $y = ax + b$.

Exemple

Soit un modèle linéaire de type $y = a.x + b$:

$$C = 150000.Q + 1000000$$

où C est la variable endogène et Q la variable exogène.

Dans ce cas, $a = 150000$ et $b = 1000000$.

Choisissons une variation en valeur d'une unité de la variable Q ($\Delta Q = 1$) ; quelle que soit la valeur Q^* de Q à partir de laquelle on travaille, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} Q^* & \rightarrow & C(Q^*) = 150000.Q^* + 1000000 \\ \Delta Q = 1 & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q^* + 1 & \rightarrow & C(Q^* + 1) = 150000.(Q^* + 1) + 1000000 \end{array}$$

ce qui donne

$$\Delta C = C(Q^* + 1) - C(Q^*) = 150000.$$

Quel que soit Q^* , on constate donc que la variation ΔC correspondant à une variation en valeur d'une unité de Q est égale à 150000.

Observons aussi que $\Delta C = a \cdot \Delta Q$ (ce qui est caractéristique du linéaire).

3.1.2. Variation relative (ou en pourcentage)

Mathématiquement, on appelle **variation relative de la variable x** (en un point x^* , par rapport à une variation absolue de valeur Δx),

$$\text{le rapport } \frac{\Delta x}{x^*}.$$

De la même manière, la variation relative de la variable y (correspondant à une variation relative Δx de la variable x à partir du point x^*)

$$\text{est le rapport } \frac{\Delta y}{y^*}.$$

Les variations relatives sont des nombres sans unités, qui peuvent être positifs ou négatifs.

Signalons que la tradition est d'exprimer les variations relatives en pourcentages. Au lieu de « variation relative », on dit parfois « (taux de) variation en pourcentage ».

Il est parfois intéressant de calculer le **rapport des variations relatives**, encore appelé **élasticité de type arc** :

$$\frac{\frac{\Delta y}{y^*}}{\frac{\Delta x}{x^*}}.$$

Exercice 3

- Augmenter la valeur de x^* de 25% revient à multiplier x^* par ... ?
- Diminuer la valeur de x^* de 10% revient à multiplier x^* par ... ?

Exercice 4

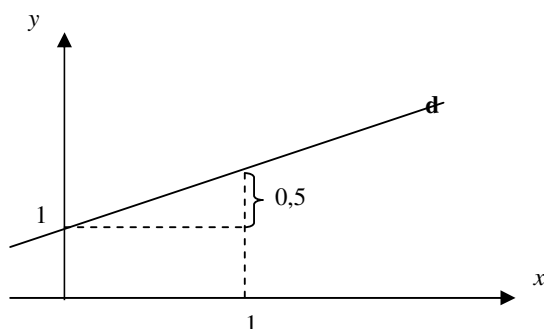
Soit $y = 3x + 2$.

- Quelle variation relative de la variable x correspond à une variation absolue $\Delta x = 0,5$ à partir de la valeur $x^* = 2$? (Exprimez votre réponse en %.)
- Calculez la variation absolue de la variable y correspondant à une variation absolue de x de 0,5 à partir de la valeur 2.
- Calculez la variation relative de y correspondante.
- Calculez le rapport des variations absolues correspondant.
- Calculez le rapport des variations relatives correspondant.

Exercice 5

Même question avec $x^* = 5$ et $\Delta x = -0,2$.

Exercice 6



- Donnez l'équation de la droite d , et l'expression de la fonction correspondante (dont le graphe est d).
- On donne, à partir de $x^* = 5$, une variation relative à la variable x de 20%. Calculez le Δy correspondant, ainsi que les rapports des variations absolues et relatives.
- Idem à partir de $x^* = 7$, avec la même variation relative de x .
- Peut-on dire que, pour deux valeurs différentes x^* et x^{**} de la variable x , une même variation relative de la variable x impliquera une même variation relative de la variable y ?

Exercice 7

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow y = x^2$.

On donne à la variable x une augmentation relative de 25% à partir de

- $x^* = 4$
- $x^* = 12$
- $x^* = 20$.

Calculez les variations relatives de y correspondantes, et les rapports des variations relatives correspondants. Que constate-t-on ? Pouvait-on le prévoir ?

Exercice 8

Mêmes questions, en donnant à x une augmentation relative de 5%.

Remarque : On constate dans cet exercice qu'en partant d'une variation de x plus petite qu'à l'exercice 7, le rapport des variations relatives se rapproche de la valeur 2. A la limite, pour des variations de x de plus en plus petite :

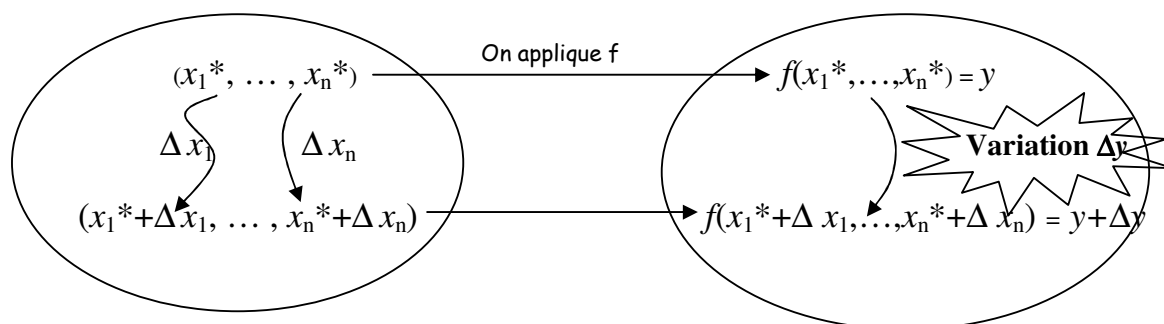
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{y^*}}{\frac{\Delta x}{x^*}} = \frac{x^*}{y^*} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^*}{y^*} \cdot f'(x^*) = \frac{x^*}{(x^*)^2} \cdot 2x^* = 2$$

C'est l'élasticité de type point (cf. syllabus théorie, page 123-124), qui, dans le cas d'une **fonction puissance**, est **constante** (et vaut l'exposant de la fonction).

3.2. Modèles à trois variables ou plus

Soit $y = f(x_1, \dots, x_n)$ un modèle explicitant la variable y en fonction des variables x_1, \dots, x_n .

Question : comment varie y au voisinage de (x_1^*, \dots, x_n^*) [valeurs particulières des variables exogènes x_1, x_2, \dots, x_n] ?



Un point voisin de (x_1^*, \dots, x_n^*) peut s'écrire $f(x_1^* + \Delta x_1, \dots, x_n^* + \Delta x_n)$

où chaque Δx_i représente une variation en valeur de la variable x_i .

Aux variations en valeur $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ des variables exogènes x_1, x_2, \dots, x_n [au départ de (x_1^*, \dots, x_n^*)] correspond une variation en valeur de la variable y . Elle est notée Δy . C'est à cette variation que nous allons nous intéresser. Il s'agit là d'une simple généralisation au cas de plusieurs variables exogènes de ce que nous venons de faire dans le cas où il n'y a qu'une seule variable exogène.

Variation de valeur Δy de y

(induite par des variations $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ au départ de (x_1^*, \dots, x_n^*)) :

$$\Delta y = f(x_1^* + \Delta x_1, \dots, x_n^* + \Delta x_n) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)$$

N.B. Pour être précis, il faudrait faire apparaître dans la notation que Δy dépend de x_1^*, \dots, x_n^* et de $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$. Une notation du type $\Delta y(x_1^*, \dots, x_n^*, \Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ serait donc meilleure. Afin de ne pas alourdir la présentation, nous continuerons cependant à écrire Δy mais il faut veiller à garder cette remarque en mémoire.

Exercice résolu

Le revenu d'une compagnie est donné par l'équation $R = 5 \cdot W^2 \cdot A^3$

Nous avons donc un modèle du type $y = f(x_1, x_2)$ [R correspond à y , W correspond à x_1 et A correspond à x_2].

W représente les salaires payés (en millions d'euros) et A les dépenses en publicité (en millions d'euros).

- Si $W^* = 30$ et $A^* = 2$, alors $R^* = R(W^*, A^*) = \dots$.
- Que devient le revenu (de combien s'accroît-il ?) si W augmente de 5% (au départ de $W^* = 30$) sans modifier A ?
- Que devient le revenu si A diminue de 2% (au départ de $A^* = 2$) sans modifier W ?
- Que devient le revenu si à la fois W augmente de 5% (au départ de $W^* = 30$) et A diminue de 2% (au départ de $A^* = 2$) ?

Résolution

- a) Notre modèle est $R = 5 \cdot W^2 \cdot A^3$

et nous travaillons au départ de $(W^*, A^*) = (30, 2)$

Nous avons $R(W^*, A^*) = 5 \cdot (30)^2 \cdot (2)^3 = 36000$.

- b) Quand on envisage une variation des salaires de 5% (au départ d'une valeur donnée pour les salaires), on parle de variation relative.

Mathématiquement, la variation relative en W^* est égale à $\frac{\Delta W}{W^*}$.

Dans ce cas, $W^* = 30$ et $\frac{\Delta W}{W^*} = \frac{5}{100} \Rightarrow$ la variation en valeur est :

$$\Delta W = \frac{5 \cdot W^*}{100} = \frac{150}{100} = 1.5R(W^* + \Delta W, A^*) = 5 \cdot (30 + 1,5)^2 \cdot (2)^3 = 39690.$$

Donc la variation ΔR de R est égale à $39690 - 36000 = 3690$: le revenu s'accroît de 3690 €.

- c) Pour A , nous avons $\frac{\Delta A}{A^*} = -\frac{2}{100}$

\Rightarrow la variation en valeur est :

$$\Delta A = -\frac{2 \cdot A^*}{100} = -0.04R(W^*, A^* + \Delta A) = 5 \cdot (30)^2 \cdot (2 - 0,04)^3 = 33882,912.$$

Donc la variation ΔR de R est égale à $33882,912 - 36000 = -2117,088$: le revenu diminue de 2117,088 €.

- d) $R(W^* + \Delta W, A^* + \Delta A) = 5 \cdot (30 + 1,5)^2 \cdot (2 - 0,04)^3 = 37355,91048$.

Donc la variation ΔR de R est égale à $37355,91048 - 36000 = 1355,91048$: le revenu augmente de 1355,91 €.

Exercice 9

Soit $y = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^3$ et prenons $x_1^* = 40$ et $x_2^* = 30$.

- Si $\Delta x_1 = 1$ et $\Delta x_2 = -1$, que vaut Δy ?
- Si $\Delta x_1 = -1$ et $\Delta x_2 = 1$, que vaut Δy ?

Cas particulier : fonction linéaire à plusieurs variables

Soit le modèle linéaire $y = a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n + b$.

Nous travaillons au voisinage du point (x_1^*, \dots, x_n^*) et nous recherchons la variation Δy correspondant à des variations Δx_1 de $x_1, \dots, \Delta x_n$ de x_n .

Rappel : La variation Δy de y est $\Delta y = f(x_1^* + \Delta x_1, \dots, x_n^* + \Delta x_n) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)$.

Comme, dans ce cas, $f(x_1, \dots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n + b$, il vient :

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 \cdot x_1^* + \dots + a_n \cdot x_n^* + b$$

$$f(x_1^* + \Delta x_1, \dots, x_n^* + \Delta x_n) = a_1 \cdot (x_1^* + \Delta x_1) + \dots + a_n \cdot (x_n^* + \Delta x_n) + b$$

Donc, $\Delta y = a_1 \cdot x_1^* + a_1 \cdot \Delta x_1 + \dots + a_n \cdot x_n^* + a_n \cdot \Delta x_n + b - [a_1 \cdot x_1^* + \dots + a_n \cdot x_n^* + b]$

ce qui donne, après simplifications :

$$\Delta y = a_1 \cdot \Delta x_1 + \dots + a_n \cdot \Delta x_n$$

où a_1, \dots, a_n sont les coefficients du modèle linéaire sur lequel on travaille au départ (ou encore, où a_1, \dots, a_n sont les coefficients directeurs de l'hyperplan d'équation $y = a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n + b$).

C'est une généralisation directe de ce qui se passe pour des modèles du type $y = a \cdot x + b$: on a vu que dans ce cas, $\Delta y = a \cdot \Delta x$, où a est la pente de la droite d'équation $y = a \cdot x + b$.

Exercice 10

Soit $y = 3x_1 - 2x_2 + x_3$, un modèle permettant d'expliciter la variable y en fonction des variables x_1, x_2 et x_3 .

- Calculez la variation absolue de y correspondant à des variations $\Delta x_1 = 2/3$ et $\Delta x_2 = -1$, en partant du point $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, 2, 3)$.
- Partant de $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, 2, 3)$, on a effectué une variation absolue de 1 unité sur l'une des variables x_1, x_2, x_3 . La nouvelle valeur de la variable y (induite par cette variation) est de 0. Sur quelle variable a porté la variation ?

Exercice 11

Soit le modèle de 3 équations linéaires à 5 variables y_1, y_2, y_3, x_1, x_2 :

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - 4y_3 & + 5x_2 = 2 \\ -y_1 + 4y_2 & + 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2y_1 - y_2 + 2y_3 - x_1 & = 1 \end{cases}$$

où les variables y_1, y_2, y_3 sont endogènes et les variables x_1, x_2 sont exogènes.

- Si c'est possible, exprimez (analytiquement) les variables endogènes en fonction des variables exogènes.
- Supposons que l'on ait observé les valeurs suivantes des variables exogènes : $x_1^* = 10$ et $x_2^* = 7$. Déterminez la variation absolue de la variable endogène y_3 induite par les variations absolues -1 de la variable x_1 et $\frac{1}{5}$ de la variable x_2 .

Solution des exercices (Chapitre 3)

Exercice 1

a) La variation absolue de y est donnée par $\Delta y = f(x^* + \Delta x) - f(x^*) = 0,73$.

Le rapport des variations absolues est donné par $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,365$.

b) $\Delta y = -1$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

Exercice 2

a) $\Delta y = 0,59$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,395.$$

b) $\Delta y = -0,41$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -0,29.$$

Exercice 3

a) Augmenter la valeur de x^* de 25% revient à multiplier x^* par 1,25.

b) Diminuer la valeur de x^* de 10% revient à multiplier x^* par 0,9.

Exercice 4

La variation relative de x est de 25%.

a) La variation absolue de y est 1,5.

b) La variation relative de y est de 18,75%.

c) Le rapport des variations absolues est 3.

d) Le rapport des variations relatives est 0,75.

Exercice 5

a) La variation relative de x est de -4%.

b) La variation absolue de y est -0,6.

c) La variation relative de y est de $-3/85$ (-3,53%).

d) Le rapport des variations absolues vaut 3.

e) Le rapport des variations relatives vaut $15/17$ (0,8825).

Exercice 6

a) Equation de la droite : $y = \frac{1}{2}x + 1$. Fonction correspondante : $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

b) $\Delta y = \frac{1}{2}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y^*}{x^*} = \frac{5}{7} \approx 0,7143$.

c) $\Delta y = 0,7$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y^*}{x^*} = \frac{7}{9} \approx 0,7777$.

d) Non.

Exercices 7 et 8

	x^*	$\Delta x/x^*$	Δx	$f(x^*)$	$f(x^*+\Delta x)$	Δy	$\Delta y/\Delta x$	$\Delta y/y^*$	élast
Exercice 7	4	1/4	1	16	25	9	9	9/16	2.25
	12	1/4	3	144	225	81	27	9/16	2.25
	20	1/4	5	400	625	225	45	9/16	2.25
Exercice 8	4	1/20	1/5	16	17.64	1.64	8.2	0.1025	2.05
	12	1/20	3/5	144	158.76	14.76	24.6	0.1025	2.05
	20	1/20	1	400	441	41	41	0.1025	2.05

Conclusion : La variation relative de y est constante pour une même variation relative de x quelle que soit la valeur de x^* .

Exercice 9

a) $\Delta y = -2416$

b) $\Delta y = 2606$

Exercice 10

a) La fonction est linéaire : $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - 2x_2 + x_3$.

Les coefficients sont $a_1 = 3$, $a_2 = -2$ et $a_3 = 1$.

On a donc : $\Delta y = 3 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 4$.

$$\begin{aligned} \text{b) } f(1+\Delta x_1, 2+\Delta x_2, 3+\Delta x_3) &= 3(1+\Delta x_1) - 2(2+\Delta x_2) + (3+\Delta x_3) \\ &= 2 + 3\Delta x_1 - 2\Delta x_2 + \Delta x_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

or $2 + 3\Delta x_1 - 2\Delta x_2 + \Delta x_3 = 0$ si $\Delta x_1 = 0$, $\Delta x_2 = 1$ et $\Delta x_3 = 0$.

La variation a donc porté sur la variable x_2 .

Exercice 11

$$\text{a) } \begin{cases} y_1 = \frac{-5x_1 + 18x_2 - 16}{9} \\ y_2 = \frac{-8x_1 + 9x_2 - 4}{9} \\ y_3 = \frac{-x_1 + 5x_2 - 3}{2} \end{cases}$$

b) $\Delta y_3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \Delta x_1 + \frac{5}{2} \cdot \Delta x_2 = 1$

Chapitre 4 : Dérivées partielles de fonctions de plusieurs variables

♣♣♣ syllabus théorie : pages 88-97 ♣♣♣

4.1. Technique de dérivation

4.1.1. Dérivées partielles du premier ordre

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, une fonction de n variables.

Notation de la **dérivée partielle du premier ordre** de f par rapport à la variable x_i

- pour l'économiste : f'_{x_i}
- pour le mathématicien : $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ou $\frac{\partial}{\partial x_i} f$

Exercice

Exercice 1

Calculer les dérivées partielles du premier ordre de la fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans les cas suivants

1. $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3 x_1 x_2 + 5$
2. $f(x_1, x_2) = e^{(x_1^2 + x_2^2)}$
3. $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} + x_2 \ln x_1$
4. $f(x_1, x_2) = \ln (x_1 x_2)$
5. $f(x_1, x_2) = \sin x_1 + x_2 \cos (x_1^2)$
6. $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1 \cdot x_2^2} + x_1 \ln (x_2 x_3^3)$

4.1.2. Dérivées partielles du second ordre

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de n variables.

Notation de la **dérivée partielle du second ordre** de f par rapport à la variable x_i puis par rapport à la variable x_k

- pour l'économiste : $(f'_{x_i})_{x_k}$ ou $f''_{x_i x_k}$

- pour le mathématicien : $\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$ ou $\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_i} f$

NB : $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} f$ est aussi noté $\frac{\partial^2}{(\partial x_i)^2} f$

Exercice

Exercice 2

Calculer les dérivées partielles du second ordre des fonctions n°1, 2 et 3 données dans l'exercice 1.

4.2. Application : approximation linéaire

4.2.1. Fonctions d'une variable (cf. cours p. 85)

Soit f une fonction de R dans R , soit x^* un élément du domaine de f .

On appelle **fonction approximation linéaire** f_{lin} de f en x^* , la fonction définie comme suit :

$$f_{lin(x^*)}(x) = f(x^*) + f'(x^*) \cdot (x - x^*)$$

Notons que $y = f(x^*) + f'(x^*) \cdot (x - x^*)$ est une équation de la **droite tangente** au graphe de f au point $(x^*, f(x^*))$.

Exercice résolu

Déterminer la fonction approximation linéaire f_{lin} de la fonction f en $x^* = 1$ si f est définie par :

$$f: R \rightarrow R : x \rightarrow f(x) = x^2 \ln x$$

Résolution

On sait que $f_{lin(x^*)}(x) = f(x^*) + f'(x^*) \cdot (x - x^*)$.

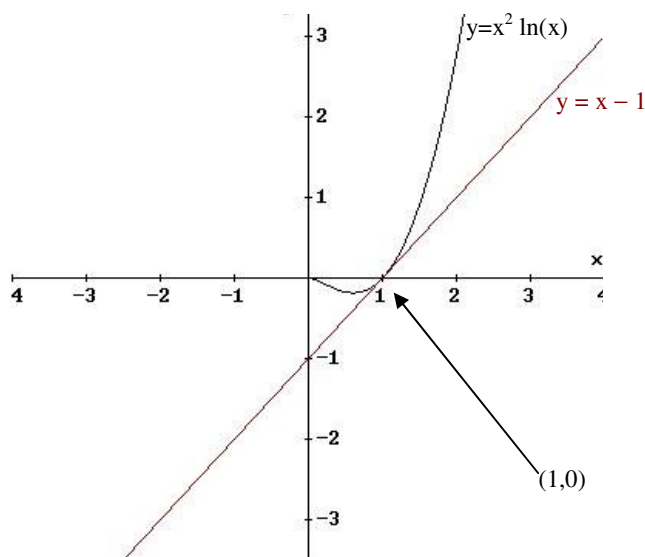
Ici,

- $x^* = 1$
- $f(x^*) = f(1) = 0$
- $f'(x) = 2x \ln x + x$
- $f'(x^*) = f'(1) = 1$

On en déduit que $f_{lin(1)}(x) = 0 + 1 \cdot (x - 1)$

ou encore $f_{lin(1)}(x) = x - 1$

Graphiquement, $y = x - 1$ est une équation de la droite tangente au graphe de f au point $(1,0)$.



4.2.2. Fonctions de plusieurs variables (♣♣♣ syllabus théorie : page 96 ♣♣♣)

Soit F une fonction de R^2 dans R , soit (x_1^*, x_2^*) un élément du domaine de F .

On appelle **fonction approximation linéaire** F_{lin} de F en (x_1^*, x_2^*) , la fonction définie comme suit :

$$F_{lin}(x_1^*, x_2^*)(x_1, x_2) = F(x_1^*, x_2^*) + \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) \cdot (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \cdot (x_2 - x_2^*)$$

Notons que $y = F(x_1^*, x_2^*) + \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) \cdot (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \cdot (x_2 - x_2^*)$ est une équation du **plan tangent** au graphe de F au point $(x_1^*, x_2^*, F(x_1^*, x_2^*))$.

De manière générale :

Soit F une fonction de R^n dans R , soit (x_1^*, \dots, x_n^*) un élément du domaine de F .

On appelle **fonction approximation linéaire** F_{lin} de F en (x_1^*, \dots, x_n^*) , la fonction définie comme suit :

$$F_{lin}(x_1^*, \dots, x_n^*)(x_1, \dots, x_n) = F(x_1^*, \dots, x_n^*) + \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1^*, \dots, x_n^*) \cdot (x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1^*, \dots, x_n^*) \cdot (x_n - x_n^*)$$

Notons que $y = F(x_1^*, \dots, x_n^*) + \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1^*, \dots, x_n^*) \cdot (x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1^*, \dots, x_n^*) \cdot (x_n - x_n^*)$ est une équation de l'**hyperplan** tangent au graphe de F au point $(x_1^*, \dots, x_n^*, F(x_1^*, \dots, x_n^*))$ (plus de représentation graphique possible).

Exercice résolu

Déterminer la fonction approximation linéaire F_{lin} de la fonction F en $(1,-2)$, avec

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \rightarrow F(x_1, x_2) = x_2^2 \cdot e^{(2 \cdot x_1 + x_2)} + x_1^3 \cdot x_2$$

Résolution

On sait que

$$F_{lin}(x_1^*, x_2^*) (x_1, x_2) = F(x_1^*, x_2^*) + \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) \cdot (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \cdot (x_2 - x_2^*)$$

Ici,

- $(x_1^*, x_2^*) = (1, -2)$
- $F(x_1^*, x_2^*) = F(1, -2) = 2$
- $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2 x_2^2 e^{(2 \cdot x_1 + x_2)} + 3 x_1^2 x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(1, -2) = 2$
- $\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2 x_2 e^{(2 \cdot x_1 + x_2)} + x_2^2 e^{(2 \cdot x_1 + x_2)} + x_1^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(1, -2) = 1$

La fonction approximation linéaire F_{lin} de la fonction F en $(1,-2)$ est donc donnée par

$$F_{lin(1,-2)}(x_1, x_2) = 2 + 2 \cdot (x_1 - 1) + 1 \cdot (x_2 + 2)$$

c'est-à-dire

$$F_{lin(1,-2)}(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + x_2 + 2$$

Graphiquement, $y = 2 \cdot x_1 + x_2 + 2$ est une équation du plan tangent au graphe de F au point $(1, -2, 2)$.

Exercices

Exercice 3

1. Déterminer la fonction approximation linéaire f_{lin} de la fonction f en $x^*=2$, où

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) = \frac{3 \cdot x^2 + 2}{2 \cdot x + 3}$$

2. Déterminer la fonction approximation linéaire g_{lin} de la fonction g en $x^*=0$, où

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow g(x) = e^x$$

3. Déterminer la fonction approximation linéaire G_{lin} de la fonction G en $(z_1^*, z_2^*, z_3^*) = (2, 1, 0)$, où

$$G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (z_1, z_2, z_3) \rightarrow G(z_1, z_2, z_3) = (z_1^2 + z_2^3) \cdot e^{z_3}$$

4. Déterminer la fonction approximation linéaire H_{lin} de la fonction H en $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (3, e, 1)$, où

$$H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow H(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 \cdot \ln(x_2^2) + x_1 x_2 x_3^3$$

4.2.3. Méthode de Newton

(♣♣♣ syllabus théorie : pages 119-123 ♣♣♣)

- A quoi sert la méthode de Newton ?

La **méthode de Newton** permet de trouver **une** solution de l'équation $f(x) = 0$ (où f est une fonction d'une variable x), ou du moins une approximation de cette solution.

En d'autres termes, la **méthode de Newton** permet de trouver une racine de f , c'est-à-dire un réel x^* tel que $f(x^*)=0$.

- Description de la méthode

La formule de récurrence de la méthode de Newton est donné par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

(pour comprendre l'origine de cette formule, voir cours p. 120).

Comment l'appliquer ?

- Choisir x_0 tel que $f'(x_0) \neq 0$ (tangente au graphe de f en x_0 non horizontale).
- Calculer $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
- Calculer $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$
- etc ...
- Si la suite de réels $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ converge vers un certain réel x^* , alors x^* est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice résolu

En utilisant la méthode de Newton et en partant de $x_0 = 0$, trouver la valeur approchée d'une solution de l'équation suivante :

$$4x^3 + 8x^2 - 31x - 35 = 0$$

Résolution

Posons $f(x) = 4x^3 + 8x^2 - 31x - 35$; donc, $f'(x) = 12x^2 + 16x - 31$.

Valeur initiale : $x_0 = 0$.

$$1^{\text{ère}} \text{ itération : } x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = 0 - \frac{-35}{-31} \approx -1,129032258$$

$$2^{\text{ème}} \text{ itération : } x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -\frac{35}{31} - \frac{f\left(\frac{-35}{31}\right)}{f'\left(\frac{-35}{31}\right)} \approx -0,997518839$$

$$3^{\text{ème}} \text{ itération : } x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -0,997518839 - \frac{f(-0,997518839)}{f'(-0,997518839)} \approx -0,9999993$$

$$4^{\text{ème}} \text{ itération : } x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -0,9999993 - \frac{f(-0,9999993)}{f'(-0,9999993)} = -1$$

Vérification :

-1 est bien une solution de l'équation $4x^3 + 8x^2 - 31x - 35 = 0$

$$\text{car } 4 \cdot (-1)^3 + 8 \cdot (-1)^2 - 31 \cdot (-1) - 35 = 0$$

Question subsidiaire : Comment pourrait-on continuer l'exercice pour déterminer toutes les solutions de l'équation ?

Exercices

Exercice 4

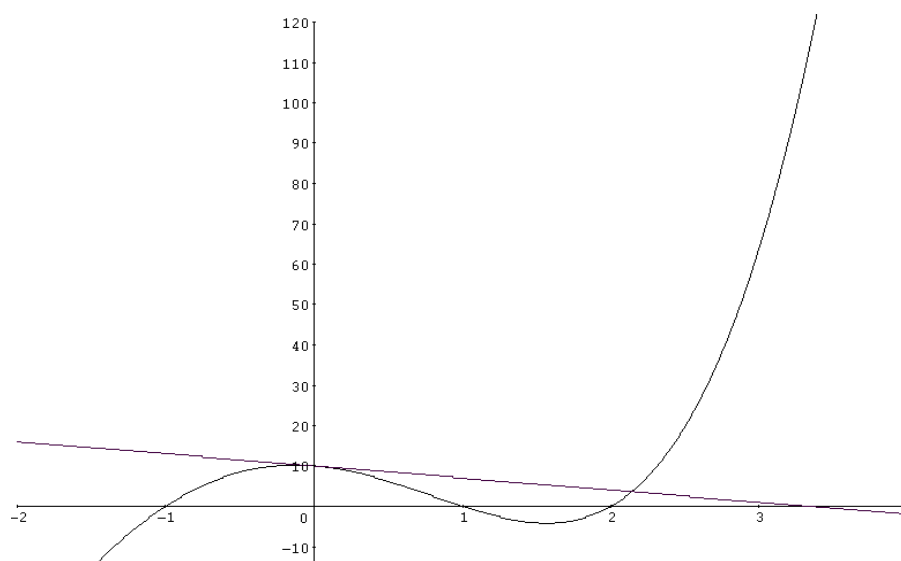
Trouver graphiquement (cf. graphe ci-dessous) vers quelle solution de l'équation

$$x^4 + 3x^3 - 11x^2 - 3x + 10 = 0$$

la méthode de Newton convergerait en prenant comme valeur de départ $x_0 = 0$.

Le graphe ci-dessous présente une représentation de la fonction

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 11x^2 - 3x + 10.$$



Exercice 5

Dessinez le graphe d'une fonction f telle que $f(2) = 0$ et pour laquelle, en prenant comme point de départ pour l'application de la méthode de Newton la valeur $x_0 = 1$, vous obtenez pour x_1 une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 6

En utilisant la méthode de Newton et en partant de $x_0 = 0$, trouver la valeur approchée d'une solution de chacune des équations suivantes, obtenue après 3 itérations.

- a) $x^3 - 1,5x^2 - 5,5x + 3 = 0$
- b) $\cos(x) = 0$
- c) $e^x = x^4$

Exercice 7 (pour aller plus loin...)

Utilisez le tableur Excel et la possibilité de « tirer » des formules d'une case à la suivante pour déterminer, grâce à la formule de récurrence de Newton, les solutions de

$$l'équation \quad x^4 - \frac{59}{3}x^3 - \frac{845}{3}x^2 + \frac{10975}{3}x + 1250 = 0.$$

Solutions des exercices (Chapitre 4)

Exercice 1

$$1. \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 3x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 3x_2^2 - 3x_1$$

$$2. \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 \cdot e^{(x_1^2+x_2^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_2 \cdot e^{(x_1^2+x_2^2)}$$

$$3. \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2} + x_2 \cdot \frac{1}{x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -\frac{x_1}{(x_2)^2} + \ln x_1$$

$$4. \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2}$$

$$5. \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \cos x_1 - 2x_1 x_2 \sin(x_1^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \cos(x_1^2)$$

$$6. \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 \cdot e^{x_1 \cdot x_2^2} + \ln(x_2 x_3^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 x_2 e^{x_1 \cdot x_2^2} + x_1 \cdot \frac{1}{x_2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 \frac{1}{x_3}$$

Exercice 2

$$1. \frac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2}(x_1, x_2) = 6x_1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x_2)^2}(x_1, x_2) = 6x_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = -3$$

$$2. \frac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2}(x_1, x_2) = 2 \cdot e^{(x_1^2+x_2^2)} + 4 \cdot x_1^2 \cdot e^{(x_1^2+x_2^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = 4x_1 x_2 \cdot e^{(x_1^2+x_2^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x_2)^2}(x_1, x_2) = 2 \cdot e^{(x_1^2+x_2^2)} + 4 \cdot x_2^2 \cdot e^{(x_1^2+x_2^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = 4x_1 x_2 \cdot e^{(x_1^2+x_2^2)}$$

$$3. \frac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2}(x_1, x_2) = -\frac{x_2}{x_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x_2)^2}(x_1, x_2) = 2 \cdot \frac{x_1}{x_2^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_1}$$

Exercice 3

1. $f_{lin(2)}(x) = \frac{8}{7}x - \frac{2}{7}$

2. $g_{lin(0)}(x) = x + 1$

3. $G_{lin(2,1,0)}(z_1, z_2, z_3) = 4z_1 + 3z_2 + 5z_3 - 6$

4. $H_{lin(3,e,1)}(x_1, x_2, x_3) = (54 + e) \cdot x_1 + \left(\frac{54}{e} + 3\right) \cdot x_2 + 9e x_3 - 162 - 12e$

Exercice 4

Convergence vers la valeur $x^* = 2$.

Exercice 6

a) $x_0 = 0$

$x_1 \approx 0,54545454$

$x_2 \approx 0,49996991757$

$x_3 \approx 0,5$

Solution réelle = 0,5

(les autres solutions de cette équation sont $x = 3$ et $x = -2$)

b) Impossible d'appliquer la méthode de Newton au départ de 0 car $\sin(0) = 0$

c) $x_0 = 0$

$x_1 = -1$

$x_2 \approx -0,85527976$

$x_3 \approx -0,817730774$

Solution réelle $\approx -0,8155534188$

(l'autre solution de cette équation est $x = 1,42961182$)

Exercice 7

Les solutions de cette équation sont -15 , $-\frac{1}{3}$, 10 et 25 .

Chapitre 5 : Différentielles

♣♣♣ syllabus théorie : pages 98-118 ♣♣♣

5.1. Différentier une fonction

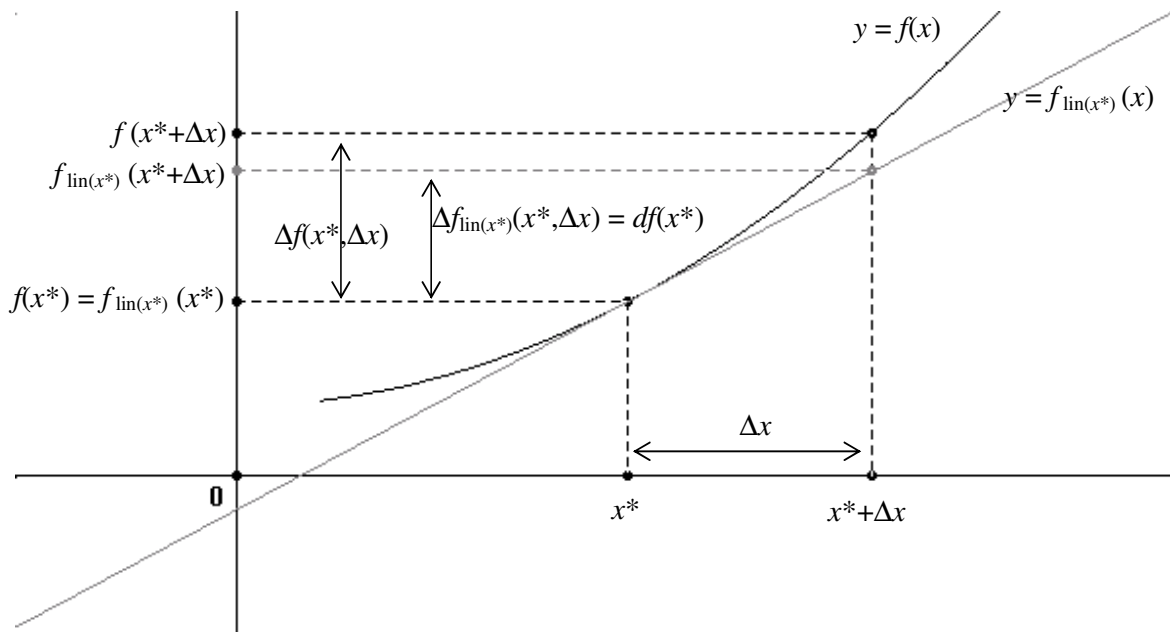
5.1.1. Notion de différentielle d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continûment différentiable sur un sous-ensemble D de son domaine de définition et soit $x^* \in D$.

On appelle différentielle de f en x^* et on note $df(x^*)$ l'expression $f'(x^*) \cdot \Delta x$.

Remarques

- 1) $df(x^*)$ est une expression linéaire en la variation Δx de la variable x (au départ de la valeur x^*).
- 2) $df(x^*) = \Delta f_{\text{lin}(x^*)}(x^*, \Delta x)$ (à vérifier)



- 3) Pour la fonction identité $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x$, on a $I'(x^*) = 1$.

Par conséquent, $dI(x^*) = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

Comme la différentielle $dI(x^*)$ est conventionnellement notée dx , il vient :

$$dI(x^*) \equiv dx = \Delta x .$$

On substitue généralement dx à Δx dans l'écriture de la différentielle d'une fonction d'une variable x et on obtient alors l'expression : $df(x^*) = f'(x^*) \cdot dx$.

On voit même parfois écrit : $df(x) = f'(x) \cdot dx$

5.1.2. Notion de différentielle d'une fonction de R^n dans R

Soit F une fonction de R^n dans R continûment différentiable sur un sous-ensemble D de son domaine de définition et soit $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in D$.

On appelle **différentielle de F en x^*** et on note $dF(x^*)$ l'expression linéaire en les variations $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x^*) \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x^*) \cdot \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x^*) \cdot \Delta x_n.$$

Remarques

1) $dF(x^*) = \Delta F_{\text{lin}(x^*)}(x^*, \Delta x)$

2) Pour des raisons analogues à celles expliquées dans le cas d'une fonction d'une variable, on écrit généralement :

$$dF(x^*) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x^*) \cdot dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x^*) \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x^*) \cdot dx_n$$

où, pour chaque valeur de i , dx_i peut être considéré

- ♦ soit comme une variation de la variable x_i au départ de la valeur x_i^* ($dx_i = x_i - x_i^*$)
- ♦ soit comme une différentielle (différentielle de la fonction identité).

Exercices

Exercice 1

Calculer la différentielle de

a) $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$

b) $f(x) = \sin(2x)$

c) $F(x_1, x_2) = x_1 - x_2^3$

d) $G(z_1, z_2) = (z_1 - z_2)^3$

e) $F(x, y, t, v) = x \cdot y + a \cdot t^2 - v \cdot x + 2$ (où a est un paramètre)

f) $F(x, y, t, v) = x \cdot y + a \cdot t^2 - v \cdot x + 2$ où a est un paramètre, et où $t(x, y) = e^{x \cdot y}$ et $v(y) = 2 - y$

g) $H(z) = -5$

Exercice 2

a) On donne $F : R^2 \rightarrow R : (x_1, x_2) \rightarrow F(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2^3$

Déterminer l'approximation de la variation de valeur de F

correspondant aux variations de valeur $\Delta x_1 = \frac{3}{10}$ et $\Delta x_2 = \frac{2}{10}$ au point $(x_1^*, x_2^*) = (3, 1)$.

b) On donne $F : R^2 \rightarrow R : (x_1, x_2) \rightarrow F(x_1, x_2) = x_2 \cdot e^{x_1}$

Déterminer l'approximation de la variation de valeur de F

correspondant aux variations de valeur $\Delta x_1 = \frac{1}{10}$ et $\Delta x_2 = \frac{1}{10}$ au point $(x_1^*, x_2^*) = (1, 4)$.

5.2. Equations aux variations différentielles

Soit $E(x,y) = b$, un modèle mathématique qui ne permet pas nécessairement de définir y en fonction de x .

- L' **équation linéaire « approchée »**, au voisinage de (x^*, y^*) , **du modèle** $E(x,y) = b$

est

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x^*, y^*) \cdot (x - x^*) + \frac{\partial E}{\partial y}(x^*, y^*) \cdot (y - y^*) = 0$$

C'est l' **équation de la droite tangente**, en (x^*, y^*) , à la courbe d'équation $E(x,y) = b$.

- L' **équation aux variations différentielles**

associée au modèle $E(x,y) = b$

en sa solution (x^*, y^*)

$$\text{est } \frac{\partial E}{\partial x}(x^*, y^*) \cdot dx + \frac{\partial E}{\partial y}(x^*, y^*) \cdot dy = 0$$

- L' **équation** $E(x,y) = b$ **définit localement**, au voisinage de (x^*, y^*) ,
la variable y en fonction de la variable x

si

son équation linéaire « approchée », en (x^*, y^*) ,
définit (explicitement) la variable y en fonction de la variable x ,

ou encore si

son équation aux variations différentielles, en (x^*, y^*) ,
définit (explicitement) la variable dy en fonction de la variable dx .

- Si l'équation $E(x,y) = b$ définit, au voisinage de (x^*, y^*) , la fonction $y = y(x)$
(même si on ne possède pas explicitement l'expression de cette fonction)
alors, le nombre dérivé de cette fonction en x^* est égal à

$$\left(\frac{d}{dy} y \right) (x^*) = \frac{dy}{dx}$$

Exercice résolu

- a) L'équation $x^2 + y^2 = 25$
définit-elle **globalement** la variable y en fonction de la variable x ?
... **autre formulation** : Peut-on exprimer explicitement la variable y en fonction de la variable x à partir de l'équation $x^2 + y^2 = 25$?
- b) L'équation définit-elle **localement**, autour de sa solution $(x^*, y^*) = (3, 4)$, la variable y en fonction de la variable x ?
Déterminer le nombre dérivé de la fonction ainsi définie en $(x^*, y^*) = (3, 4)$.
- c) Quelle est l'équation de la droite tangente à la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 25$ en $(x^*, y^*) = (3, 4)$?
- d) L'équation définit-elle **localement**, autour de sa solution $(x^*, y^*) = (5, 0)$, la variable y en fonction de la variable x ?
Déterminer le nombre dérivé de la fonction ainsi définie en $(x^*, y^*) = (5, 0)$.
- e) Quelle est l'équation de la droite tangente à la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 25$ en $(x^*, y^*) = (5, 0)$?

Résolution :

a) Non, car $y = \sqrt{25 - x^2}$ ou $y = -\sqrt{25 - x^2}$

- b) Considérons l'équation aux variations différentielles en $(3, 4)$

associée à l'équation de départ : $\frac{\partial E}{\partial x}(3, 4) \cdot dx + \frac{\partial E}{\partial y}(3, 4) \cdot dy = 0$

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial x}(3, 4) = 6$$

$$\frac{\partial E}{\partial y}(x, y) = 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial y}(3, 4) = 8$$

On obtient $6 dx + 8 dy = 0 \quad \Rightarrow \quad dy = -\frac{3}{4} dx$

L'équation aux variations différentielles en $(3, 4)$

définit la variable dy en fonction de la variable dx .

L'équation de départ définit donc localement, au voisinage de $(3, 4)$, la variable y en fonction de la variable x .

En $(3, 4)$, y est positif et donc $y = \sqrt{25 - x^2}$

Le nombre dérivé demandé est $\left(\frac{d}{dy} y\right)(3) = \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$

c) L'équation de la droite tangente en (3,4),

est donnée par $\frac{\partial E}{\partial x}(3,4) \cdot (x-3) + \frac{\partial E}{\partial y}(3,4) \cdot (y-4) = 0$ (équation linéaire approchée)

$$6(x-3) + 8(y-4) = 0$$

$$6x + 8y - 50 = 0$$

Notons que l'équation linéaire approchée en (3,4) définit (explicitement),

la variable y en fonction de la variable x : $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

d) Considérons l'équation aux variations différentielles en (5,0)

associée à l'équation de départ : $\frac{\partial E}{\partial x}(5,0) \cdot dx + \frac{\partial E}{\partial y}(5,0) \cdot dy = 0$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial x}(5,0) = 10$ et $\frac{\partial E}{\partial y}(5,0) = 0$, on obtient $10 dx + 0 dy = 0$

L'équation aux variations différentielles en (5,0) ne définit pas la variable dy en fonction de la variable dx .

L'équation de départ ne définit donc pas localement, au voisinage de (5,0), la variable y en fonction de la variable x .

e) La droite tangente en (5,0) existe et a pour équation $x = 5$ (tangente verticale).

Exercices

Exercice 3

a) L'équation $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 22 = 0$ définit-elle **globalement** la variable y en fonction de la variable x ?

... *autre formulation* : Peut-on exprimer explicitement la variable y en fonction de la variable x à partir de l'équation $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 22 = 0$?

b) Si non, l'équation définit-elle **localement**, autour de sa solution $(x^*, y^*) = (1, 3)$, la variable y en fonction de la variable x ?

Déterminer le nombre dérivé de la fonction ainsi définie en $x^* = 1$.

c) Quelle est l'équation de la droite tangente à la courbe d'équation $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 22 = 0$ en $(x^*, y^*) = (1, 3)$?

Exercice 4

L'équation $x \cdot y^2 - 2^{x \cdot y} - 1 = 0$

ne définit pas **globalement** la variable y en fonction de la variable x .

a) Cette équation définit-elle **localement**, autour de sa solution $(x^*, y^*) = (1, 3)$, la variable y en fonction de la variable x ?

- b) Quelle est l'équation de la droite tangente à la courbe d'équation $x \cdot y^2 - 2^{x \cdot y} - 1 = 0$ en $(x^*, y^*) = (1, 3)$?
- c) Quel est le nombre dérivée de y par rapport à x en $x^* = 1$?

Exercice 5 : généralisation pour un modèle à trois variables

L'équation $x_1^2 \cdot x_2 \cdot y + x_1 \cdot y^2 - 2 \cdot x_2 \cdot y + 2 \cdot y^2 - 12 = 0$

ne définit pas **globalement** la variable y en fonction des variables x_1 et x_2 .

a) Cette équation définit-elle **localement**, au voisinage de sa solution $(x_1^*, x_2^*, y^*) = (1, 0, 2)$, la variable y en fonction des variables x_1 et x_2 ?

b) Quelle est l'équation du plan tangent à la courbe d'équation

$$x_1^2 \cdot x_2 \cdot y + x_1 \cdot y^2 - 2 \cdot x_2 \cdot y + 2 \cdot y^2 - 12 = 0 \text{ en } (x_1^*, x_2^*, y^*) = (1, 0, 2) ?$$

Exercice 6 : généralisation pour un modèle à trois variables

a) Montrez que l'équation $e^{x_1 \cdot y} \cdot x_2 + 2 \cdot x_1^2 \cdot x_2^3 - 3 \cdot y^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 - 1 = 0$

définit **localement**, au voisinage de sa solution $(x_1^*, x_2^*, y^*) = (2, 1, 0)$, la variable y en fonction des variables x_1 et x_2 .

b) Quelle est l'équation du plan tangent à la courbe d'équation

$$e^{x_1 \cdot y} \cdot x_2 + 2 \cdot x_1^2 \cdot x_2^3 - 3 \cdot y^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 - 1 = 0 \text{ en } (x_1^*, x_2^*, y^*) = (2, 1, 0) ?$$

Exercice 7

Soit l'équation à 2 variables x et y : $x^2 \cdot y^2 - x^3 \cdot y + 2 \cdot x \cdot y^3 = 0$

Comme on le vérifie aisément, cette équation permet d'exprimer la variable y en fonction de la variable x localement au voisinage de sa solution $(x^*, y^*) = (2, 1)$.

a) Déterminez le nombre dérivé de cette fonction en $x^* = 2$.

b) Déterminez l'élasticité de type point de y par rapport à x au point (x^*, y^*) .

NB : Pour rappel (cf. cours théorique) :

Si y peut s'exprimer en fonction de x via le biais d'une égalité de type $y = f(x)$,

Alors l'élasticité de type point de y par rapport à x en (x^*, y^*) est notée $\varepsilon_{y/x}(x^*)$ et

vaut

$$\varepsilon_{y/x}(x^*) = f'(x^*) \cdot \frac{x^*}{y^*}$$

Exercice résolu

Le modèle
$$\begin{cases} x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = 0 \\ y_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + e^{y_1 \cdot y_2} = 5 \end{cases}$$

ne définit pas **globalement** les variables y_1 et y_2 en fonction des variables x_1 et x_2 .

Ce modèle définit-il **localement**, au voisinage de sa solution $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) = (0, 1, 2, 0)$, les variables y_1 et y_2 en fonction des variables x_1 et x_2 ?

(C'est-à-dire le système d'équations aux variations différentielles définit-il dy_1 et dy_2 en fonction de dx_1 et dx_2 ?)

Résolution :

- NB : $(0, 1, 2, 0)$ est bien solution du modèle
$$\begin{cases} x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = 0 \\ y_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + e^{y_1 \cdot y_2} = 5 \end{cases}$$

- « Passage à la différentielle » en $(0, 1, 2, 0)$ (syst. d'équ. aux variations différentielles)

$$\begin{cases} y_1 \cdot dx_1 + y_2 \cdot dx_2 + x_1 \cdot dy_1 + x_2 \cdot dy_2 = 0 \\ 2 \cdot x_2 \cdot dx_1 + 2 \cdot x_1 \cdot dx_2 + (2 \cdot y_1 + y_2 \cdot e^{y_1 \cdot y_2}) \cdot dy_1 + (y_1 \cdot e^{y_1 \cdot y_2}) \cdot dy_2 = 0 \end{cases}$$

en $(0, 1, 2, 0)$:

$$\begin{cases} 2 \cdot dx_1 + 0 \cdot dx_2 + 0 \cdot dy_1 + 1 \cdot dy_2 = 0 \\ 2 \cdot dx_1 + 0 \cdot dx_2 + 4 \cdot dy_1 + 2 \cdot dy_2 = 0 \end{cases}$$

- On peut facilement exprimer dy_1 en fonction de dx_1, dx_2 et dy_2 en fonction de dx_1, dx_2

$$\begin{cases} dy_2 = -2 \cdot dx_1 \\ 4 \cdot dy_1 + 2 \cdot dy_2 = -2 \cdot dx_1 \end{cases} \quad \begin{cases} dy_2 = -2 \cdot dx_1 \\ 4 \cdot dy_1 = -2 \cdot dx_1 - 2 \cdot dy_2 \end{cases} \quad \begin{cases} dy_2 = -2 \cdot dx_1 \\ 4 \cdot dy_1 = -2 \cdot dx_1 - 2 \cdot (-2 \cdot dx_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dy_2 = -2 \cdot dx_1 \\ 4 \cdot dy_1 = 2 \cdot dx_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dy_2 = -2 \cdot dx_1 \\ dy_1 = \frac{1}{2} \cdot dx_1 \end{cases} \quad \text{ce qui prouve la capacité d'exprimer } dy_1 \text{ et } dy_2 \text{ en fonction de } dx_1 \text{ et } dx_2$$

En conséquence, le système de départ définit localement, au voisinage de sa solution $(0, 1, 2, 0)$, les variables y_1 et y_2 en fonction des variables x_1 et x_2 .

Exercices

Exercice 8

On donne le modèle
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot x_3^2 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_1 \cdot y_2^2 = 2 \\ x_1^3 \cdot y_1^2 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + 4 \cdot \frac{y_1}{y_2} = -3 \end{cases}$$
, où on considère les variables

y_1 et y_2 comme endogènes et les variables x_1 , x_2 et x_3 comme exogènes.

Ce modèle définit-il **localement**, au voisinage de $(y_1^*, y_2^*, x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (3, -2, 1, -1, 2)$ les variables y_1 et y_2 en fonction des variables x_1 , x_2 et x_3 ?

Si oui, exprimer explicitement dy_1 en fonction de dx_1 , dx_2 et dx_3
 dy_2 en fonction de dx_1 , dx_2 et dx_3 .

Exercice 9

On donne le modèle
$$\begin{cases} e^{y_1 \cdot y_2} \cdot x_1 + 2 \cdot y_1^2 \cdot y_2^3 - e^{2 \cdot x_1} - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot y_2 - 6 = 0 \\ x_1^2 \cdot x_2^3 - y_1^3 + x_2 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1 \cdot y_2 + 6 = 0 \end{cases}$$
, où on

considère les variables y_1 et y_2 comme endogènes et les variables x_1 et x_2 comme exogènes.

Ce modèle définit-il **localement**, au voisinage de sa solution $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) = (1, 0, 2, 1)$, les variables y_1 et y_2 en fonction des variables x_1 et x_2 ?

Si oui, exprimer explicitement dy_1 en fonction de dx_1 et dx_2
 dy_2 en fonction de dx_1 et dx_2 .

Exercice 10

Le modèle
$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 - x_2^2 = 0 \\ x_1 \cdot y_2^2 + x_2 \cdot y_1 \cdot y_3 - 5 \cdot y_2^3 \cdot y_3^2 = 0 \\ x_1^3 \cdot x_2 \cdot y_3 - y_1^2 \cdot y_2 + 2 \cdot y_2 \cdot y_3 = 0 \end{cases}$$
 définit-il **localement**, autour de sa

solution $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (1, 2, 2, 1, 1)$, les variables y_1 , y_2 et y_3 en fonction des variables x_1 et x_2 ?

Si oui, exprimer dy_1 , dy_2 et dy_3 en fonction de dx_1 et dx_2 .

Exercice 11

Le modèle $\begin{cases} x_2^2 \cdot y_2^3 - x_1 \cdot y_1^2 \cdot y_2 - x_1^2 \cdot x_2 + y_2^2 - 10 = 0 \\ 3 \cdot x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot y_1 + y_1 \cdot y_2^3 + 5 \cdot x_2^3 - 3 \cdot y_2^2 - 13 = 0 \end{cases}$ définit-il localement, au

voisinage de sa solution $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) = (3, 0, 1, -2)$, les variables y_1 et y_2 en fonction des variables x_1 et x_2 ?

C'est-à-dire le système d'équations aux variations différentielles définit-il dy_1 et dy_2 en fonction de dx_1 et dx_2 ?

Si oui, exprimer explicitement dy_1 en fonction de dx_1 et dx_2

dy_2 en fonction de dx_1 et dx_2 .

Exercice 12

Soit le système de 3 équations à 5 variables y_1, y_2, y_3, x_1 et x_2

$$\begin{cases} x_1 = a \cdot y_1 + f(y_3) \\ y_2 = g(y_3, x_2) \\ y_2 = h(y_1) \end{cases}$$

- où
- a est une constante réelle
 - $f(\bullet)$ et $h(\bullet)$ sont deux fonctions d'une variable de classe C^1
 - $g(\bullet, \bullet)$ est une fonction de deux variables de classe C^1
 - les variables endogènes sont y_1, y_2 et y_3
 - les variables exogènes sont x_1 et x_2 .

Soit d'autre part $(y_1^*, y_2^*, y_3^*, x_1^*, x_2^*)$ une solution de ce système.

a) Ecrire le système d'équations aux variations différentielles associé au système ci-dessus en $(y_1^*, y_2^*, y_3^*, x_1^*, x_2^*)$.

b) Est-il possible d'exprimer les variables y_1, y_2 et y_3 en fonction des variables x_1 et x_2 localement, autour de la solution $(y_1^*, y_2^*, y_3^*, x_1^*, x_2^*)$? Justifiez votre réponse.

Exercice 13

Soit le système de 2 équations à 5 variables y_1, y_2, x_1, x_2 et x_3

$$\begin{cases} a.y_1.y_2 + x_1^3.x_2.x_3^2 - (a+1).x_2 = 0 \\ 2.y_1 + a.x_1.y_2 - x_2.x_3 - 2.a.x_1 = 0 \end{cases}$$

- où
- a désigne une constante réelle
 - les variables endogènes sont y_1 et y_2
 - les variables exogènes sont x_1, x_2 et x_3 .

On vérifie aisément que $(y_1^*, y_2^*, x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, 2, 1, 2, 1)$ est une solution de ce système.

a) Ecrivez le système d'équations aux variations différentielles associé au système ci-dessus en $(y_1^*, y_2^*, x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, 2, 1, 2, 1)$.

b) Pour quelles valeurs de a est-il possible d'exprimer les variables endogènes en fonction des variables exogènes localement au voisinage de $(y_1^*, y_2^*, x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, 2, 1, 2, 1)$? Justifiez votre réponse.

c) En donnant à la constante réelle « a » la valeur « 2 », écrivez le système aux variations différentielles de la question a) en complétant les 6 cases ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{} dy_1 + \boxed{} dy_2 = \boxed{} \\ \boxed{} dy_1 + \boxed{} dy_2 = \boxed{} \end{array} \right.$$

d) Au départ du système de la question c) et en utilisant la méthode de Cramer, exprimez dy_1 et dy_2 en fonction de dx_1, dx_2 et dx_3 .

e) Lorsque $a = 2$, le système

$$\begin{cases} a.y_1.y_2 + x_1^3.x_2.x_3^2 - (a+1).x_2 = 0 \\ 2.y_1 + a.x_1.y_2 - x_2.x_3 - 2.a.x_1 = 0 \end{cases}$$

permet d'exprimer les variables y_1, y_2 en fonction des variables x_1, x_2 et x_3 localement au voisinage de $(y_1^*, y_2^*, x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, 2, 1, 2, 1)$.

Notons F et G les deux fonctions ainsi définies :

$$y_1 = F(x_1, x_2, x_3) \quad \text{et} \quad y_2 = G(x_1, x_2, x_3).$$

Quelle est la valeur du nombre dérivée partielle par rapport à x_1 de la fonction F en $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, 2, 1)$? Justifiez votre réponse.

Solutions des exercices (Chapitre 5)

Exercice 1

a) $df(x) = f'(x) dx = (2.x.\ln(x) + x) dx$

b) $df(x) = 2.\cos(2x) dx$

c) $dF(x_1, x_2) = dx_1 - 3 x_2^2 dx_2$

d) $dG(z_1, z_2) = 3 (z_1 - z_2)^2 dz_1 - 3 (z_1 - z_2)^2 dz_2$

e) $dF(x, y, t, v) = (y - v) dx + x dy + 2 a t dt - x dv$

f) **NB** : $dt(x, y) = y e^{x.y} dx + x e^{x.y} dy$ et $dv(y) = - dy$

$$dF(x, y) = (2y - 2 + 2 a y e^{2.x.y}) dx + 2 x (1 + a e^{2.x.y}) dy$$

g) $dH(z) = 0$

Exercice 2

$$a) dF((x_1^*, x_2^*), (\Delta x_1, \Delta x_2)) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \cdot \Delta x_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) = 2 x_1 x_2^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(3, 1) = 6$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) = 3 x_1^2 x_2^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(3, 1) = 27$$

$$\text{Finalement, } dF\left((3, 1), \left(\frac{3}{10}, \frac{2}{10}\right)\right) = 6 \cdot \frac{3}{10} + 27 \cdot \frac{2}{10} = 7,2$$

... alors que la variation en valeur vaut

$$\Delta F((x_1^*, x_2^*), (\Delta x_1, \Delta x_2)) = F(x_1^* + \Delta x_1, x_2^* + \Delta x_2) - F(x_1^*, x_2^*)$$

$$\Delta F\left((3, 1), \left(\frac{3}{10}, \frac{2}{10}\right)\right) = F\left(\frac{33}{10}, \frac{12}{10}\right) - F(3, 1) = 9,817932\dots$$

b) $dF\left((1, 4), \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)\right) = \frac{e}{2} \approx 1,36$

... alors que la variation en valeur vaut

$$\Delta F\left((1, 4), \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)\right) = F\left(\frac{11}{10}, \frac{41}{10}\right) - F(1, 4) = 1,444$$

Exercice 3

a) Non : par exemple, pour $x = 1$, les valeurs $y = 3$ et $y = -7/3$ vérifient le modèle (donc y n'est pas fonction de x).

b) Equation aux variations différentielles : $18.dx + 16.dy = 0$, qui peut encore s'écrire

$$dy = -\frac{9}{8}.dx.$$

L'équation aux variations différentielles en (1,3) définit la variable dy en fonction de la variable dx ;

On peut donc en déduire que l'équation de départ définit localement, au voisinage de (1,3), la variable y en fonction de la variable x (mais on ne sait pas comment, on n'a pas une écriture explicite de cette fonction).

Le nombre dérivé demandé est $\left(\frac{d}{dx}y\right)(1) = \frac{dy}{dx} = -\frac{9}{8}$

c) L'équation de la droite tangente en (1,3) est donnée par $18.x + 16.y - 66 = 0$

Exercice 4

a) Equation aux variations différentielles : $(9 - 24.\ln 2).dx + (6 - 8.\ln 2).dy = 0$, qui peut

encore s'écrire $dy = -\frac{(9 - 24.\ln 2)}{(6 - 8.\ln 2)}.dx$

L'équation aux variations différentielles en (1,3) définit la variable dy en fonction de la variable dx ;

l'équation de départ définit donc localement, autour de sa solution (1,3), la variable y en fonction de la variable x (mais on ne sait pas comment, on n'a pas une écriture explicite de cette fonction).

b) L'équation de la droite tangente en (1,3) est donnée par

$$(9 - 24.\ln 2).x + (6 - 8.\ln 2).y + (-27 + 48.\ln 2) = 0$$

c) Le nombre dérivé demandé est $\left(\frac{d}{dx}y\right)(1) = \frac{dy}{dx} = -\frac{(9 - 24.\ln 2)}{(6 - 8.\ln 2)}$.

Exercice 5

a) Equation aux variations différentielles : $4.dx_1 - 2.dx_2 + 12.dy = 0$, qui peut encore

s'écrire $dy = -\frac{1}{3}.dx_1 + \frac{1}{6}.dx_2$

L'équation aux variations différentielles en (1,0,2) définit la variable dy en fonction des variables dx_1 et dx_2 ;

l'équation de départ définit donc localement, autour de sa solution (1,0,2), la variable y en fonction des variables x_1 et x_2 (mais on ne sait pas comment, on n'a pas une écriture explicite de la fonction).

b) Le plan tangent en (1,0,2) a pour équation $2.x_1 - x_2 + 6.y - 14 = 0$

Exercice 6

a) Equation aux variations différentielles : $4.dx_1 + 17.dx_2 + 2.dy = 0$, qui peut encore s'écrire $dy = -2.dx_1 - \frac{17}{2}.dx_2$

L'équation aux variations différentielles définit donc localement, autour de sa solution $(2,1,0)$, la variable dy en fonction des variables dx_1 et dx_2 .

L'équation de départ ($E(x_1, x_2, y) = 0$) définit donc, au voisinage de $(2,1,0)$, la variable y en fonction des variables x_1 et x_2 (mais on ne sait pas comment, on n'a pas une écriture explicite de la fonction).

b) Le plan tangent (au graphe des solutions de $E(x_1, x_2, y) = 0$) en $(2,1,0)$ a pour équation

$$4.x_1 + 17.x_2 + 2.y - 25 = 0$$

Exercice 7

a) Le nombre dérivé demandé est donné par $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

b) $\varepsilon_{y/x}(x^*) = f'(x^*) \cdot \frac{x^*}{y^*} = 1$

Exercice 8

Système d'équations aux variations différentielles en $(3, -2, 1, -1, 2)$:

$$\begin{cases} -2.dy_1 + 8.dy_2 - 6.dx_1 - 8.dx_2 + 8.dx_3 = 0 \\ 4.dy_1 - 3.dy_2 + 21.dx_1 + 6.dx_2 - 3.dx_3 = 0 \end{cases}$$

Puisque $\det \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = -26$, on peut exprimer les « variables » dy_1, dy_2 en fonction des « variables » dx_1, dx_2, dx_3 .

On peut en déduire que les variables endogènes y_1, y_2 du système non linéaire de départ sont définies **localement**, autour de $(3, -2, 1, -1, 2)$, en fonction des variables x_1, x_2, x_3

(mais on ne sait pas comment, on n'a pas une écriture explicite de ces fonctions).

En appliquant par exemple la méthode de Cramer, on trouve

$$\begin{cases} dy_1 = -\frac{75}{13}.dx_1 - \frac{12}{13}.dx_2 \\ dy_2 = -\frac{9}{13}.dx_1 + \frac{10}{13}.dx_2 - dx_3 \end{cases}$$

Exercice 9

Système d'équations aux variations différentielles en $(1,0,2,1)$:

$$\begin{cases} -e^2 \cdot dx_1 - 4 \cdot dx_2 + (8 + e^2) dy_1 + (22 + 2 \cdot e^2) dy_2 = 0 \\ 2 \cdot dx_1 + dx_2 - 11 \cdot dy_1 + 2 \cdot dy_2 = 0 \end{cases}$$

Puisque $\det \begin{pmatrix} 8 + e^2 & 22 + 2 \cdot e^2 \\ -11 & 2 \end{pmatrix} = 258 + 24 \cdot e^2$, on peut exprimer les « variables » dy_1, dy_2 en fonction des « variables » dx_1, dx_2 .

On peut en déduire que les variables endogènes y_1, y_2 du système de départ sont définies **localement**, au voisinage de $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) = (1, 0, 2, 1)$, en fonction des variables x_1, x_2

(mais on ne sait pas comment, on n'a pas une écriture explicite de ces fonctions).

$$\text{On trouve } \begin{cases} dy_1 = \frac{44 + 6 \cdot e^2}{258 + 24 \cdot e^2} \cdot dx_1 + \frac{30 + 2 \cdot e^2}{258 + 24 \cdot e^2} \cdot dx_2 \\ dy_2 = \frac{-16 + 9 \cdot e^2}{258 + 24 \cdot e^2} \cdot dx_1 + \frac{36 - e^2}{258 + 24 \cdot e^2} \cdot dx_2 \end{cases}.$$

Exercice 10

Système d'équations aux variations différentielles :

$$\begin{cases} 4 \cdot dx_1 - 2 \cdot dx_2 + 2 \cdot dy_1 + 4 \cdot dy_2 + 4 \cdot dy_3 = 0 \\ dx_1 + 2 \cdot dx_2 + 2 \cdot dy_1 - 13 \cdot dy_2 - 6 \cdot dy_3 = 0 \\ 6 \cdot dx_1 + dx_2 - 4 \cdot dy_1 - 2 \cdot dy_2 + 4 \cdot dy_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Notation matricielle : } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -13 & -6 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot dx_1 + 2 \cdot dx_2 \\ -dx_1 - 2 \cdot dx_2 \\ -6 \cdot dx_1 - dx_2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -13 & -6 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} = -288$$

On peut exprimer les variables dy_1, dy_2 et dy_3 en fonction des variables dx_1 et dx_2

localement en $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (1, 2, 2, 1, 1)$;

par conséquent, le modèle de départ permet de définir localement au voisinage de

$(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (1, 2, 2, 1, 1)$ les variables y_1, y_2 et y_3 en fonction des variables x_1 et x_2 .

Par la méthode de Cramer, on trouve :

$$\begin{cases} dy_1 = -\frac{112}{288}.dx_1 + \frac{108}{288}.dx_2 = -\frac{7}{18}.dx_1 + \frac{3}{8}.dx_2 \\ dy_2 = \frac{208}{288}.dx_1 + \frac{36}{288}.dx_2 = \frac{13}{18}.dx_1 + \frac{1}{8}.dx_2 \\ dy_3 = -\frac{440}{288}.dx_1 + \frac{54}{288}.dx_2 = -\frac{55}{36}.dx_1 + \frac{3}{16}.dx_2 \end{cases}$$

Exercice 11

Système d'équations aux variations différentielles : $\begin{cases} 2.dx_1 - 9.dx_2 + 12.dy_1 - 7.dy_2 = 0 \\ 20.dx_1 + 0.dx_2 - 2.dy_1 + 24.dy_2 = 0 \end{cases}$

Notation matricielle : $\begin{pmatrix} 12 & -7 \\ -2 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.dx_1 + 9.dx_2 \\ -20.dx_1 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} 12 & -7 \\ -2 & 24 \end{pmatrix} = 274 \neq 0$$

On peut exprimer les variables dy_1 et dy_2 en fonction des variables dx_1 et dx_2

localement en $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) = (3, 0, 1, -2)$;

par conséquent, le modèle de départ permet de définir localement, au voisinage de $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) = (3, 0, 1, -2)$, les variables y_1 et y_2 en fonction des variables x_1 et x_2 .

Par la méthode de Cramer, on trouve :

$$\begin{cases} dy_1 = \frac{-188.dx_1 + 216.dx_2}{274} = \frac{-94.dx_1 + 108.dx_2}{137} \\ dy_2 = \frac{-244.dx_1 + 18.dx_2}{274} = \frac{-122.dx_1 + 9.dx_2}{137} \end{cases}$$

Exercice 12

$$\text{a) } \begin{cases} a.dy_1 + \frac{\partial f}{\partial y_3}(y_3^*).dy_3 - dx_1 = 0 \\ dy_2 - \frac{\partial g}{\partial y_3}(y_3^*, x_2^*).dy_3 - \frac{\partial g}{\partial x_2}(y_3^*, x_2^*).dx_2 = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y_1}(y_1^*).dy_1 - dy_2 = 0 \end{cases}$$

b) Il est possible d'exprimer les variables dy_1 , dy_2 et dy_3 en fonction de dx_1 et dx_2 si

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & \frac{\partial f}{\partial y_3}(y_3^*) \\ 0 & 1 & -\frac{\partial g}{\partial y_3}(y_3^*, x_2^*) \\ \frac{\partial h}{\partial y_1}(y_1^*) & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial h}{\partial y_1}(y_1^*) \cdot \frac{\partial f}{\partial y_3}(y_3^*) - a \cdot \frac{\partial g}{\partial y_3}(y_3^*, x_2^*) \neq 0$$

c'est-à-dire si $-\frac{\partial h}{\partial y_1}(y_1^*) \cdot \frac{\partial f}{\partial y_3}(y_3^*) - a \cdot \frac{\partial g}{\partial y_3}(y_3^*, x_2^*) \neq 0$

Exercice 13

a)
$$\begin{cases} 2a dy_1 + a dy_2 + 6 dx_1 + (-a) dx_2 + 4 dx_3 = 0 \\ 2 dy_1 + a dy_2 + 0 dx_1 + (-1) dx_2 + (-2) dx_3 = 0 \end{cases}$$

b) Il faut que $\det \begin{pmatrix} 2a & a \\ 2 & a \end{pmatrix} \neq 0$

soit $2a^2 - 2a \neq 0$

ce qui est le cas si $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

c)
$$\begin{cases} \boxed{4} dy_1 + \boxed{2} dy_2 = \boxed{-6 dx_1 + 2 dx_2 - 4 dx_3} \\ \boxed{2} dy_1 + \boxed{2} dy_2 = \boxed{dx_2 + 2 dx_3} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} dy_1 = -3 dx_1 + \frac{1}{2} dx_2 - 3 dx_3 \\ dy_2 = 3 dx_1 + 0 dx_2 + 4 dx_3 \end{cases}$$

d) Le nombre recherché est -3 ; en effet, en $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, 2, 1)$, on a

d'une part $dy_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}(1, 2, 1) \cdot dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(1, 2, 1) \cdot dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3}(1, 2, 1) \cdot dx_3$

et d'autre part $dy_1 = -3 dx_1 + \frac{1}{2} dx_2 - 3 dx_3$

Troisième partie
-
Optimisation

Chapitre 6 : Optimisation

♣♣♣ syllabus théorie : pages 147-179 ♣♣♣

1. Recherche d'extrema de fonctions d'une variable

♣♣♣ syllabus théorie : pages 152 à 154 ♣♣♣

Recherche d'un extremum local de la fonction $f: R \rightarrow R : x \rightarrow f(x)$

1. Calculer la dérivée première f'
2. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$

Les solutions x^* appartenant au domaine de définition de f sont appelés les **points stationnaires** de f .

La tangente au graphe de f en x^* est horizontale (parallèle à l'axe des abscisses).

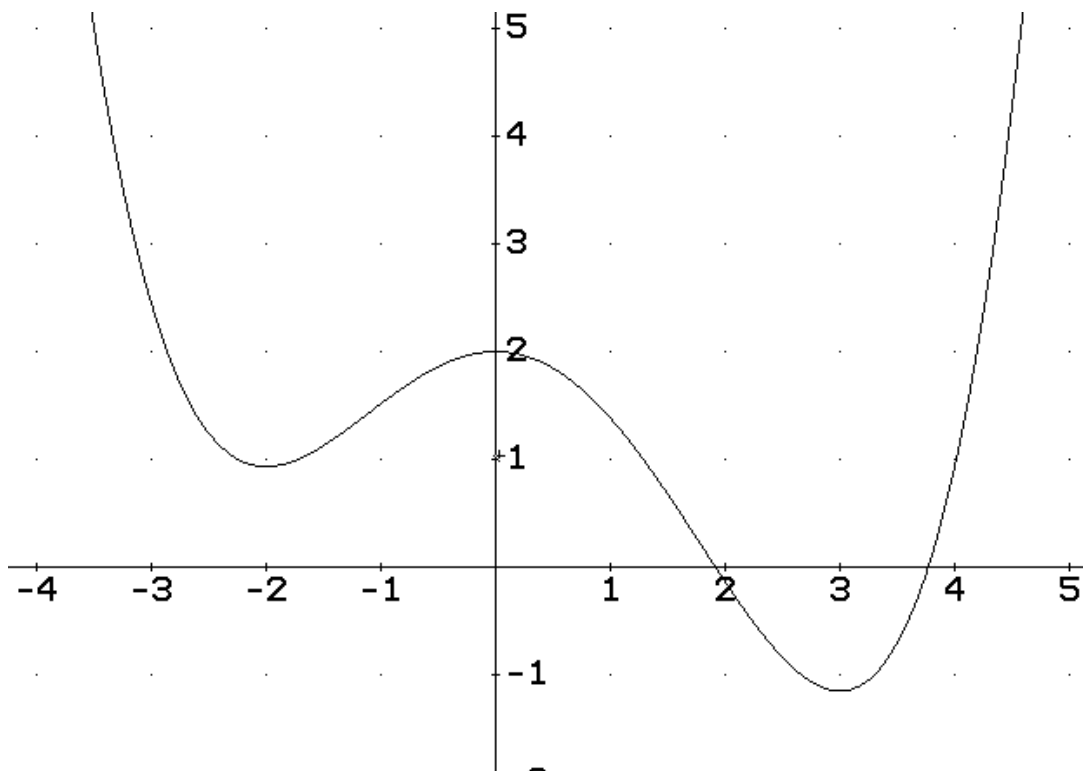
3. Calculer la dérivée seconde f''
4. En chaque point stationnaire, calculer la valeur de la dérivée seconde : $f''(x^*)$
 - Si $f''(x^*)$ est **positive** alors le point stationnaire x^* est un **minimum local**
 - Si $f''(x^*)$ est **négative** alors le point stationnaire x^* est un **maximum local**
 - Si $f''(x^*)$ est **nulle** et change de signe à gauche et à droite de x^* , alors le point stationnaire x^* est un **point d'inflexion**.

Exercice résolu

a) Rechercher les extrema éventuels de $f: R \rightarrow R : x \rightarrow f(x) = \frac{x^4}{20} - \frac{x^3}{15} - \frac{3 \cdot x^2}{5} + 2$

b) En se basant sur le graphe de f donné ci-dessous, rechercher les extrema

1. sur le domaine de définition de f
2. sur l'intervalle R^+
3. sur l'intervalle R_0^+
4. sur l'intervalle $[-2,0]$
5. sur l'intervalle $] -2,0[$
6. sur l'intervalle $[-1,1]$
7. sur l'intervalle $] -1,1[$
8. sur l'intervalle $[1,2]$
9. sur l'intervalle $]1,2[$



Résolution :

a) $f'(x) = \frac{1}{5} (x^3 - x^2 - 6x)$

$$= \frac{1}{5} x (x^2 - x - 6)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

$x^* = 0$, $x^* = -2$ et $x^* = 3$ sont des **points stationnaires** (tangente horizontale)

Ces points stationnaires sont-ils des extrema locaux ?

$$f''(x) = \frac{1}{5} (3x^2 - 2x - 6)$$

- en $x^* = 0$

$f''(0) = -\frac{6}{5} < 0$: la concavité est tournée vers le bas ;

le point stationnaire $x^* = 0$ est un maximum local de f .

- en $x^* = -2$

$f''(-2) = 2 > 0$: la concavité est tournée vers le haut ;

le point stationnaire $x^* = -2$ est un minimum local de f .

- en $x^* = 3$

$f''(3) = 3 > 0$: la concavité est tournée vers le haut ;

le point stationnaire $x^* = 3$ est un minimum local de f .

b)

1. min local en $x^* = -2$, max local en $x^* = 0$ et min global en $x^* = 3$
2. max local en $x^* = 0$ et min global en $x^* = 3$
3. min global en $x^* = 3$
4. min global en $x^* = -2$, max global en $x^* = 0$
5. pas d'extremum
6. min local en $x^* = -1$ et min global en $x^* = 1$ ($f(-1) = 91/60$ et $f(1) = 83/60$) = , max global en $x^* = 0$
7. max global en $x^* = 0$
8. max global en $x^* = 1$, min global en $x^* = 2$
9. pas d'extremum

Exercices

Exercice 1

La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) = (x-1)^3 \cdot (x+1)$ possède-t-elle un extremum

- a) en $x^* = 0$?
- b) en $x^* = -\frac{1}{2}$?
- c) en $x^* = 1$?

Exercice 2

Rechercher les extrema éventuels de la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) = x^3 - 1$

Exercice 3

Rechercher les extrema éventuels de la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) = x^3 + x^2 - 1$

Exercice 4

Rechercher les extrema éventuels de la fonction $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : q \rightarrow f(q) = q^2 - 5q + 8$

Exercice 5

Rechercher les extrema éventuels de la fonction $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow g(x) = 2x + \frac{8}{x}$

Exercice 6

Rechercher les extrema éventuels de la fonction

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow h(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x + 6)$$

Exercice 7

Rechercher les extrema éventuels de la fonction $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow i(x) = 5x^2 \cdot e^x$

Exercice 8

Rechercher les extrema éventuels de la fonction $j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow j(x) = (x-1) \cdot e^x$



. . . quelques problèmes . . .

Exercice 9

Soient $C(q)$ le coût total d'une firme
 q la demande de son produit
 p le prix de vente de ce produit .

$$\text{Si } q = 100 - p \text{ et } C(q) = \frac{1}{3} q^3 - 7 q^2 + 111 q + 50 ,$$

quel est le niveau q qui maximise le profit ?

Exercice 10

Le revenu R que procure la vente d'un article est lié au prix de vente unitaire p de cet article par l'expression $R(p) = 1500 \cdot p \cdot e^{-\frac{p}{100}}$.

Déterminer (s'il en existe) une valeur de p qui maximise R .

Exercice 11

Un fabricant de lecteurs de c.d. produit q exemplaires par semaine à un coût total de $4 q^2 + 300 q + 10000$ € .

La demande hebdomadaire du produit est $q = 100 - 2 \cdot \sqrt{p}$, p étant le prix unitaire en euros.

Si le fabricant règle sa production sur la demande, quel niveau de production lui procurera un bénéfice maximum ?

Exercice 12

La firme Channel fabrique des télévisions.

La demande journalière $q = 100 - 2 p$ si elle vend au prix unitaire p et le coût de production de q appareils est de $\frac{1}{4} q^2 + 35 q + 25$ par jour.

- Quel niveau de production maximise le bénéfice ?
- Pour quel niveau de production le coût de production unitaire est-il minimum ?

Exercice 13

L'entreprise S.E. (sans ennuis) fabrique q machines à laver mensuellement.
Elle utilise à cet effet plus ou moins de main d'œuvre (MO).

Sa fonction de production sur courte période est définie par $q = \frac{MO^2}{25} \cdot \left(3 - \frac{MO}{12}\right)$

où MO désigne le nombre de travailleurs.

Quel est l'effectif qui maximise la production ?

6.2. Recherche d'extrema de fonctions de n variables

6.2.1. Caractère défini positif, défini négatif d'une matrice carrée symétrique

❖ Soit une matrice **carrée** A .

On appelle **sous-matrice principale** de A toute matrice obtenue en supprimant les rangées se correspondant dans les lignes et les colonnes de la matrice A .

Une sous-matrice principale particulière est la matrice notée $A^{(j)}$, obtenue en gardant les j premières lignes et les j premières colonnes de la matrice A .

Exemple

$$\text{Soit la matrice carrée } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$A^{(1)} = (a_{1,1})$ matrice composée d'un seul élément

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = A$$

❖ Soit A une matrice **carrée symétrique** d'ordre n .

- A est **définie positive** ssi $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : \det A^{(j)} > 0$

Par exemple, pour la matrice carrée symétrique A d'ordre 3 :

$$A \text{ est définie positive ssi } \begin{cases} \det(a_{1,1}) > 0 \\ \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} > 0 \\ \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} > 0 \end{cases}$$

- A est **définie négative** ssi $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : (-1)^j \cdot \det A^{(j)} > 0$

Autrement dit, la matrice A est définie négative ssi les $\det A^{(j)}$ sont successivement négatifs puis positifs, le premier étant négatif.

Par exemple, pour la matrice carrée symétrique A d'ordre 3 :

$$A \text{ est définie négative ssi } \begin{cases} \det(a_{1,1}) < 0 \\ \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} > 0 \\ \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} < 0 \end{cases}$$

Exercices

Exercice 14

Les matrices symétriques suivantes sont-elles définies positives, définies négatives, ou pas ?

1. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$ où a est un paramètre réel

6. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

6.2.2. Recherche des extrema libres d'une fonction de n variables

♣♣♣ syllabus théorie : pages 155 à 163 ♣♣♣

Soit une fonction de n variables $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow F(x_1, x_2, \dots, x_n)$

1. Recherche des points stationnaires

- Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 1 :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
- Résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Les solutions $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ de ce système sont les **points stationnaires de F** .

2. Test des points stationnaires

- Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 2 (**matrice hessienne de F**) :

$$HF(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{(\partial x_1)^2}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \frac{\partial^2 F}{(\partial x_2)^2}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial^2 F}{(\partial x_n)^2}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

où $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right)$.

- Pour chaque point stat. $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, écrire la matrice hessienne $HF(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.
 - Si $HF(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ est **définie positive**
 F admet un **minimum local** en $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.
 - Si $HF(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ est **définie négative**
 F admet un **maximum local** en $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.
 - **Si non**, si $\det HF(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \neq 0$
 F admet un **point de selle** en $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Exercice résolu

Optimiser la fonction f définie par $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_2^2 - x_1x_2$.

Résolution :

1. Recherche des points stationnaires

- Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 1.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 10x_1 - x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 12x_2 - x_1$$

- Résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x_1 - x_2 = 0 \\ 12x_2 - x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 10x_1 \\ 12 \cdot (10x_1) - x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 10x_1 \\ 119x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

La solution $(0,0)$ de ce système est le seul **point stationnaire** de la fonction.

2. Test des points stationnaires

- Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 2.

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{(\partial x_2)^2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$$

- $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$
 - $\det(10) = 10 > 0$
 - $\det \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 12 \end{pmatrix} = 119 > 0$

$Hf(x_1, x_2)$ est **définie positive** :

f admet donc un **minimum local** en $(0,0)$ (et $f(0,0) = 0$).

Exercices

Trouver les extrema et points de selle éventuels des fonctions suivantes

Exercice 15 : $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 + 1)^2$

Exercice 16 : $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$

Exercice 17 : $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^3 + 3x_1^2 + 3x_2^2 - 9x_1$

Exercice 18 : $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + x_1 - 4x_2 + 4$

Exercice 19 : $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2) = 12x_1^2 - 24x_1 \cdot x_2 + x_2^3 + 15x_2^2 - 24x_2$

Exercice 20 : $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^3 + 21x_2^2 - 12x_1x_2 - 24x_2$

Problème résolu

Une firme produit deux types de biens A et B . Son coût total de fabrication, noté C , et la demande respective des deux biens q_A et q_B sont donnés par

$$C = q_A^2 + 2q_B^2 + 10$$

$$q_A = 40 - 2p_A - p_B$$

$$q_B = 35 - p_A - p_B$$

Quels sont les niveaux de production qui maximisent le profit ?

Quels sont les prix de A et B qui suscitent une demande correspondant à ces niveaux optimaux ?

Résolution :

La fonction profit est donnée par $\Pi(q_A, q_B) = q_A \cdot p_A + q_B \cdot p_B - C(q_A, q_B)$

où $\Pi(q_A, q_B)$ ne dépend que des variables q_A et q_B .

$$\text{De } \begin{cases} q_A = 40 - 2p_A - p_B \\ q_B = 35 - p_A - p_B \end{cases} \text{ on peut déduire } \begin{cases} p_A = 5 - q_A + q_B \\ p_B = 30 + q_A - 2q_B \end{cases}$$

et donc que $\Pi(q_A, q_B) = 5q_A - 2q_A^2 + 2q_A \cdot q_B - 4q_B^2 + 30q_B - 10$

Maximiser le profit en fonction niveau de production :

1°) Recherche des points stationnaires de Π .

Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 1 de Π (dérivées premières), et résoudre

$$\text{le système } \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial q_A}(q_A, q_B) = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_B}(q_A, q_B) = 0 \end{cases}.$$

Les solutions (q_A^*, q_B^*) de ce système sont les **points stationnaires** de Π .

$$\begin{cases} 5 - 4.q_A + 2.q_B = 0 \\ 2.q_A - 8.q_B + 30 = 0 \end{cases}$$

Ce système est un système linéaire.

Il peut être résolu simplement par substitution.

$$\begin{cases} q_A = \frac{5}{4} + \frac{q_B}{2} \\ 2.\left(\frac{5}{4} + \frac{q_B}{2}\right) - 8.q_B + 30 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} q_A = \frac{5}{4} + \frac{q_B}{2} \\ q_B = \frac{65}{14} \end{cases} \quad \begin{cases} q_A = \frac{50}{14} \\ q_B = \frac{65}{14} \end{cases}$$

$\left(\frac{50}{14}, \frac{65}{14}\right)$ est donc un point stationnaire de Π .

2°) Test des points stationnaires.

Le point stationnaire $\left(\frac{50}{14}, \frac{65}{14}\right)$ est-il un maximum local de Π ?

- Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 2 (dérivées secondes).

$$H\Pi(q_A, q_B) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{(\partial q_A)^2}(q_A, q_B) & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_B \partial q_A}(q_A, q_B) \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_A \partial q_B}(q_A, q_B) & \frac{\partial^2 \Pi}{(\partial q_B)^2}(q_A, q_B) \end{pmatrix}$$

$$H\Pi(q_A, q_B) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

- Pour le point stationnaire $\left(\frac{50}{14}, \frac{65}{14}\right)$: $H\Pi\left(\frac{50}{14}, \frac{65}{14}\right) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$
 $\det(-4) < 0$
 $\det\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} > 0$
 $\rightarrow H\Pi\left(\frac{50}{14}, \frac{65}{14}\right)$ est définie négative.

Le point stationnaire $\left(\frac{50}{14}, \frac{65}{14}\right)$ est un **maximum local** de Π .

Pour information : $H\Pi(q_A, q_B) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$ ne dépend pas des variables q_A et q_B .

$H\Pi(q_A, q_B) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$ est définie négative en tout point du domaine.

Le point stationnaire $(\frac{50}{14}, \frac{65}{14})$ est un maximum global de Π .

Réponse :

$q_A = \frac{50}{14}$ et $q_B = \frac{65}{14}$ maximisent le profit en fonction des niveaux de production.

Les prix associés p_A et p_B sont donnés par $p_A = 5 - q_A + q_B$ et $p_B = 30 + q_A - 2q_B$.

Les prix associés à ce niveau de production sont $p_A = \frac{85}{14}$ et $p_B = \frac{340}{14}$.

Exercice

Exercice 21

Une entreprise fabrique deux produits A et B dans les quantités q_A et q_B (en milliers). Elle les vend respectivement 12 € et 18 € l'unité. Le coût de fabrication, noté C , est donné par $2 \cdot q_A^2 + q_A \cdot q_B + 2 \cdot q_B^2$.

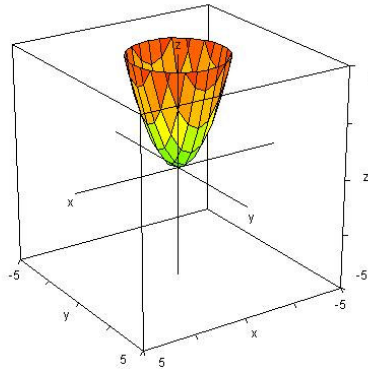
Quel est le niveau de production qui maximise le profit de cette entreprise ?

6.2.3. A propos des courbes de niveau d'une fonction de deux variables

Soit la fonction suivante :

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

La représentation graphique de cette fonction est un parabolôide de révolution (d'équation $z = x^2 + y^2$).



Comment représenter cet objet dans un espace à deux dimensions ?

Si l'on coupe le parabolôide par un plan horizontal d'équation $z = k$ (où k est un nombre réel positif), on obtient ce qu'on appelle une courbe de niveau dans l'espace de la fonction.

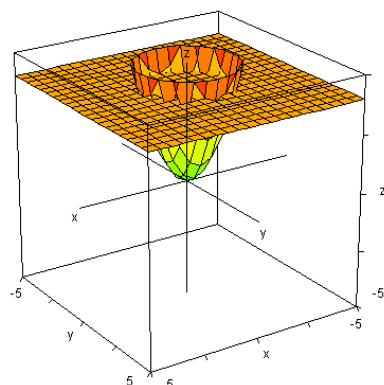
Equation dans l'espace de la courbe de niveau à hauteur k :

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = k \end{cases}$$

Dans le plan Oxy , une **courbe de niveau** à hauteur k est l'ensemble des couples (x,y) qui sont solutions de l'équation $x^2 + y^2 = k$; en d'autres termes, une courbe de niveau d'une fonction f est un ensemble de couples (x,y) qui ont la même image par f .

Exemple 1

Voici une représentation à trois dimensions d'un parabolôide de révolution ($z = x^2 + y^2$) coupé par un plan horizontal à hauteur 4 :



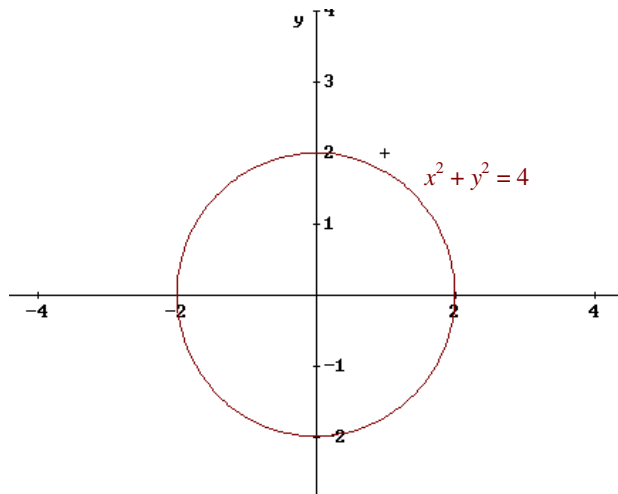
La courbe qui est l'intersection du paraboloïde et du plan a pour équation (dans l'espace) :

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases}$$

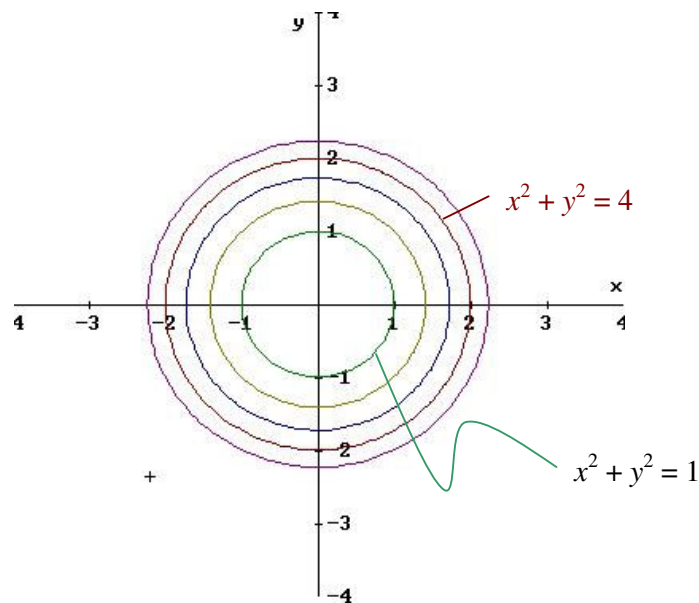
La projection de cette courbe *dans le plan* horizontal oxy est une courbe de niveau d'équation

$$x^2 + y^2 = 4 .$$

C'est un cercle, de centre (0,0) et de rayon 2 ($=\sqrt{4}$).



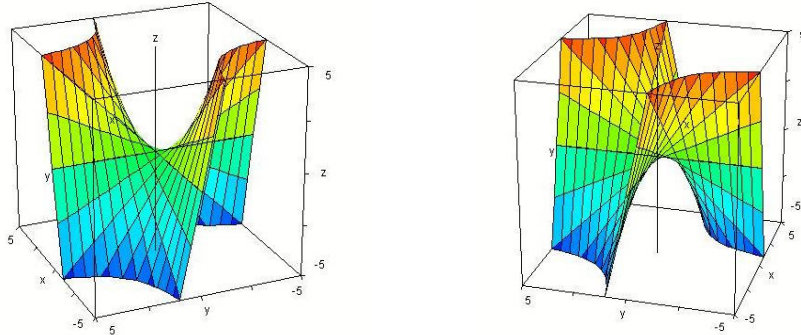
De même, si l'on coupe le paraboloïde à hauteur 0, 1, 2, 3, 4, 5, on trouve 6 courbes de niveau du paraboloïde (la première étant réduite au point (0,0)) :



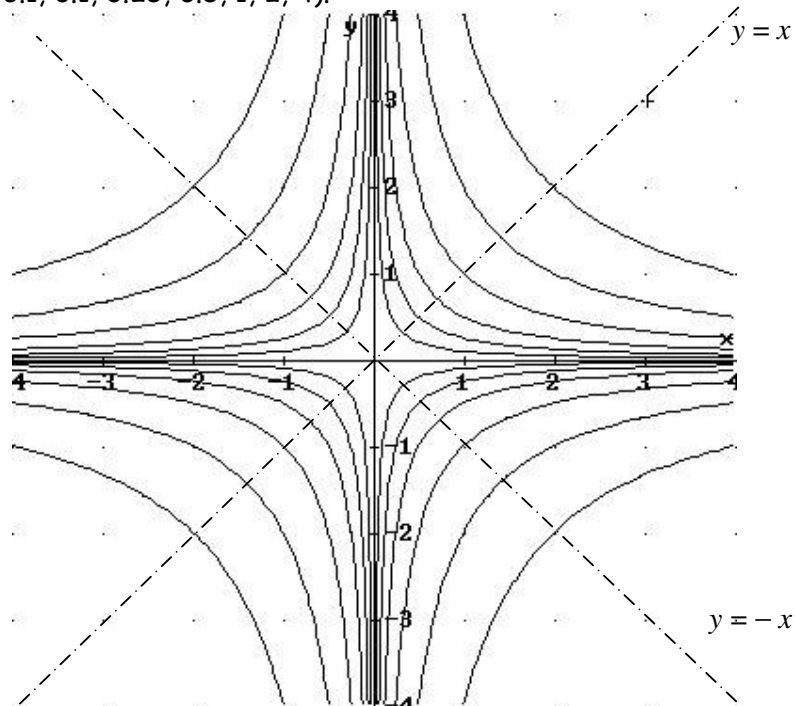
Même si on n'a pas la possibilité d'avoir une représentation graphique en 3D de la surface, on peut quand même voir, grâce aux courbes de niveau, qu'elle admet un minimum (global) en (0,0).

Exemple 2

Voici à présent une représentation à trois dimensions de ce qu'on appelle une « selle de cheval » ($z = x.y$), vue sous deux angles différents.



Ci-dessous, on trouve quelques courbes de niveau de cette surface (aux hauteurs -4, -2, -1, -0.5, -0.25, -0.1, 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2, 4).



Le point de coordonnées (0,0) est un point très particulier. En effet, si l'on suit un « chemin » imaginaire situé sur la surface à la verticale de la droite d'équation $y = x$, on constate que (0,0) est un minimum (« point le plus bas ») pour ce chemin ; d'autre part, en suivant un « chemin » à la verticale de la droite d'équation $y = -x$, le point (0,0) est un maximum.

Un tel point est appelé **point de selle** (ou encore point col, en référence aux cols des montagnes, où un tel phénomène se produit).

Exercice 22

Tracer quelques courbes de niveau de la fonction F définie par $F(x_1, x_2) = 6.x_1 + 8.x_2 - 8$

6.3. Recherche d'extrema de fonctions de n variables sous contrainte d'égalité – Méthode de Lagrange

♣♣♣ syllabus théorie : pages 164 à 179 ♣♣♣

Méthode :

Pour optimiser la fonction F de 2 variables x_1, x_2 définie par $y = F(x_1, x_2)$ soumise à la **contrainte unique** exprimée par l'égalité $g(x_1, x_2) - C = 0$.

1. Ecrire la fonction L appelée **fonction Lagrangienne**.

Cette fonction L dépend de 3 variables x_1, x_2 et λ (nouvelle variable), et est définie comme suit :

$$L(\lambda, x_1, x_2) = F(x_1, x_2) - \lambda \cdot (g(x_1, x_2) - C)$$

2. Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction L .

3. Résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\lambda, x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1}(\lambda, x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(\lambda, x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Les solutions $(\lambda^*, x_1^*, x_2^*)$ de ce système sont les **points stationnaires** de L .

4. Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 2 (dérivées secondes).

$$HL(\lambda, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{(\partial \lambda)^2}(\lambda, x_1, x_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda}(\lambda, x_1, x_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda}(\lambda, x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_1}(\lambda, x_1, x_2) & \frac{\partial^2 L}{(\partial x_1)^2}(\lambda, x_1, x_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1}(\lambda, x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_2}(\lambda, x_1, x_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(\lambda, x_1, x_2) & \frac{\partial^2 L}{(\partial x_2)^2}(\lambda, x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

(NB : Cette matrice s'appelle la hessienne bordée.)

5. Ecrire la matrice hessienne $HL(\lambda^*, x_1^*, x_2^*)$ pour chaque point stationnaire.

➤ Si $\det(HL(\lambda^*, x_1^*, x_2^*)) > 0$,

alors (x_1^*, x_2^*) est un **maximum local de F** sous la contrainte $g(x_1, x_2) - C = 0$.

➤ Si $\det(HL(\lambda^*, x_1^*, x_2^*)) < 0$

alors (x_1^*, x_2^*) est un **minimum local de F** sous la contrainte $g(x_1, x_2) - C = 0$.

➤ Si $\det(HL(\lambda^*, x_1^*, x_2^*)) = 0$

alors il faut passer à d'autres techniques pour conclure...

Exercice résolu

Optimiser la fonction F définie par $F(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_2^2 - x_1 \cdot x_2$ soumise à la contrainte exprimée par l'égalité $x_1 + 2 \cdot x_2 = 24$.

Résolution :

- La contrainte s'écrit $x_1 + 2 \cdot x_2 - 24 = 0$
- Ecrire la fonction L appelée fonction Lagrangienne
 $L(\lambda, x_1, x_2) = F(x_1, x_2) - \lambda \cdot (g(x_1, x_2) - C)$
 $L(\lambda, x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_2^2 - x_1 \cdot x_2 - \lambda \cdot (x_1 + 2 \cdot x_2 - 24)$
- Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction L ,

et résoudre le système
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\lambda, x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1}(\lambda, x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(\lambda, x_1, x_2) = 0 \end{cases} :$$

$$\begin{cases} -(x_1 + 2 \cdot x_2 - 24) = 0 \\ 10 \cdot x_1 - x_2 - \lambda = 0 \\ 12x_2 - x_1 - 2 \cdot \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 - 24 = 0 \\ 10 \cdot x_1 - x_2 = \lambda \\ 6x_2 - \frac{x_1}{2} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 - 24 = 0 \\ 10 \cdot x_1 - x_2 = 6x_2 - \frac{x_1}{2} \\ 6x_2 - \frac{x_1}{2} = \lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 - 24 = 0 \\ \frac{21}{2} \cdot x_1 - 7x_2 = 0 \\ 6x_2 - \frac{x_1}{2} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 - 24 = 0 \\ x_2 = \frac{3}{2} \cdot x_1 \\ 6x_2 - \frac{x_1}{2} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3 \cdot x_1 - 24 = 0 \\ x_2 = \frac{3}{2} \cdot x_1 \\ \lambda = 9 \cdot x_1 - \frac{x_1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 9 \\ \lambda = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 51 \\ x_1 = 6 \\ x_2 = 9 \end{cases}$$

La solution (51,6,9) de ce système est un **point stationnaire de L** ; (6,9) est un point stationnaire de F sous la contrainte $x_1 + 2 \cdot x_2 = 24$.

- Calculer la hessienne bordée

$$HL(\lambda, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{(\partial \lambda)^2}(\lambda, x_1, x_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda}(\lambda, x_1, x_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda}(\lambda, x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_1}(\lambda, x_1, x_2) & \frac{\partial^2 L}{(\partial x_1)^2}(\lambda, x_1, x_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1}(\lambda, x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_2}(\lambda, x_1, x_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(\lambda, x_1, x_2) & \frac{\partial^2 L}{(\partial x_2)^2}(\lambda, x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$HL(\lambda, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 10 & -1 \\ -2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

- Au point stationnaire : $HL(51, 6, 9) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 10 & -1 \\ -2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$

Calculons $\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 10 & -1 \\ -2 & -1 & 12 \end{pmatrix} = -56 < 0$

Conclusion :

Sous la contrainte $x_1 + 2.x_2 = 24$, le point $(6, 9)$ est un **minimum local de F** (avec $\lambda = 51$).

Exercices

Exercice 23

Optimiser la fonction F définie par $F(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ soumise à la contrainte exprimée par l'égalité $x_1 + x_2 = 3$.

Exercice 24

Optimiser la fonction F définie par $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ soumise à la contrainte exprimée par l'égalité $x_1 + 4.x_2 - 2 = 0$.

Exercice 25

Optimiser la fonction F définie par $F(x_1, x_2) = 12.x_1.x_2 - 3.x_2^2 - x_1^2$ soumise à la contrainte exprimée par l'égalité $x_1 + x_2 = 16$.

Exercice 26

Optimiser la fonction F définie par $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 8x_2 - 8$ soumise à la contrainte exprimée par l'égalité $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = 25$.

Exercice 27

Soient X et Y , deux biens, dont les prix unitaires sont respectivement de p_x et p_y . Soit $U(x, y)$, la fonction d'utilité d'un consommateur en présence des biens X et Y . Ce consommateur est tenu d'acheter les quantités x et y des biens X et Y qui lui permettront de maximiser son utilité tout en dépensant tout son budget B .

Aidez ce consommateur à résoudre son problème dans le cas où :

- a) $U(x, y) = (x+2) \cdot (y+1)$, $p_x = 4$, $p_y = 6$ et $B = 130$
- b) $U(x, y) = 20xy - x^2 - y^2$, $p_x = 2$, $p_y = 5$ et $B = 229$.

6.4. Optimisation sous contraintes, vision graphique**Exercice résolu**

Soit la fonction $F(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$.

- a) Repérez graphiquement les extrema de F .
- b) Repérez graphiquement les extrema de F sous les contraintes

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

- c) Repérez graphiquement les extrema de F sous les contraintes

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + 2y \leq 4 \end{cases}$$

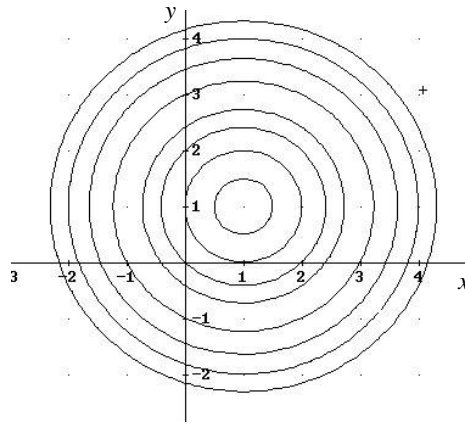
- d) Repérez graphiquement les extrema de F sous la contrainte

$$x - y = 1.$$

Résolution :

a) Repérez graphiquement les extrema de F .

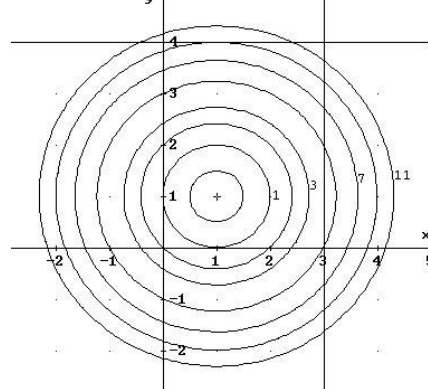
Sur le schéma suivant, on a représenté les courbes de niveaux de F aux hauteurs 0.25, 1, 2, 3, 5, 7, 9 et 11.



On peut voir que F admet un minimum global en $(1,1)$.

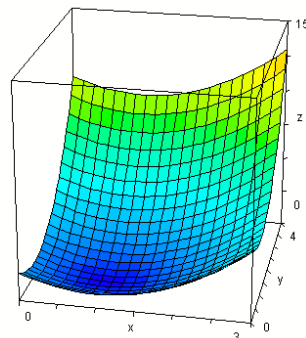
b) Repérez graphiquement les extrema de F sous les contraintes

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$



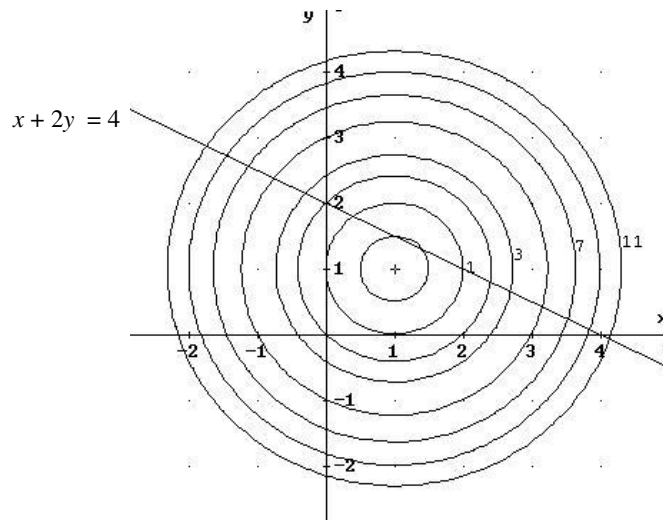
Sous les contraintes que x soit compris entre 0 et 3 et que y soit compris entre 0 et 4, F admet un minimum en $(1,1)$, et 4 extrema locaux en $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,4)$ et $(0,4)$; parmi eux, le plus haut est $(3,4)$ (à hauteur $13 = (3-1)^2 + (4-1)^2$).

Visualisation en 3D du morceau de surface vérifiant les contraintes $0 \leq x \leq 3$ et $0 \leq y \leq 4$:



c) Repérez graphiquement les extrema de F sous les contraintes

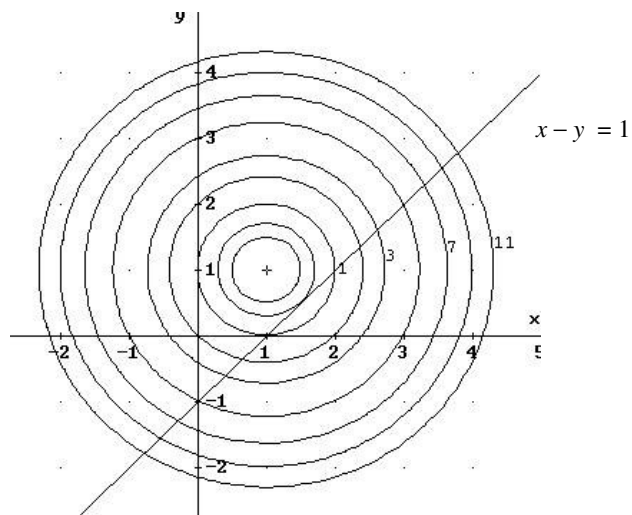
$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + 2y \leq 4 \end{cases}$$



Sous les contraintes ci-dessus, F admet un minimum global en (1,1) et trois maxima locaux en (0,0), (4,0) et (0,2) ; le plus haut de ces trois maxima est en (4,0) (à hauteur $10 = (4-1)^2 + (0-1)^2$).

d) Repérez graphiquement les extrema de F sous la contrainte

$$x - y = 1.$$



Sous la contrainte que $x - y = 1$, F admet un minimum en (1.5 ; 0.5) (l'image de ce point est à hauteur $0.5 = F(1.5 ; 0.5)$).

Exercice

Exercice 28

Résoudre graphiquement les exercices 23, 24 et 26.

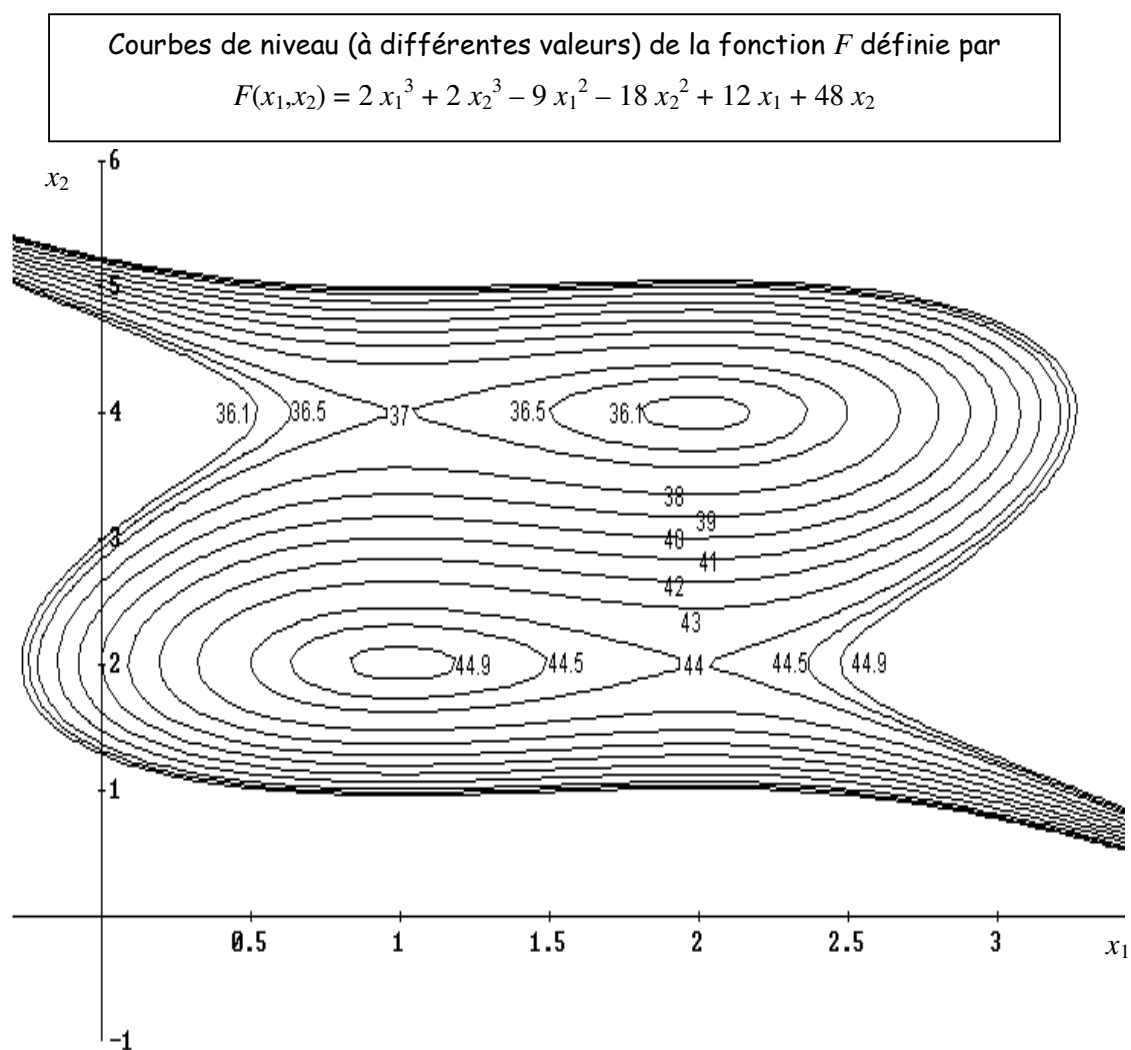
Exercice 29

Soit F la fonction de deux variables x_1 et x_2 définie par

$$F(x_1, x_2) = 2x_1^3 + 2x_2^3 - 9x_1^2 - 18x_2^2 + 12x_1 + 48x_2$$

(vous trouverez ci-dessous la représentation graphique de quelques courbes de niveau de cette fonction F).

- Déterminez analytiquement les extrema locaux et points de selle de F .
- Déterminez (en utilisant une technique analytique ou graphique) les extrema locaux éventuels de F sous la contrainte $2x_1 - x_2 = 0$.
- Déterminez (en utilisant une technique graphique) les extrema locaux éventuels de F sous les contraintes
$$\begin{cases} 0.5 \leq x_1 \leq 2 \\ 1.5 \leq x_2 \leq 4 \end{cases}$$

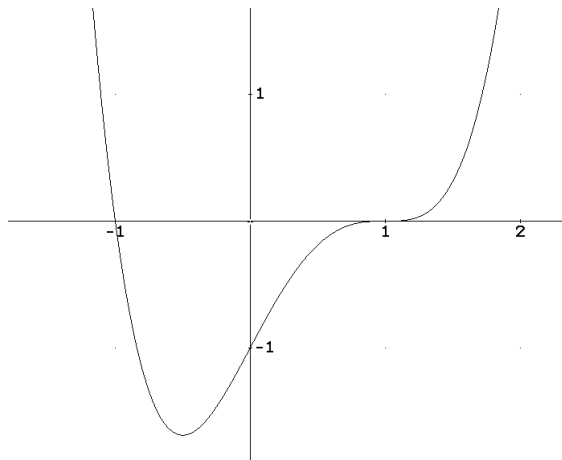


Solution des exercices (Chapitre 6)

Exercice 1

- a) $x^* = 0$ n'est pas un extremum.
- b) $x^* = -\frac{1}{2}$ est un minimum global.
- c) $x^* = 1$ n'est pas un extremum mais est un **point d'inflexion**.

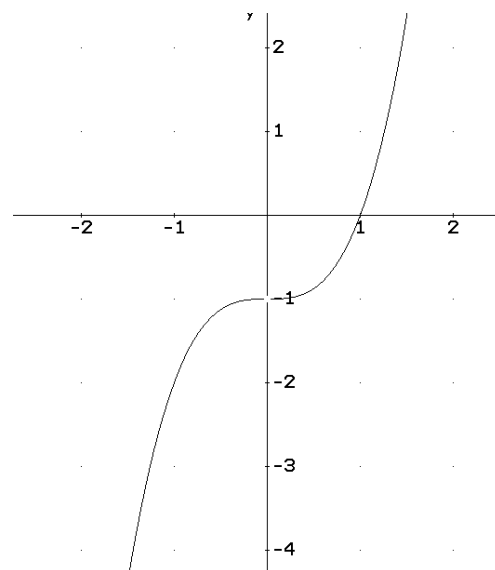
Graphe de f :



Exercice 2

Le point stationnaire $x^* = 0$ est un point d'inflexion (à tangente horizontale).

Graphe de f :

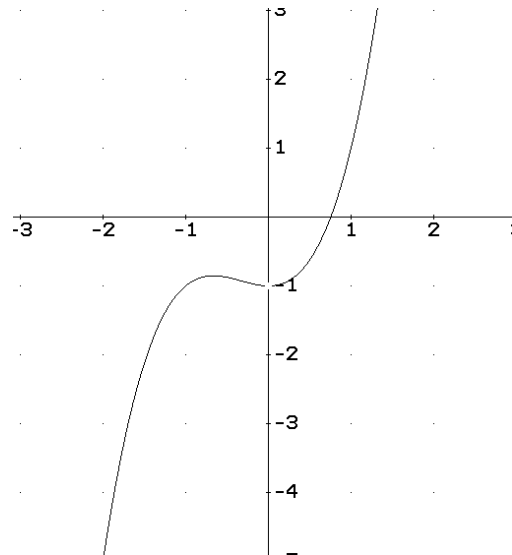


Exercice 3

Le point stationnaire $x^* = 0$ est un minimum.

Le point stationnaire $x^* = -\frac{2}{3}$ est un maximum.

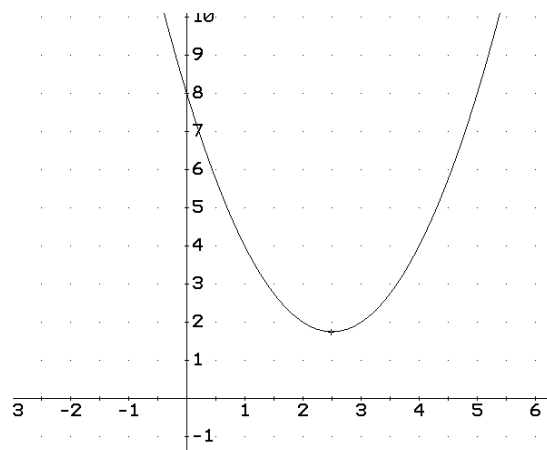
Graphe de f :



Exercice 4

Le point stationnaire $q^* = \frac{5}{2}$ est un minimum local.

Graphe de f :

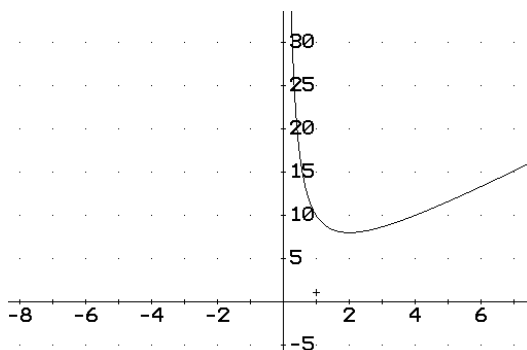


Exercice 5

Attention : $-2 \notin R_0^+$; $x^* = 2$ est donc le seul point stationnaire du domaine de définition de g .

Le point stationnaire $x^* = 2$ est un minimum local

Graphe de g :



Exercice 6

$x^* = 1$ est un maximum local de h , $x^* = 3$ est un minimum local de h .

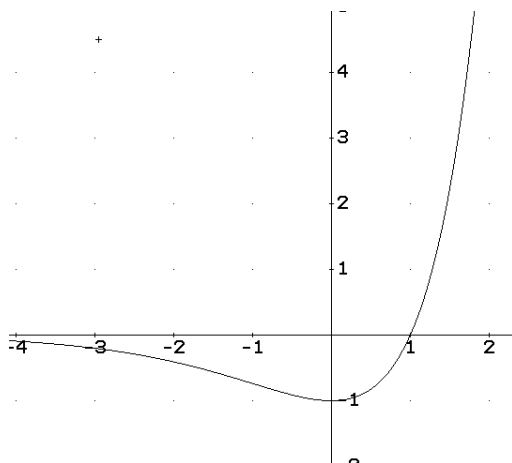
Exercice 7

$x^* = 0$ est un minimum local de i , $x^* = -2$ est un maximum local de i .

Exercice 8

Le point stationnaire $x^* = 0$ est un minimum local de j .

Graphe de j :



Exercice 9

Le profit est donné par $q.p - C(q)$

La fonction profit est donnée par $P(q) = -\frac{1}{3}.q^3 + 6.q^2 - 11.q - 50$

$q^* = 11$ est un maximum de P , et $q^* = 1$ est un minimum de P .

Une demande de 11 unités permet donc de maximiser le profit.

Exercice 10

$p^* = 100$ est un maximum pour R .

Exercice 11

La fonction bénéfice est donnée par $B(q) = \frac{1}{4}.q^3 - 54.q^2 + 2200.q - 10000$

$q^* = 24,6$ est un maximum de B , et $q^* = 119,4$ est un minimum de B .

Une production de 25 CD par semaine procurera un bénéfice maximum.

Exercice 12

a) La fonction bénéfice est donnée par $B(q) = -\frac{3}{4}.q^2 + 15.q - 25$

$q^* = 10$ est un maximum de B .

Le niveau de production qui maximise le bénéfice est de 10 unités.

b) Le coût de production unitaire est donné par $C_u(q) = \frac{C(q)}{q}$

$q^* = 10$ est un minimum de C .

Le niveau de production qui minimise les coûts de production est de 10 unités.

Exercice 13

La production est donnée par $\frac{MO^2}{25} \cdot (3 - \frac{MO}{12})$.

$MO^* = 24$ est un maximum de P et $MO^* = 0$ est un minimum de P .

L'effectif qui maximise la production est donc de 24.

Exercice 14

$$1. \det(2) = 2 > 0 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 4 > 0 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 16 > 0$$

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ est définie positive

$$2. \det(1) = 1 > 0 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est définie positive

$$3. \det(-6) = -6 < 0 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 12 > 0 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{pmatrix} = -72 < 0$$

La matrice $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{pmatrix}$ est définie négative

$$4. \det(-3) = -3 < 0 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

La matrice $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ n'est ni définie positive, ni définie négative

$$5. \det(1) = 1 > 0 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} = a - 4$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$ est définie positive si $a > 4$

$$6. \det(2) = 2 > 0 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 6 > 0 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 0$$

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ n'est ni définie positive, ni définie négative

mais est semi-définie positive.

Exercice 15 : minimum global en (5,-1)

Exercice 16 : point de selle en (0,0)

Exercice 17 : minimum local en (1,0)
point de selle en (1,2) et (-3,0)
maximum local en (-3,2)

Exercice 18 : minimum global en (-2,3)

Exercice 19 : minimum local en (2,2), point de selle en (-4,-4)

Exercice 20 : minimum local en (2,1), point de selle en (-8,-4)

Exercice 21

La fonction profit est donnée par le profit est donné par $12.q_A + 18.q_B - C(q_A, q_B)$

Le profit est maximisé par le niveau de production $q_A = 2$ et $q_B = 4$

Exercice 23

Sous la contrainte $x_1 + x_2 = 3$, F admet un maximum local en $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ (et $\lambda = \frac{3}{2}$).

Exercice 24

Sous la contrainte $x_1 + 4.x_2 - 2 = 0$, F admet un minimum local en $(\frac{2}{17}, \frac{8}{17})$ (et $\lambda = \frac{4}{17}$).

Exercice 25

Sous la contrainte $x_1 + x_2 = 16$, F admet un maximum local en $(9,7)$ (et $\lambda = 66$).

Exercice 26

Sous la contrainte $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = 25$, F admet un maximum local en $(7,7)$ (et $\lambda=1$), ainsi qu'un minimum local en $(1,-1)$ (et $\lambda = -1$).

Exercice 27

a) $x = 16$ et $y = 11$ ($\lambda = 3$).

b) $x = 52$ et $y = 25$ ($\lambda = 198$).

Exercice 29

a) La fonction F admet un maximum local en $(1,2)$, un minimum local en $(2,4)$, et deux points de selle en $(1,4)$ et $(2,2)$.

b) Sous la contrainte $2x_1 - x_2 = 0$, la fonction F admet un maximum local en $(1,2)$ et un minimum local en $(2,4)$.

c) Max en $(1,2)$, et min en $(0.5 ; 1.5)$, $(2 ; 1.5)$, $(0.5 ; 4)$, $(2,4)$.

