BASES MATHEMATIQUES POUR L 'ECONOMIE ET LA GESTION

Pré-requis

B. BRUNQUERS
Chargée de la remédiation

2007-2008

Code **3082**

BASES MATHEMATIQUES POUR L 'ECONOMIE ET LA GESTION

Pré-requis

B. BRUNQUERS
Chargée de la remédiation

1ère Bac. Sc. Gestion
1ère Bac.Ingénieur Sc. Gestion

Ces notes reprennent sous forme de **résumé** les matières étudiées dans le secondaire et supposées acquises .

Ces notions seront utilisées au cours mais n'y seront plus développées .

- Chapitre 1 : **calcul dans les réels R et techniques de dérivation de fonctions**

- Chapitre 2 : **équations**

Équations 1^{er} degré à 1 variable : $mx + p = 0$
Équations 2ème degré à 1 variable : $a.x^2 + b.x + c = 0$
Équations 1^{er} degré à 2 variables : $a.x + by + c = 0$
Équations 2ème degré à 2 variables : $y = a.x^2 + b.x + c$ ou $x^2 + y^2 = r^2$
Équations 1^{er} degré à 3 variables : $a.x + by + cz + d = 0$

- Chapitre 3 : **inéquations**

Inéquations 1^{er} degré à 1 variable : $mx + p >, \geq, <, \leq 0$
Inéquations 2ème degré à 1 variable : $a.x^2 + b.x + c >, \geq, <, \leq 0$
Inéquations 1^{er} degré à 2 variables : $a.x + by + c >, \geq, <, \leq 0$

- Chapitre 4 : **systèmes d'équations et d'inéquations du 1^{er} degré à 2 variables**

- Chapitre 5 : **Théorème de Pythagore**

table des matières

• Chapitre 1 : **calcul dans les réels** R

• Chapitre 2 : **équations**

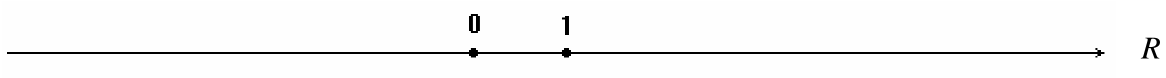
• Chapitre 3 : **inéquations**

Chapitre 1 : calcul dans les réels

1.1. L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

L'ensemble des nombres **réels** R
est constitué de la réunion de deux sous-ensembles de nombres distincts :
les nombres rationnels et les nombres irrationnels : $R = Q \cup I$

Traçons un droite munie d'une origine et d'une unité



A tout point de cette droite correspond un et un seul nombre réel
A tout nombre réel correspond un et un seul point de la droite gradué

Les autres ensembles de nombres connus sont inclus dans l'ensemble des réels R.

$$N \subset Z \subset Q \subset R \qquad \textbf{et} \qquad I \subset R$$

- **L'ensemble des** nombres **naturels** N

$$N = \{0,1,2,3,4,5,........,10,...........,100,...........,1000,.............,10000,..................................\}$$

$\forall n_1, n_2 \in N$: $n_1 + n_2 \in N$ la somme de deux naturels est un naturel
$\forall n_1, n_2 \in N$: $n_1 . n_2 \in N$ le produit de deux naturels est un naturel
$\exists n_1, n_2 \in N$: $n_1 - n_2 \notin N$ *la différence de deux naturels n'est pas toujours un naturel*

$exemple$: $55 - 184 = -129$
$-129 \notin N$
$\rightarrow$*nécessité d'introduire les nombres entiers négatifs*

- **L'ensemble des** nombres **entiers** (relatifs) Z

$$Z=\{......,-1000,..........,-10,.........,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,........,10,.......,1000,......\}$$

$\forall e_1,e_2 \in Z$: $e_1+e_2 \in Z$ la somme de deux entiers est un entier

$\forall e_1,e_2 \in Z$: $e_1.e_2 \in Z$ le produit de deux entiers est un entier

$\forall e_1,e_2 \in Z$: $e_1-e_2 \in Z$ la différence de deux entiers est un entier

$\exists e_1,e_2 \in Z$: $\dfrac{e_1}{e_2} \notin Z$ *le quotient de deux entiers n'est pas toujours un entier*

$$exemple: \frac{-184}{55}=-3{,}34545454.......$$

$$\frac{-184}{55} \notin Z$$

$\rightarrow$ *nécessité d'introduire les nombres rationnels*

- **L'ensemble des** nombres **rationnels** Q

$$Q=\left\{\frac{n}{d} \mid n \in Z.et.d \in N_0\right\}$$

Tout nombre rationnel peut s'écrire sous forme décimale limitée

$$exemple: \quad \frac{5}{4}=1{,}25$$

ou sous forme décimale illimitée périodique

$$exemple: \quad \frac{-184}{55}=-3{,}34\,\underline{54}\ \underline{54}\ \underline{54}\ \underline{54}\ ....$$

$\forall q_1,q_2 \in Q$: $q_1+q_2 \in Q$ la somme de deux rationnels est un rationnel

$\forall q_1,q_2 \in Q$: $q_1.q_2 \in Q$ le produit de deux rationnels est un rationnel

$\forall q_1,q_2 \in Q$: $q_1-q_2 \in Q$ la différence de deux rationnels est un rationnel

$\forall q_1 \in Q$, $\forall q_2 \in Q_0$: $\dfrac{q_1}{q_2} \in Q$

Le quotient de deux rationnels n'est défini qu'à condition que le <u>dénominateur</u> soit <u>non nul</u>

$\exists q_1 \in Q$: $\sqrt{q_1} \notin Q$ *la racine carrée positive d'un rationnel n'est pas toujours un rationnel*

$$exemple: \sqrt{\frac{6}{3}}=\sqrt{2} \approx 1{,}414213562.......$$

forme décimale illimitée non périodique

$\rightarrow$ *nécessité d'introduire les nombres irrationnels*

- **L'ensemble des** nombres **irrationnels** I

L'ensemble des nombres irrationnels est constitué de nombres qui ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux nombres entiers .

Tout nombre irrationnel s'écrit sous forme décimale illimitée non périodique .

$exemples:\ \pi \approx 3{,}14......$, $e \approx 2{,}71......$, $\sqrt{2} \approx 1{,}41......$

remarque : La notation $\sqrt{2}$ désigne le nombre irrationnel par sa propriété .
$\sqrt{2}$ est le nombre dont le carré vaut 2 qui s'écrit sous forme décimale illimitée non périodique .

- **L'ensemble des** nombres **réels** R : $R = Q \cup I$

La racine carrée d'un réel n'est définie que si ce <u>réel</u> est <u>positif ou nul</u>

Le quotient de deux rationnels n'est défini que si le <u>dénominateur</u> est <u>non nul</u>

- **Sous-ensembles de** R

R^+ est l'ensemble est nombres réels positifs : $x \in R^+ \Leftrightarrow x \in R$ et $x \geq 0$
R^- est l'ensemble est nombres réels négatifs : $x \in R^- \Leftrightarrow x \in R$ et $x \leq 0$
R_0 est l'ensemble est nombres réels non nuls : $x \in R_0 \Leftrightarrow x \in R$ et $x \neq 0$
R_0^+ est l'ensemble est nombres réels strictement positifs : $x \in R_0^+ \Leftrightarrow x \in R$ et $x > 0$
R_0^- est l'ensemble est nombres réels strictement négatifs : $x \in R_0^- \Leftrightarrow x \in R$ et $x < 0$

1.2. CONDITIONS D'EXISTENCE DANS L'ENSEMBLE DES REELS

Le quotient de deux réels n'est défini *qu'à condition que le dénominateur soit non nul .*
La racine carrée d'un réel n'est définie qu'à condition que ce réel soit positif ou nul .

Ceci donne lieu aux ***conditions d'existence dans les réels*** :

- $\frac{n}{d} \in R$ **à la condition** $d \neq 0$

- $\sqrt{r} \in R$ **à la condition** $r \geq 0$

  notation : $\sqrt{r} = r^{\frac{1}{2}}$

1.3. PRIORITES DES OPERATIONS

DANS L'ENSEMBLE DES REELS

• L'ordre de priorité des opérations est

1. Les calculs situés entre parenthèses (voir remarque)
2. Les exposants
3. Les multiplications et les divisions
4. Les sommes et les soustractions

remarque : $\frac{n}{d}$ est une notation simplifiée de $\frac{(n)}{(d)}$

• distributivité de l'addition sur la multiplication

$(a+b).c = a.c + b.c$ la multiplication se distribue à droite par rapport à l'addition
$a.(b+c) = a.b + a.c$ la multiplication se distribue à gauche par rapport à l'addition

vocabulaire :
Dans l'expression $a.c + b.c$ la *dernière opération* effectuée est une *addition*
Dans l'expression $(a+b).c$ la *dernière opération* effectuée est un *produit*
$(a+b).c$ est une expression factorisée

1.4. OPERATIONS DANS L'ENSEMBLE DES REELS

Les propriétés de l'addition, la différence , le produit et le quotient dans R sont connues .

Soient a,b,c des nombres réels

- $(a-b)-c \neq a-(b-c)$ la soustraction **<u>n'est pas</u>** associative

- $a-b = a+(-b)$ soustraire le réel b revient à additionner son opposé $(-b)$

- $\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} \neq \dfrac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}$ la division **<u>n'est pas</u>** associative

- **attention** : la notation $\begin{array}{c} a \\ \hline b \\ \hline c \end{array}$ n'a aucun sens sans une barre de fraction principale

en effet : $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}$ **et** $\dfrac{\frac{a}{b}}{C} = \dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}$

- $\dfrac{1}{a}$ n'est défini dans l'ensemble des nombres réels R qu' **à la condition** $a \neq 0$

  notation : $\dfrac{1}{a} = a^{-1}$ **à la condition** $a \neq 0$

- $\dfrac{b}{a} = b.\dfrac{1}{a} = b.a^{-1}$ **à la condition** $a \neq 0$

  diviser par le réel a revient à multiplier par son inverse

1.5. IDENTITES REMARQUABLES

Lorsque la dernière opération effectuée est une addition , on dit que cette expression est **développée** .

Lorsque la dernière opération effectuée est un produit , on dit que cette expression est **factorisée** .

Les **identités remarquables** expriment l'égalité d' une même expression écrite sous sa forme développée et sous sa forme factorisée .

Somme $\longrightarrow$ Produit

$$a^2 + 2.a.b + b^2 = (a+b)^2 = (a+b).(a+b)$$
$$a^2 - 2.a.b + b^2 = (a-b)^2 = (a-b).(a-b)$$

$$a^2 - b^2 = (a-b).(a+b)$$
$a^2 + b^2$ **non factorisable**

$$a^3 - b^3 = (a-b).(a^2 + a.b + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b).(a^2 - a.b + b^2)$$

$$a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3 = (a+b)^3 = (a+b).(a+b).(a+b)$$
$$a^3 - 3.a^2b + 3.a.b^2 - b^3 = (a-b)^3 = (a-b).(a-b).(a-b)$$

Produit $\longrightarrow$ Somme

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2.a.b + b^2$$
$$(a-b).(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a \pm b).(a^2 \mp a.b + b^2) = a^3 \pm b^3$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3.a^2.b + 3.a.b^2 \pm b^3$$

1.6. Racines et puissances

- **puissances naturelles**
  l'exposant est un nombre *naturel*

définitions : si $n \in N_0$ et $a \in R$ alors $a^n = \underbrace{a.a.............a}_{n\ facteurs}$

si $a \neq 0$ alors $a^o = 1$
si $b > 0$ alors $0^b = 0$

propriétés : si $a,b \in R$ et $n,m \in N$: $a^n.a^m = a^{n+m}$

$(a.b)^n = a^n.b^n$

$(a^n)^m = a^{n.m}$

attention : « a^{n^m} » n'a aucun sens et ne devrait même pas s'écrire !

$(a^n)^m \neq a^{(n^m)}$ . . . car $(a^n)^m = a^{n.m}$

$(-r)^n \neq -r^n$ . . . car $-r^n = -(r)^n$

- **puissances entières**
  l'exposant est un nombre *entier*

définition : si $z \in Z_0$ et $a \in R$ alors $a^{-z} = \dfrac{1}{a^z}$

$\dfrac{1}{a^{-z}} = a^z$

Les propriétés connues pour les puissances naturelles restent valables

- **puissances rationnelles**
  l'exposant est un nombre *rationnel*

définition : si $\frac{n}{d} \in Q$ et $a \in R^+$ alors $a^{\frac{n}{d}} = \sqrt[d]{a^n} = \left(\sqrt[d]{a}\right)^n$

attention : a est un nombre réel **positif**

Les propriétés connues pour les puissances naturelles restent valables

- **racines n^èmes**

définition : si n est un nombre naturel **supérieur à 1**

si a est nul $\sqrt[n]{0} = 0$

si a est positif $\sqrt[n]{a}$ est le nombre réel positif tel que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

si **a** est **négatif**

si n est **pair** $\sqrt[n]{a} \notin R$

si n est **impair** $\sqrt[n]{a}$ est le nombre réel ***négatif*** tel que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

propriétés : si $n \in N \setminus \{0,1\}$ et $a,b \in R$: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$$

attention : $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$ **et** $\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} \neq \sqrt[n+m]{a}$

1.7. valeur absolue d'un nombre réel

La valeur absolue d'un nombre réel a se note $|a|$

définition : si $a \geq 0$ alors $|a| = a$
si $a < 0$ alors $|a| = -a$

remarque : si $a < 0$ alors $-a$ désigne un nombre positif !

1.8. symbole de sommation

Pour représenter une expression algébrique $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$
qui est la somme de termes indicés , on utilise le symbole de sommation Σ .

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i)$$

Dans $\sum_{i=1}^{n} (x_i)$ le symbole Σ exprime que l'opération effectuée est une *somme* .

i est un *indice* variant de 1 à n par pas de 1
n est la valeur maximale prise par l'indice
c'est un nombre naturel différent de 0 et 1
x_i est une expression algébrique qui dépend de l'indice i

remarque : L'indice i peut être remplacé par n'importe quelle autre lettre

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i) = \sum_{k=1}^{n} (x_k)$$

. . . . . pour autant que cela ne porte pas à confusion

remarque : On peut utiliser le même type de notation pour une somme de termes indicés même si l'indice ne commence pas à la valeur 1 .

$$x_a + x_{a+1} + x_{a+2} + ... + x_{z-1} + x_z = \sum_{i=a}^{z} (x_i)$$

1.9. Logarithme d'un réel

• Logarithme décimal

Définition : Le **logarithme décimal d'un nombre réel positif non nul** est l'exposant qu'il faut donner à 10 pour obtenir ce nombre .

Si $a > 0$ alors $\log a = x \Leftrightarrow 10^x = a$

propriétés :

Si $a, b > 0$

$$\log(a.b) = \log a + \log b$$

$$\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log(a^r) = r \,.\, \log a$$

<u>**attention**</u> : $\log(a+b) \neq \log a \,.\, \log b$

valeurs particulières : « $\log 0$ » n'est pas défini et ne devrait même pas s'écrire

$\log 1 = 0$

$\log 10 = 1$

$\log(10^r) = r$

utilité : une propriété du logarithme permet de résoudre des équations où la variable est située en exposant

exemple : $a^X = b$

$$\log(a^X) = \log b$$

$$X.\log a = \log b$$

$$X = \frac{\log b}{\log a}$$

• Logarithme népérien

$e = 2{,}71.....$ est un nombre irrationnel

définition : Le **logarithme népérien d'un nombre réel positif non nul** est l'exposant qu'il faut donner à e pour obtenir ce nombre .

Si $a > 0$ alors $\ln a = x \quad \Leftrightarrow \quad e^x = a$

Les propriétés du logarithme décimal restent valables pour le logarithme népérien .

valeurs particulières : « $\ln 0$ » n'est pas défini et ne devrait même pas s'écrire

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln(e^r) = r$

• logarithme de base quelconque b , $b \in R_0^+ \setminus \{1\}$

définition : Le **logarithme de base b d'un nombre réel positif non nul** est l'exposant qu'il faut donner à b pour obtenir ce nombre .

Si $a > 0$ alors $\log_b a = x \quad \Leftrightarrow \quad b^x = a$

valeurs particulières : « $\log_b 0$ » n'est pas défini et ne devrait même pas s'écrire

$\log_b 1 = 0$

$\log_b b = 1$

$\log_b(b^r) = r$

remarque : Pour calculer un logarithme de base quelconque à la **calculatrice** , il faut utiliser la transformation de formule

$$\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)} = \frac{\log(a)}{\log(b)}$$

1.10. Techniques de dérivation des fonctions «analytiques» d'une variable (rem : TRES IMPORTANT !)

Soient f et g deux fonctions dérivables de R dans R

- **formules <u>générales</u>**

$c' = 0$ *si c est une constante réelle*

$x' = 1$ *si x est la variable*

$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$ *somme de deux fonctions réelles*

$\left(f(x) \, . \, g(x)\right)' = f'(x) \, . \, g(x) + f(x) \, . \, g'(x)$ *produit de deux fonctions réelles*

$\left(f^{n}(x)\right)' = n \, . \, f'(x) \, . \, f^{n-1}(x)$ *puissance d'une fonction réelle , $n \in Q$*

$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \, . \, g(x) - f(x) \, . \, g'(x)}{g^{2}(x)}$ *quotient de deux fonctions réelles*

$\left(\sin f(x)\right)' = f'(x) \, . \, \cos f(x)$ *fonction sinus*

$\left(\cos f(x)\right)' = - f'(x) \, . \, \sin f(x)$ *fonction cosinus*

$\left(\log_{a} f(x)\right)' = \dfrac{1}{\ln a} \, . \, \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ *fonction logarithme de base a , $a \in R_0^+ \setminus \{1\}$*

$\left(a^{f(x)}\right)' = \ln a \, . \, f'(x) \, . \, a^{f(x)}$ *fonction exponentielle de base a , $a \in R_0^+ \setminus \{1\}$*

- ## cas particuliers des formules générales

Produit de deux fonctions réelles : $\left(f(x)\ .\ g(x) \right)' = f'(x)\ .\ g(x) + f(x)\ .\ g'(x)$

cas particulier :

- *une des deux fonctions est une fonction constante* $\left(c\,.\,g(x) \right)' = c\ .\ g'(x)$
  $\forall c \in R$

Puissance d'une fonction réelle : $\left(f^{n}(x) \right)' = n\ .\ f'(x)\ .\ f^{n-1}(x)$

cas particuliers :

- *la fonction f est la fonction identique* $\left(x^{n} \right)' = n\ .\ x^{n-1}$
- la puissance $n = \dfrac{1}{2}$ $\sqrt{f(x)}' = \dfrac{1}{2.\sqrt{f(x)}}.f'(x)$
- *la fonction f est la fonction identique et* $n = \dfrac{1}{2}$ $\sqrt{x}' = \dfrac{1}{2.\sqrt{x}}$

Quotient de deux fonctions réelles : $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right)' = \dfrac{f'(x)\ .\ g(x) - f(x)\ .\ g'(x)}{g^{2}(x)}$

cas particulier :

- *la fonction du numérateur est une fonction constante* $\left(\dfrac{c}{g(x)} \right)' = -\ c\ .\ \dfrac{g'(x)}{g^{2}(x)}$
- *la fonction du dénominateur est une fonction constante* $\left(\dfrac{f(x)}{c} \right)' = \dfrac{1}{c}\ .\ f'(x)$

Fonction sinus : $\left(\sin f(x)\right)' = f'(x) \,.\, \cos f(x)$

cas particulier :

- *la fonction f est la fonction identique* $(\sin x)' = \cos x$

Fonction cosinus : $\left(\cos f(x)\right)' = -\, f'(x) \,.\, \sin f(x)$

cas particulier :

- *la fonction f est la fonction identique* $(\cos x)' = -\sin x$

Fonction logarithme : $\left(\log_a f(x)\right)' = \dfrac{1}{\ln a} \,.\, \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

cas particuliers :

- *la fonction f est la fonction identique* $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \,.\, \ln a}$

- *la base est le nombre* e

  dérivée de la fonction logarithme népérien $\left(\ln f(x)\right)' = \dfrac{1}{f(x)} \,.\, f'(x)$

- *la fonction f est la fonction identique et la base est le nombre* e $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

Fonction exponentielle : $\left(a^{f(x)}\right)' = \ln a \,.\, f'(x) \,.\, a^{f(x)}$

cas particuliers :

- *la fonction f est la fonction identique* $\left(a^x\right)' = a^x . \ln a$

- *la base est le nombre* e

  dérivée de la fonction exponentielle de base e $\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} . f'(x)$

- *la base est le nombre* e

  dérivée de la fonction exponentielle de base e

  la fonction f est la fonction identique $\left(e^x\right)' = e^x$

Chapitre 2 : équations

2.1. INTRODUCTION

Une **équation** est une égalité entre deux expressions mathématiques en une ou plusieurs variables .
Résoudre une **équation** c'est déterminer les valeurs des variables qui rendent cette égalité vraie . Ces valeurs sont appelées **solutions** de l'équation .

Des équations équivalentes sont des équations qui ont exactement les mêmes solutions.

On garde des **équations équivalentes** si on **additionne** (ou soustrait) aux deux membres d'une équation *le même **réel*** .
On garde des **équations équivalentes** si on **multiplie** (ou divise) les deux membres d'une équation par *un même **réel non nul*** .

Les expressions figurant dans une équation n'existent qu'à certaines conditions .
Cela amène à imposer les **conditions d'existence** sur les variables .
Si , après calcul , on est amené à trouver une solution qui ne satisfait pas les conditions d'existence , il faudra les rejeter .

A savoir : $P.Q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P = 0$ ***ou*** $Q = 0$

$\frac{N}{D} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N = 0$ ***et*** $D \neq 0$

- **Classification des équations**

<u>équations à une variable</u> x

équations du 1er degré à une variable : $mx + p = 0$
équations du 2ème degré à une variable : $a.x^2 + b.x + c = 0$

<u>équations à deux variables</u> x , y
équations du 1er degré à deux variables : $a.x + by + c = 0$
équations du 2ème degré à deux variables : exemples $y = a.x^2 + b.x + c$ ou $x^2 + y^2 = r^2$

<u>équations à trois variables</u> x , y , z
équations du 1er degré à trois variables $a.x + by + cz + d = 0$

2.2. EQUATIONS à UNE VARIABLE

Résoudre une équation à une variable c'est déterminer la ou les valeurs de cette variable qui rendent vraie l'égalité qui définit l'équation .
Ces valeurs sont appelées **solutions** de l'équation .

- **équations du 1er degré à une variable** x : $mx + p = 0$

si $m \neq 0$ une solution $S = \left\{ \frac{-p}{m} \right\}$

- **équations du 2ème degré à une variable** x :

<u>équation de base</u> : $x^2 = a$

Si $a > 0$ deux solutions $S = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$
Si $a = 0$ une solution $S = \{0\}$
Si $a < 0$ pas de solution $S = \phi$

<u>équation générale</u> : $a.x^2 + b.x + c = 0$

Calculer $\Delta = b^2 - 4.a.c$

Si $\Delta > 0$ deux solutions $Sol = \left\{ \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a}, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a} \right\}$

Si $\Delta = 0$ une solution $Sol = \left\{ \frac{-b}{2.a} \right\}$

Si $\Delta < 0$ pas de solution $Sol = \phi$

Graphiquement , chaque solution d'une équation à une variable peut être représentée par un **point d'une droite graduée** .

2.3. EQUATIONS à DEUX VARIABLES

Résoudre une équation à deux variables c'est déterminer les couples de valeurs de ces variables qui rendent vraie l'égalité qui définit l'équation .
Ces **couples** sont appelées **solutions** de l'équation .

- **équations du 1er degré à deux variables** $x\,,y$:

$a.x + by + c = 0$
une infinité de couples-solutions $S = \{\ (x, y) \mid a.x + by + c = 0\ \}$

Graphiquement , l'ensemble des couples-solutions d'une équation du 1er degré à deux variables peut être représenté par une **droite du plan** .

- **équations du 2ème degré à deux variables** $x\,,y$:

exemple 1 : $y = a.x^2 + b.x + c$
une infinité de couples-solutions
$S = \{\ (x, y) \mid y = a.x^2 + b.x + c\ \}$

Graphiquement ,
l'ensemble des couples-solutions de cette équation du 2ème degré à deux variables peut être représenté par une **parabole du plan** (muni d'un repère) dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe des y .

exemple 2 : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
une infinité de couples-solutions
$S = \{\ (x, y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\ \}$

Graphiquement ,
l'ensemble des couples-solutions de cette équation du 2ème degré à deux variables peut être représenté
par un **cercle d'un plan** (muni d'un repère orthonormé)
de centre (a,b) et de rayon r .

- **rappel sur les droites du plan** : équations du 1er degré à deux variables

équation générale : $d \equiv a.x + b.y + c = 0$, $a, b, c \in R$

(l'équation de toute droite du plan, sans exception , peu s'écrire sous cette forme)

équations particulières

droite parallèle à l'axe y : $d \equiv x = r$, $r \in R$

droite parallèle à l'axe x : $d \equiv y = p$, $p \in R$

droite non parallèle à l'axe y : $d \equiv y = m.x + p$, $m, p \in R$

droite non parallèle à l'axe y et comprenant deux points donnés (x_1, y_1) et (x_2, y_2)

$$d \equiv y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right).(x - x_1)$$

où $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *est le coefficient angulaire (pente)*

droites parallèles entre elles

Deux droites non parallèles à l'axe y sont parallèles
si elles ont le même coefficient angulaire (pente)

$$d_1 \equiv y = m.x + p_1 \quad // \quad d_2 \equiv y = m.x + p_2$$

Deux droites parallèles à l'axe y sont parallèles entre elles

$$d_1 \equiv x = r_1 \quad // \quad d_2 \equiv x = r_2$$

droites perpendiculaires entre elles

Deux droites non parallèles aux axes sont perpendiculaires
si leurs coefficients de direction m_1 et m_2 sont tels que $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$

$$d_1 \equiv y = m_1.x + p_1 \quad \perp \quad d_2 \equiv y = -\frac{1}{m_1}.x + p_2$$

Deux droites parallèles aux axes sont perpendiculaires

$$d_1 \equiv x = c_1 \quad \perp \quad d_2 \equiv y = c_2$$

- **Rappel sur les paraboles du plan** dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe des y
  équations du 2ème degré à deux variables

équation d'une parabole à axe de symétrie vertical :

$$P \equiv y = a.x^2 + b.x + c \qquad , \qquad a,b,c \in R$$

1. **CONCAVITE**
   La concavité est déterminée par le signe du coefficient de x^2

   $a > 0 \qquad \Rightarrow$ la parabole a sa concavité tournée vers le haut : $\cup$

   $a < 0 \qquad \Rightarrow$ la parabole a sa concavité tournée vers le bas : $\cap$

2. **AXE DE SYMETRIE**
   L'axe de symétrie est parallèle à l'axe OY et a pour équation $sym \equiv x = \dfrac{-b}{2.a}$

3. **EXTREMUM**
   $a > 0 \qquad \Rightarrow$ l ' **extremum** est un minimum
   $a < 0 \qquad \Rightarrow$ l ' **extremum** est un maximum

   Calculer $\Delta = b^2 - 4.a.c$
   L 'extremum a pour coordonnée $\left(\dfrac{-b}{2.a}, \dfrac{-\Delta}{4.a}\right)$

4. **INTERSECTION DE LA PARABOLE AVEC LES AXES**

- intersection **avec l'axe des y** : un seul point de coordonnée $(0, c)$
- intersection **avec l'axe des x** : le nombre de points d'intersection varie de 0 à 2 .

Calculer $\Delta = b^2 - 4.a.c$ (*déjà calculé au point 3*)

Si $\Delta > 0$ deux points d'intersection $\left(\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a}, 0\right)$ et $\left(\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a}, 0\right)$

Si $\Delta = 0$ un seul point d'intersection $\left(\dfrac{-b}{2.a}, 0\right)$

Si $\Delta < 0$ aucun point d'intersection

2.4. EQUATIONS du 1er degré à trois variables

Résoudre une équation à trois variables c'est déterminer les triples de valeurs de ces variables qui rendent vraie l'égalité qui définit cette équation .
Ces **triples** sont appelées **solutions** de l'équation .

- **équations du 1er degré à trois variables** x , y , z

  $a.x+by+cz+d=0$

  une infinité de triples-solutions $S=\{\ (x,y,z)\,|\,a.x+by+cz+d=0\ \}$

  Graphiquement ,
  l'ensemble des triples-solutions de cette équation du 1er degré à trois variables peut être représentée par un **plan** de l'espace .

- **rappel sur les plans** de l'espace

  équation générale : $\Pi \equiv a.x+by+cz+d=0$, $a,b,c,d\in R$

  (l'équation de toute plan de l'espace, sans exception , peu s'écrire sous cette forme)

équations particulières :

- plan comprenant trois points situés sur les axes $(a_x,0,0)$, $(0,b_y,0)$, $(0,0,c_z)$

$$\Pi \equiv \frac{x}{a_x}+\frac{y}{b_y}+\frac{z}{c_z}=1 \quad , a_x,b_y,c_z\in R_0$$

- plan perpendiculaire à l'axe Z
  plan parallèle au plan XY
  $\Pi \equiv z=t$

- plan perpendiculaire à l'axe Y
  plan parallèle au plan XZ
  $\Pi \equiv y=s$

- plan perpendiculaire à l'axe X
  plan parallèle au plan YZ
  $\Pi \equiv x=r$

- plan comprenant l'origine $(0,0,0)$: $\Pi \equiv a.x+b.y+c.z=0$

Chapitre 3 : inéquations

3.1. INTRODUCTION

Une **inéquation** est un énoncé qui exprime que deux expressions mathématiques ne sont pas égales et que l'une est (strictement ou pas) plus petite que l'autre .
Résoudre une inéquation c'est déterminer les valeurs des variables qui rendent cette inégalité vraie . Ces valeurs sont appelées **solutions** de l'inéquation .

Deux **inéquations** sont **équivalentes** si elles ont exactement les mêmes solutions .

On garde des **inéquations équivalentes** si on **additionne** (ou soustrait) aux deux membres d'une inéquation *le même **réel*** .

On garde des **inéquations équivalentes** si on **multiplie** (ou divise) les deux membres d'une inéquation par *un même **réel** **positif** **non nul.***

Si on **multiplie** (ou divise) les deux membres d'une inéquation **par *un même réel négatif non nul*** alors , **l'inégalité « se retourne »** .

Les expressions figurant dans une inéquation n'existent qu'à certaines conditions .
Cela amène à imposer les **conditions d'existence** sur les variables .
Si , après calcul , on est amené à trouver une solution qui ne satisfait pas les conditions d'existence , il faudra les rejeter .

- **Classification des inéquations**

inéquations à une variable x

inéquations du 1er degré à une variable : $mx + p \geq 0$, $mx + p > 0$
$mx + p \leq 0$, $mx + p < 0$

inéquations du 2ème degré à une variable : $a.x^2 + b.x + c \geq 0$, $a.x^2 + b.x + c > 0$
$a.x^2 + b.x + c \leq 0$, $a.x^2 + b.x + c < 0$

inéquations à deux variables x , y

inéquations du 1er degré à deux variables : $a.x + by + c \geq 0$, $a.x + by + c > 0$
$a.x + by + c \leq 0$, $a.x + by + c < 0$

3.2. INEQUATIONS A UNE VARIABLE

Résoudre une inéquation à une variable c'est déterminer les valeurs de cette variable qui rendent vraie l'inégalité qui définit cette inéquation .
Ces valeurs sont appelées **solutions** de l'inéquation .

• inéquations du 1^{er} degré à une variable x

Toute inéquation du 1er degré à une variable peut s'écrire sous une des formes

$a.x+b>0$ ou $a.x+b\geq 0$ ou $a.x+b<0$ ou $a.x+b\leq 0$
avec $a,b\in R$ et $a\neq 0$

<u>1ère méthode : utilisation des principes d'équivalence des inéquations</u>

exemple : résolution de l'inéquation $a.x+b\leq 0$ *où* $a,b\in R$ *et* $a\neq 0$

$$a.x+b\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad a.x\leq -b$$

si $a>0$: $a.x+b\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\leq\frac{-b}{a}$ *principe d'équivalence*

si $a<0$: $a.x+b\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\geq\frac{-b}{a}$ ***le signe d'inégalité change***

<u>2ème méthode : utilisation d'un tableau de signes</u>

1. Transformer l'énoncé pour obtenir une inéquation équivalente comparée à 0 .

2. Ecrire le tableau des signes

valeur de x		$\frac{-b}{a}$	
signe de $a.x+b$	**signe de** $(-a)$	**0**	**signe de** a

3. Lire les signes exprimés dans l'énoncé :
   convention : **vert** pour les signes acceptés et **rouge** pour les signes rejetés
   pour l'inéquation $a.x+b>0$ ***vert*** *pour les signes* ***+***
   pour l'inéquation $a.x+b\geq 0$ ***vert*** *pour les signes* ***+ et 0***
   pour l'inéquation $a.x+b<0$ ***vert*** *pour les signes* ***–***
   pour l'inéquation $a.x+b\leq 0$ ***vert*** *pour les signes* ***– et 0***

4. Ecrire l'ensemble des solutions

- exemple de résolution d'une inéquation du 1er degré à 1 variable

Résoudre dans R : $-2.x+3 \leq 0$

première méthode

$-2.x+3 \leq 0$

$-2.x \leq 3$

$-x \leq \frac{3}{2}$

$x \geq \frac{3}{2}$

$S = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$

seconde méthode

1. rechercher la solution de **l'équation** $-2.x+3=0$: on obtient $x=\frac{3}{2}$

2. écrire les tableau des signes

valeur de x		$\frac{3}{2}$	
signe de $-2.x+3$	+	0	-

3. Lire les **signes – et 0** dans le tableau des signes .

4. $S = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$

- ## inéquations du 2$^{\text{ème}}$ degré à <u>une variable</u> x

Toute inéquation du 2$^{\text{ème}}$ degré à une variable peut s'écrire sous une des formes

$a.x^2+b.x+c>0$ **ou** $a.x^2+b.x+c\geq 0$ **ou** $a.x^2+b.x+c<0$ **ou** $a.x^2+b.x+c\leq 0$
avec $a,b,c\in R$ et $a\neq 0$

<u>méthode unique : utilisation d'un tableau de signes</u>

1. Calculer $\Delta=b^2-4.a.c$ et **observer son signe**

2. **Ecrire le tableau des signes**

- Si $\Delta>0$ alors les deux solutions x_1,x_2 de l'**équation** sont $\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}$
  on choisit $x_1<x_2$

valeur de x		x_1		x_2	
signe de $a.x^2+b.x+c$	signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a

- Si $\Delta=0$ alors la solution unique x_0 de l'**équation** est $\dfrac{-b}{2.a}$

valeur de x		x_0	
signe de $a.x^2+b.x+c$	signe de a	0	signe de a

- Si $\Delta<0$ alors l'**équation** ne possède aucune solution

valeur de x	**toutes**
signe de $a.x^2+b.x+c$	signe de a

3. Lire les signes exprimés dans l'énoncé :
   convention : **vert** pour les signes acceptés et **rouge** pour les signes rejetés
   pour l'inéquation $a.x^2+b.x+c>0$ ***vert*** *pour les signes* **+**
   pour l'inéquation $a.x^2+b.x+c\geq 0$ ***vert*** *pour les signes* **+ et 0**
   pour l'inéquation $a.x^2+b.x+c<0$ ***vert*** *pour les signes* **–**
   pour l'inéquation $a.x^2+b.x+c\leq 0$ ***vert*** *pour les signes* **– et 0**

4. Ecrire l'ensemble des solutions

- exemples de résolution d'une inéquation du 2ème degré à 1 variable

exemple 1 : résoudre dans R $4 - x^2 \leq 0$

1. Les solutions de **l'équation** sont $x = \pm 2$
   $\Delta > 0$ car **l'équation** $4 - x^2 = 0$ possède deux solutions .

2. écrire le tableau des signes

valeur de x		-2		2	
signe de $4 - x^2$	-	0	+	0	-

4. Lire le tableau des signes :
   les solutions de $4 - x^2 \leq 0$ sont données par $S = \left]-\infty,-2\right] \cup \left[2,+\infty\right[$

exemple 2 : résoudre dans R $x^2 + 1 \leq 0$

1. **l'équation** ne possède aucune solution : $\Delta = -4$ donc $\Delta < 0$

2. écrire le tableau des signes

valeur de x	
signe de $x^2 + 1$	+

3. Lire le tableau des signes : aucune valeur de x n'est associée à $x^2 + 1 \leq 0$ et $S = \phi$

exemple 3 : résoudre dans R $(4 - x)^2 > 0$

1. La solution de **l'équation** $x_0 = 4$ est unique
   $\Delta = b^2 - 4.a.c$ n'a pas été calculé mais on connaît son signe :
   $\Delta = 0$ car **l'équation** $(4 - x)^2 = 0$ possède une seule solution .

2. écrire le tableau des signes

valeur de x		4	
signe de $(4 - x)^2$	+	0	+

3. Lire le tableau des signes :
   les solutions de $(4 - x)^2 > 0$ sont données par $S = R \setminus \{4\}$

3.3. INEQUATIONS A DEUX VARIABLES

Résoudre une inéquation à deux variables c'est déterminer les couples de valeurs de ces variables qui rendent vraie l'inégalité qui définit cette inéquation .
Ces couples de valeurs sont appelées **solutions** de l'inéquation .

• inéquations du 1^er^ degré à <u>deux variables</u> x , y

Toute inéquation du **1er degré à deux variables** peut s'écrire sous la forme

$a.x+b.y+c<0$ **ou** $a.x+b.y+c>0$ **ou** $a.x+b.y+c\leq 0$ **ou** $a.x+b.y+c\geq 0$

où $a,b,c\in R$

Cette inéquation possède une **infinité de couples-solutions**
dont la représentation graphique est un **demi-plan délimité par une droite** .

La représentation graphique des solutions des inéquations
$a.x+b.y+c<0$ **ou** $a.x+b.y+c>0$ est un **demi-plan ouvert**

La représentation graphique des solutions des inéquations
$a.x+b.y+c\leq 0$ **ou** $a.x+b.y+c\geq 0$ est un **demi-plan fermé**

• rappel : pour représenter un demi-plan ouvert ou fermé

1. représenter la droite qui le détermine
   en rouge si l'inéquation est du type $a.x+b.y+c<0$ **ou** $a.x+b.y+c>0$
   en vert si l'inéquation est du type $a.x+b.y+c\leq 0$ **ou** $a.x+b.y+c\geq 0$

2. choisir un point extérieur à cette droite

3. en remplaçant les coordonnées de ce point dans l'expression algébrique $a.x+b.y+c$, on obtient un nombre réel .

4. Le signe de ce nombre réel est le signe du demi-plan auquel il appartient .
   Le demi-plan qui convient est surligné en vert et l'autre en rouge .

- exemples de résolution d'une inéquation du 1er degré à 2 variables

exemple 1 : représenter dans R^2 les solutions de $-2.x-2>y$

Cette inéquation est équivalente à $2.x+y+2<0$

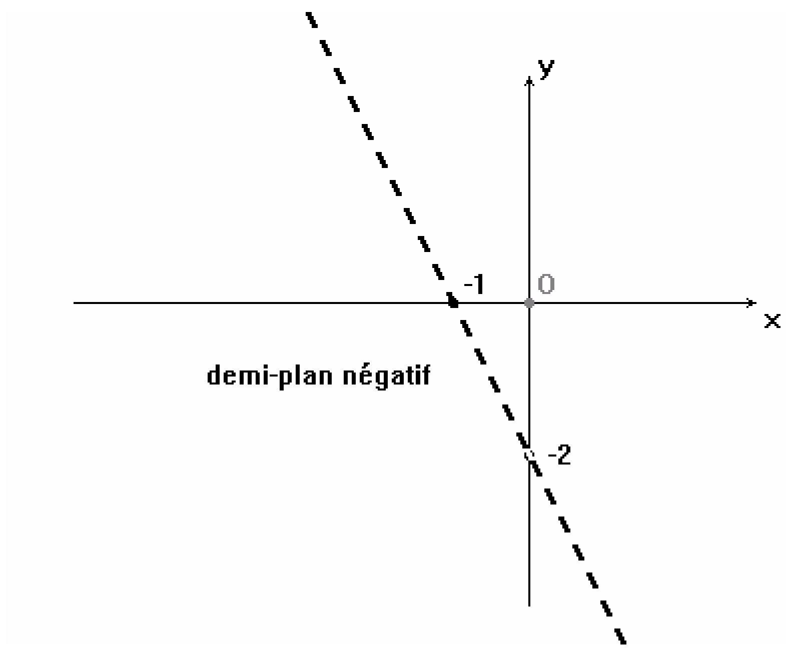
Représenter la **droite** d'équation $4.x+y+2=0$ en **rouge** car l'**inégalité** est **stricte** .

Choisir un point n'appartenant pas à cette droite et remplacer dans $2.x+y+2$
ex :$(0{,}0)$
$2.0+0+2=2$ et 2 est un réel positif .

Le demi-plan comprenant le point $(0{,}0)$ est donc le demi-plan positif .
Le demi-plan ne comprenant pas le point $(0{,}0)$ est donc le demi-plan négatif .

Les solutions de $2.x+y+2<0$ sont représentées par le **demi-plan** ouvert **négatif**

Ce demi-plan est à hachurer en vert , la droite est à dessiner en rouge .



exemple 2 : représenter dans R^2 les solutions $x \geq 0$

Demander une représentation des solutions dans R^2 implique qu'il faut considérer cette inéquation comme une inéquation à deux variables x et y .

Cette inéquation est équivalente à $x + 0.y \geq 0$

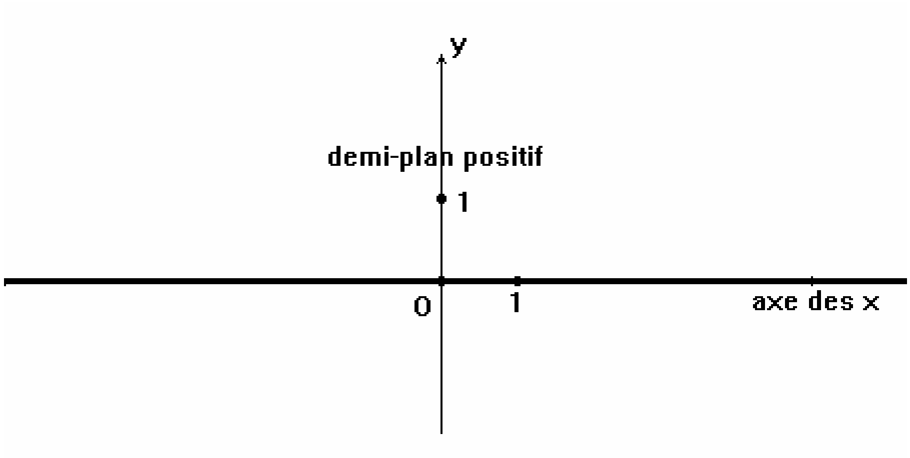
Représenter la **droite** d'équation $x = 0$ en **vert** car l' **inégalité** n'est **pas stricte** .

Choisir un point n'appartenant pas à cette droite et remplacer dans $x + 0.y$
ex :$(1,1)$
$1 + 0.1 = 1$ et 1 est un réel positif .

Le demi-plan comprenant le point $(1,1)$ est donc le demi-plan positif .
Le demi-plan ne comprenant pas le point $(1,1)$ est donc le demi-plan négatif .

Les solutions de $x \geq 0$ sont représentées par le **demi-plan** fermé **positif** .

Ce demi-plan est à hachurer en vert , la droite est à dessiner en vert .



Chapitre 4 :
systèmes du premier degré à deux variables

4.1. Systèmes d'équations du premier degré à 2 variables

- **notation**

Un système de 2 équations du premier degré en les 2 variables x et y

se note $\begin{cases} a_1.x + b_1.y = c_1 \\ a_2.x + b_2.y = c_2 \end{cases}$

Résoudre un **système d'équations** , c'est déterminer les valeurs des variables qui rendent **toutes les égalités du système vraies** .
Ces valeurs sont appelées **solutions** du système d'équations .

- **nombre de solutions d'un système :**

Un système à 2 variables peut posséder une solution unique
une infinité de solutions (système indéterminé)
aucune solution (système impossible)

4.1.1 résolution algébrique d'un système de 2 équations du premier degré en les variables x et y

$$\begin{cases} a_1.x + b_1.y = c_1 \\ a_2.x + b_2.y = c_2 \end{cases}$$

méthodes de résolution : méthode de substitution
méthode des combinaisons linéaires
méthode de Cramer

remarque : la méthode de Cramer sera étudiée au cours de bases mathématiques

Exemple 1 :

- **résolution du système** $\begin{cases} 2.x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ **par la méthode de substitution**

1. isoler une variable dans un membre d'une des équations

$$\begin{cases} x = \dfrac{4-y}{2} \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

2. remplacer cette variable dans l'autre équation

$$\begin{cases} x = \dfrac{4-y}{2} \\ 3.\left(\dfrac{4-y}{2}\right) + 2.y = 7 \end{cases}$$

3. résoudre l'équation du premier degré à une variable ainsi obtenue

$$\begin{cases} x = \dfrac{4-y}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

4. remplacer la valeur obtenue pour cette variable dans l'autre équation

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

5. le couple-solution du système est $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Exemple 2 :

- **résolution du système** $\begin{cases} 2.x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ **par la méthode des combinaisons linéaires**

1. multiplier les 2 membres de chaque équation afin d'obtenir des coefficients opposés pour une des variables dans chacune des équations

$\begin{cases} 2.x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ variable x : manipulation à effectuer $\begin{matrix} L_1 \to 3.L_1 \\ L_2 \to -2.L_2 \end{matrix}$

$$\begin{cases} 6.x + 3.y = 12 \\ -6x - 4y = -14 \end{cases}$$

2. additionner membre à membre dans une des équations

manipulation à effectuer $\begin{matrix} rien \\ L_2 \to L_1 + L_2 \end{matrix}$

$$\begin{cases} 6.x + 3.y = 12 \\ -y = -2 \end{cases}$$

3. résoudre l'équation du premier degré à une variable ainsi obtenue $\begin{cases} 6.x + 3.y = 12 \\ y = 2 \end{cases}$

4. recommencer la même démarche pour l'autre variable

$\begin{cases} 2.x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ variable y : manipulation à effectuer $\begin{matrix} L_1 \to -2.L_1 \\ rien \end{matrix}$

$\begin{cases} -4.x - 2.y = -8 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ manipulation à effectuer $\begin{matrix} rien \\ L_2 \to L_1 + L_2 \end{matrix}$

$\begin{cases} -4.x - 2.y = -8 \\ -x = -1 \end{cases}$ résoudre l'équation du premier degré obtenue

$$\begin{cases} -4.x - 2.y = -8 \\ x = 1 \end{cases}$$

5. le couple-solution du système est $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

4.1.2 résolution graphique d'un système de 2 équations du premier degré en les variables x et y

La représentation graphique d'une équation du premier degré à 2 variables est une droite .
La représentation graphique de la solution d'un système de deux équations du premier degré à 2 variables est l'intersection de deux droites .

Si les 2 droites sont sécantes , il existe un seul couple – solution .
Il est représenté par le point d'intersection des 2 droites .

Si les 2 droites sont confondues , il existe une infinité de solution .
Le système est indéterminé .
L'ensemble des solutions est l'ensemble des points de la droite .

Si les 2 droites sont parallèles non confondues , il n' existe pas de solution .
Le système est impossible .

Exemple 3 :

résolution graphique du système $\begin{cases} 2.x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

1. représenter la droite $d_1 \equiv 2.x + y = 4$

$$d_1 \equiv y = -2.x + 4$$

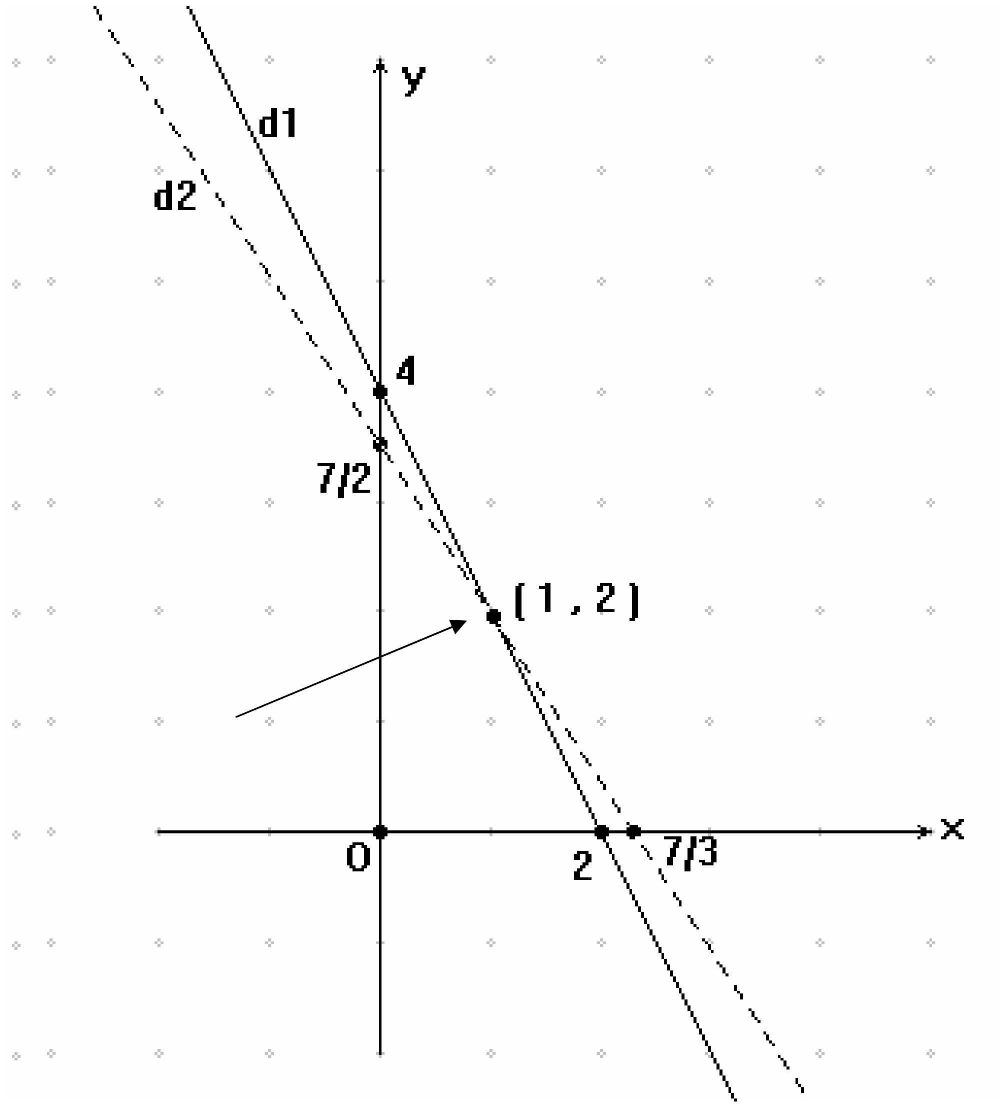
x	y
0	4
2	0

2. représenter la droite $d_2 \equiv 3.x + 2.y = 7$

$$d_2 \equiv y = -\frac{3}{2}.x + \frac{7}{2}$$

x	y
0	$\frac{7}{2}$
$\frac{7}{3}$	0

3. le couple – solution se lit sur le graphe :
   c'est la coordonnée du point d'intersection de la droite d_1 et de la droite d_2 .



4.2. Systèmes d'inéquations du premier degré à 2 variables

résolution graphique
d'un système de 2 inéquations du premier degré en les variables x et y

La représentation graphique
d'une inéquation du premier degré à 2 variables
est un demi-plan .
La représentation graphique
de la solution d'un système de deux inéquations du premier degré à 2 variables
est l'intersection de deux demi-plans .

Exemple :

résolution graphique du système $\begin{cases} 2.x + y > 4 \\ 3x + 2y \leq 7 \end{cases}$

1. représenter la droite $d_1 \equiv 2.x + y = 4$
   $d_1 \equiv y = -2.x + 4$

x	y
0	4
2	0

Trouver le demi-plan déterminé par l'inéquation en choisissant un point test .

Choisissons le point test $(0,0)$: $2.0 + 0 = 0$ et $0 < 4$
L'inégalité à respecter étant $2.x + y > 4$,
le point test $(0,0)$ n'est pas dans le demi-plan demandé .

Le demi-plan défini par l'inéquation $2.x + y > 4$ est donc le demi-plan ouvert déterminé par la droite $d_1 \equiv 2.x + y = 4$ qui ne comprend pas le point test .

2. représenter la droite $d_2 \equiv 3.x + 2.y = 7$

$$d_2 \equiv y = -\frac{3}{2}.x + \frac{7}{2}$$

x	y
0	$\frac{7}{2}$
$\frac{7}{3}$	0

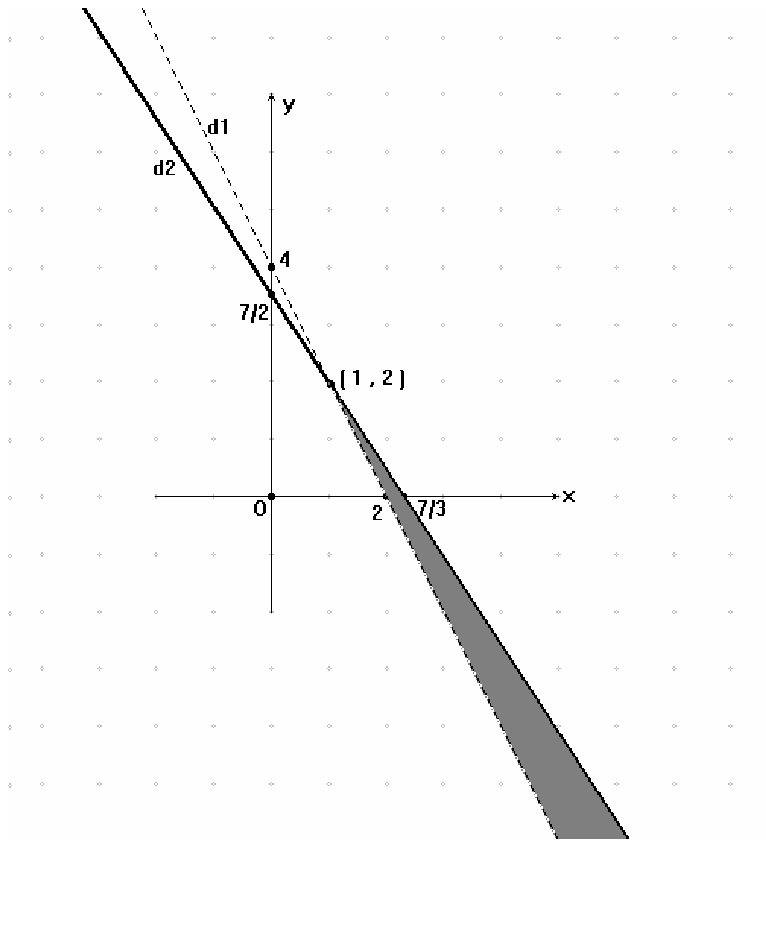
Trouver le demi-plan déterminé par l'inéquation en choisissant un point test .

Choisissons le point test $(0,0)$: $3.0 + 2.0 = 0$ et $0 \leq 4$
L'inégalité à respecter étant $3x + 2y \leq 7$,
le point test $(0,0)$ est dans le demi-plan demandé .

Le demi-plan défini par l'inéquation $3x + 2y \leq 7$ est donc le demi-plan fermé déterminé par la droite $d_1 \equiv 2.x + y = 4$ qui ne comprend pas le point test .

3 . L'ensemble des solutions du système $\begin{cases} 2.x + y > 4 \\ 3x + 2y \leq 7 \end{cases}$

est représenté par l'intersection des deux demi-plans .



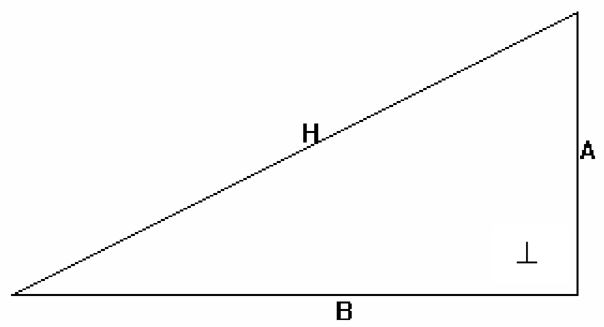
chapitre 5 : théorème de Pythagore

5.1. Théorème de Pythagore

Vocabulaire :
Dans un triangle rectangle , le côté opposé à l'angle droite est appelé **hypoténuse**

Théorème :
Dans tout triangle rectangle le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des deux autres côtés

$$H^2 = A^2 + B^2$$



5.2. applications du théorème de Pythagore :

- Théorème fondamental de la trigonométrie :

  Quel que soit l'angle α : $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

- Distance entre 2 points du plan dans un repère orthonormé

  Si A (x_A, y_A) et B (x_B, y_B) alors $d_{ist.}(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

- équation d'un cercle

  Un cercle est le lieu des points du plan situés à la même distance $r > 0$ d'un centre (x_0, y_0)
  C $\equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Bases Mathématiques
pour l'économie et la gestion

pré-requis

exercices - tests
et réponses

Chapitre 1 : exercices

- **Calculer les expressions suivantes pour** $x = \frac{-2}{3}$

  Donner la réponse sous la forme d'une fraction simplifiée .

1. $2.x^2 + 4 =$
2. $(2.x)^2 + 4 =$
3. $\frac{(2.x+4)^2}{3} =$
4. $2.\left(\frac{x+4}{3}\right)^2 =$

- **Calculer les expressions suivantes pour** $a = \frac{-3}{2}$ **,** $b = \frac{-2}{3}$ **,** $c = \frac{10}{9}$ **.**

  Donner la réponse sous la forme d'une fraction simplifiée .

5. $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} =$

- **Ecrire une expression équivalente ne faisant plus intervenir le symbole** $|...|$ **.**

6. $|3 - x|$ si $x < 3$
7. $|a - b|$ si $a < b$
8. $|-5 - c^2|$

- **Calculer**

9. $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{9^{49}}}\right)^{\frac{1}{7}}$
10. $\frac{125^{\frac{2}{3}}.25^{\frac{3}{2}}}{5^2}$
11. $\frac{5^3}{4} + \frac{10}{5}$

- **Que vaut x ?**

12. $\frac{1}{2^3} = 2^x$
13. $\frac{1}{\sqrt[5]{3^4}} = 3^x$
14. $\sqrt[3]{2^2}.2^5 = 2^x$

- **Simplifier**

15. $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{a^2}}.\frac{1}{a^{\frac{-5}{2}}}$ avec $a > 0$
16. $\frac{125^{\frac{2}{3}}.\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}{75}$

- **Simplifier**

17. $\sqrt{x^2}$ si $x < 0$
18. $\sqrt{a^2.b^2}$ $\forall a, b \in R$
19. $\sqrt{a^2 - 2.a.b + b^2}$
20. $\sqrt{a^2 + b^2}$

- **Simplifier**

21. $\left(a^{-1} + b^{-1}\right)^{-1}$
22. $\left(a^3\right)^2$
23. $a^{\left(3^2\right)}$

- **Simplifier**

24. $\sqrt[3]{a}.\sqrt{a}$
25. $\sqrt{\sqrt[3]{6}}$
26. $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

- **Sur base des identités remarquables , développer les produits suivants**

27. $\left(-a^2-\sqrt{7}.b\right).\left(a^2-\sqrt{7}.b\right)$
28. $\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right).\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}.y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)$
29. $(t-3.s)^3$

- **Sur base des identités remarquables , factoriser les polynômes suivants**

30. $-4.x^4.y^2+81.z^6$
31. a^6-b^6
32. $24.x-16-9.x^2$

- **Simplifier jusqu'à obtenir une fraction irréductible**

33. $\dfrac{5.x^2+12.x+4}{x^2-16}.\dfrac{x^2-4.x}{25.x^2+20.x+4}$

34. $\dfrac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

35. $\dfrac{\left(x^2-1\right)^4.(2.x)-x^2.(4).\left(x^2-1\right)^3.(2.x)}{\left(x^2-1\right)^8}$

36. $\dfrac{\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{3}}.(3).(3.x).\left(\frac{1}{3}\right).\left(x^2+4\right)^{-\frac{2}{3}}.(2.x)}{\left(\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2}$

- **Transformer jusqu'à écrire le dénominateur sans racine**

37. $\dfrac{\sqrt{5}+6}{6-\sqrt{5}}$

- **Calculer les sommes suivantes**

38. $\sum_{i=2}^{5} i$

39. $\sum_{n=0}^{3} 2^n$

40. $\sum_{j=1}^{6} 4.(j-1)$

- **Utiliser le symbole de sommation $\sum$ pour réécrire les sommes suivantes :**

41. $1+3+5+7+9$

42. $12+16+20+24+28+32$

43. $\frac{1}{4}+\frac{2}{9}+\frac{3}{14}+\frac{4}{19}+\frac{5}{24}+\frac{6}{29}$

- **Simplifier**

44. $\sum_{i=2}^{5} r$

45. $\sum_{i=1}^{p} a$

- **Calculer**

46. $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$

47. $\frac{\ln 4}{3}$

48. $\ln\left(4^3\right)$

49. $(\ln 3)^4$

50. $\frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$

- **Dériver les fonctions données** $f \ : \ x \ \rightarrow \ f(x)$

51. $f(x) = 4.x^3 - 5.x^2 + 6.x - 81$

52. $f(x) = \dfrac{4.x^3}{3} - \dfrac{5.x^2}{2} + \dfrac{81}{4}$

53. $f(x) = \left(x^4 - 16\right).\left(2 - x\right)$

54. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2.x}{1 - 2.x}$

55. $f(x) = \left(6.x^2 - 81\right)^5$

56. $f(x) = \sin(2.x - \pi)$

57. $f(x) = \sin^3(x)$

58. $f(x) = \sin^2(3.x)$

59. $f(x) = \sin^2(\pi)$

60. $f(x) = \cos(1 - 2.x)$

61. $f(x) = \cos^3(x)$

62. $f(x) = \cos^2(3.x)$
63. $f(x) = \log_4(5.x - 2)$
64. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$
65. $f(x) = \ln^3(x)$
66. $f(x) = \ln^3(1 - 2.x)$
67. $f(x) = 4^{(2.x-1)}$
68. $f(x) = e^{(x^2-4)}$
69. $f(x) = e^{(x^3)}$
70. $f(x) = \left(e^x\right)^3$

Chapitre 1 : réponses aux exercices

- **Calculer les expressions suivantes pour** $x = \frac{-2}{3}$

  Donner la réponse sous la forme d'une fraction simplifiée .

1. $\frac{44}{9}$
2. $\frac{52}{9}$
3. $\frac{64}{27}$
4. $\frac{200}{81}$

- **Calculer les expressions suivantes pour** $a = \frac{-3}{2}$, $b = \frac{-2}{3}$, $c = \frac{10}{9}$.

  Donner la réponse sous la forme d'une fraction simplifiée .

5. $\frac{-10}{9}$

- **Ecrire une expression équivalente ne faisant plus intervenir le symbole** $|...|$ **.**

6. $3 - x$
7. $b - a$
8. $5 + c^2$

- **Calculer**

9. $\frac{1}{9}$
10. 125
11. $\frac{133}{4}$

- **Que vaut** x **?**

12. $x = -3$
13. $x = \frac{-4}{5}$
14. $x = \frac{17}{3}$

- **Simplifier**

15. $\sqrt[3]{a^7} = a^{\frac{7}{3}}$
16. $\frac{25}{3}$

- **Simplifier**

17. $-x$
18. $|a.b|$
19. $|a-b|$
20. non simplifiable

- **Simplifier**

21. $\frac{a.b}{a+b}$
22. a^6
23. a^9

- **Simplifier**

24. $a^{\frac{5}{6}}$
25. $\sqrt[6]{6}$
26. 2

- **Sur base des identités remarquables , développer les produits suivants**

27. $7.b^2 - a^4$
28. $x - y$
29. $t^3 - 9.t^2.s + 27.t.s^2 - 27.s^3$

- **Sur base des identités remarquables , factoriser les polynômes suivants**

30. $(9.z^3 - 2.x^2.y).(9.z^3 + 2.x^2.y)$
31. $(a-b).(a^2 + a.b + b^2).(a+b).(a^2 - a.b + b^2)$
32. $-(3.x-4)^2$

- **Simplifier jusqu'à obtenir une fraction irréductible**

33. $\dfrac{x.(x+2)}{(x+4).(5.x+2)}$
34. $b+a$
35. $\dfrac{-2.x.(3.x^2+1)}{(x^2-1)^5}$
36. $6.x^2.(x^2+4)^{\frac{1}{3}}$

- **Transformer jusqu'à écrire le dénominateur sans racine**

37. $\dfrac{41+12.\sqrt{5}}{31}$

- **Calculer les sommes suivantes**

38. 14
39. 15
40. 60

- **Utiliser le symbole de sommation $\sum$ pour réécrire les sommes suivantes :**

41. $\sum_{i=0}^{4}(2.i+1)$ ou $\sum_{i=1}^{5}(2.i-1)$
42. $\sum_{i=3}^{8}4.i$
43. $\sum_{i=1}^{6}\left(\dfrac{i}{5.i-1}\right)$

- **Simplifier**

44. $4.r$
45. $a.p$

- **Calculer**

46. $\approx 0{,}28768...$
47. $\approx 0{,}46209...$
48. $\approx 4{,}15888...$
49. $\approx 1{,}45672...$
50. $\approx -0{,}79248...$

- **Dériver**

51. $f'(x) = 12.x^2 - 10.x + 6$
52. $f'(x) = 4.x^2 - 5.x$
53. $f'(x) = -5.x^4 + 8.x^3 + 16$
54. $f'(x) = \dfrac{-2.x^2 + 2.x - 2}{(1-2.x)^2}$
55. $f'(x) = 60.x.(6.x^2 - 81)^4$
56. $f'(x) = 2.\cos(2.x - \pi)$
57. $f'(x) = 3.\sin^2(x).\cos(x)$
58. $f'(x) = 6.\sin(3.x).\cos(3.x)$
59. $f'(x) = 0$
60. $f'(x) = 2.\sin(1-2.x)$
61. $f'(x) = -3.\cos^2(x).\sin(x)$
62. $f'(x) = -6.\cos(3.x).\sin(3.x)$
63. $f'(x) = \dfrac{5}{5.x-2}.\dfrac{1}{\ln(4)}$
64. $f'(x) = \dfrac{2.x}{x^2-1}$
65. $f'(x) = -6.\ln^2(1-2.x).\dfrac{1}{(1-2.x)}$
66. $f'(x) = \dfrac{3}{x}.\ln^2(x)$
67. $f'(x) = 2.4^{(2.x-1)}.\ln(4)$
68. $f'(x) = 2.x.e^{(x^2-4)}$
69. $f'(x) = 3.x^2.e^{(x^3)}$
70. $f'(x) = 3.e^{3.x}$

Chapitre 2 : exercices

- **Résoudre dans R les équations suivantes**

1. $\frac{3.x}{x-2} = 1 + \frac{6}{x-2}$

2. $6.(2.y+3) - 3.(y-5) = 0$

3. $\frac{5.x+2}{10.x-3} = \frac{x-8}{2.x+3}$

4. $\frac{3}{2.x+5} + \frac{4}{2.x-5} = \frac{14.x+3}{4.x^2-25}$

5. $4.x^2 + x = 14$

6. $25.x^2 = 9$

7. $x^2 = 3 + 6.x$

8. $7.x^2 = -2.x$

9. $\frac{x+1}{3.x+2} = \frac{x-2}{2.x-3}$

10. $x^{\frac{4}{3}} = 2.x$

11. $\sqrt{7-x} = x - 5$

12. $x^4 - 25.x^2 - 150 = 0$

13. $4^{(x-2)} = 5$

14. $\ln(x-1) + \ln(x+1) = 1$

15. $2.\log(2.x-5) = 1$

- **Représenter dans R^2 les solutions des équations suivantes**

16. $2.x+y+4=0$

17. $2.x-10=0$

18. $y+3=0$

19. $2.x-y=0$

Représenter dans R^2 les solutions des équations suivantes

20. $y=x^2-4.x-5$

21. $x^2+y=0$

22. $x-y^2+2=0$

23. $y^2+x+1=0$

24. $x^2+y^2=9$

25. $(x-1)^2+(y+3)^2=4$

- **Représenter dans R^3 les solutions des équations suivantes**

26. $6.x+3.y+2.z-6=0$

27. $2x+3.y-6=0$

28. $3x+z-3=0$

29. $y+z-2=0$

30. $y-4=0$

Chapitre 2 : réponses aux exercices

- **Résoudre dans R**

1. $Sol = \phi$ **attention** : ne pas oublier la condition d'existence $x - 2 \neq 0$
2. $Sol = \left\{ \frac{-11}{3} \right\}$
3. $Sol = \left\{ \frac{3}{17} \right\}$
4. $Sol = \phi$
5. $Sol = \left\{ \frac{7}{4}, -2 \right\}$
6. $Sol = \left\{ \frac{3}{5}, \frac{-3}{5} \right\}$
7. $Sol = \left\{ 3 + \sqrt{6}, 3 - \sqrt{6} \right\}$
8. $Sol = \left\{ 0, \frac{-2}{7} \right\}$
9. $Sol = \left\{ \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \right\}$
10. $Sol = \{8, 0\}$

11. $Sol = \{6\}$ **attention** : ne pas oublier les conditions d'existence $7 - x \geq 0$ et $x - 5 \geq 0$

12. $Sol = \left\{ \sqrt{30}, -\sqrt{30} \right\}$

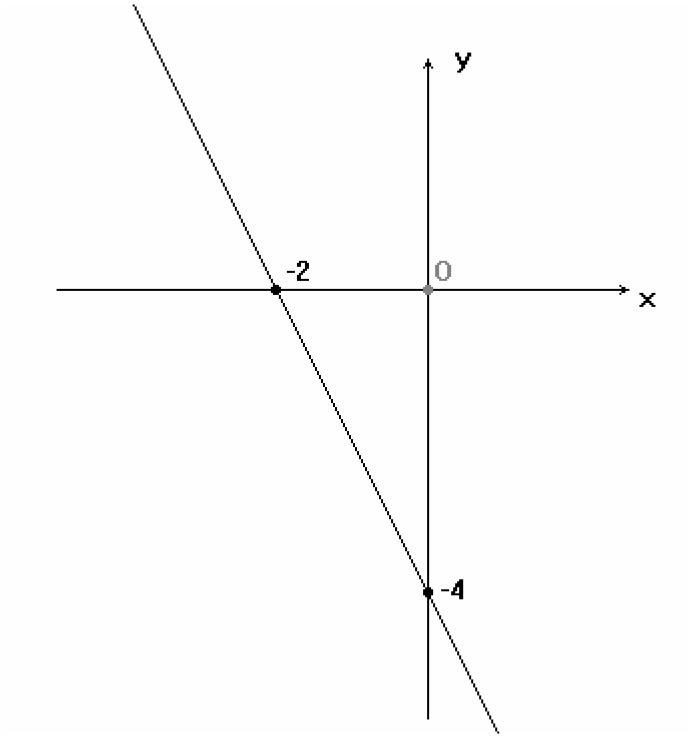
13. $Sol = \left\{ \frac{\ln 5}{\ln 4} + 2 \right\}$

14. $Sol = \left\{ \sqrt{e + 1} \right\}$ **attention** : ne pas oublier les conditions d'existence $x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$

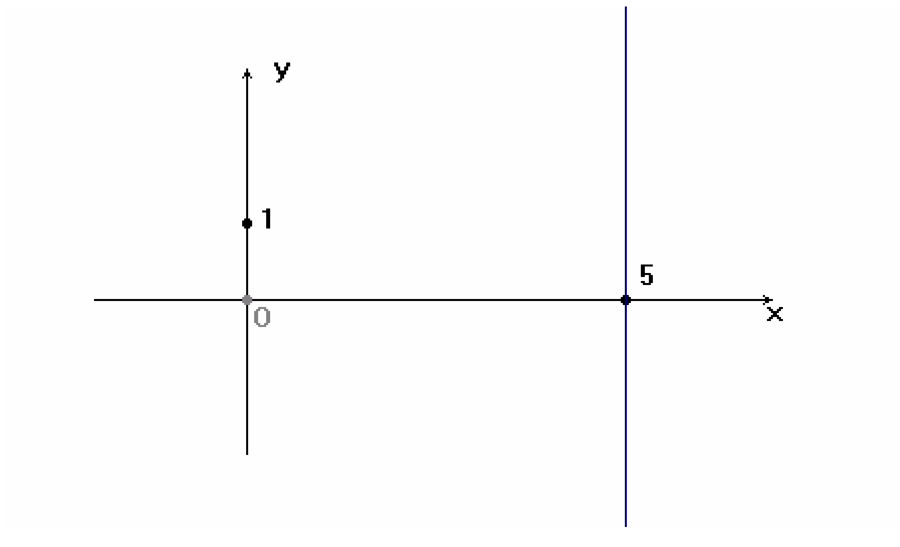
15. $Sol = \left\{ \frac{5 + \sqrt{10}}{2} \right\}$ **attention** : ne pas oublier la condition d'existence $2.x - 5 > 0$

- **Représenter dans R^2 les solutions**

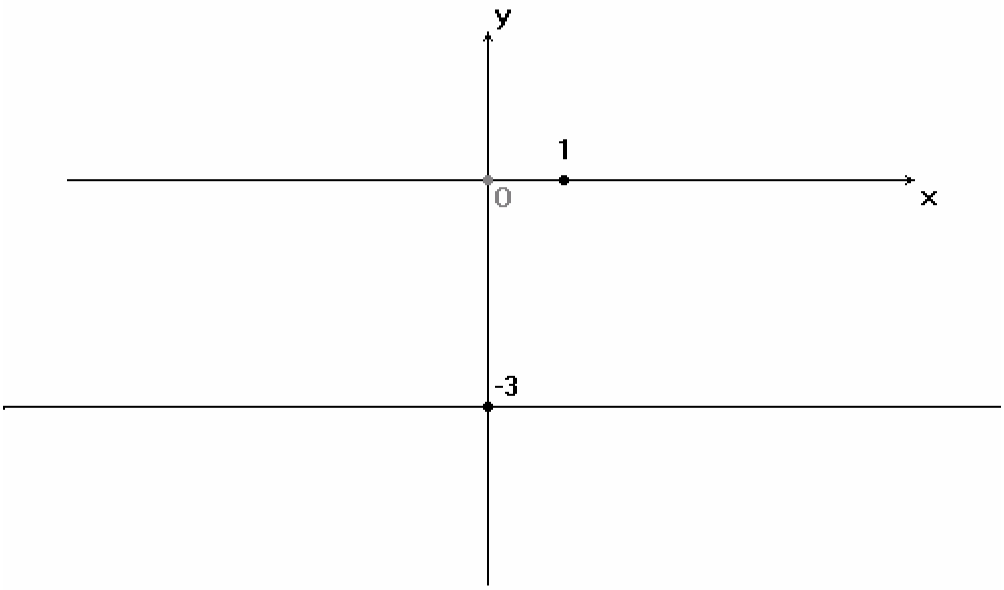
16. La représentation graphique des solutions est une droite du plan



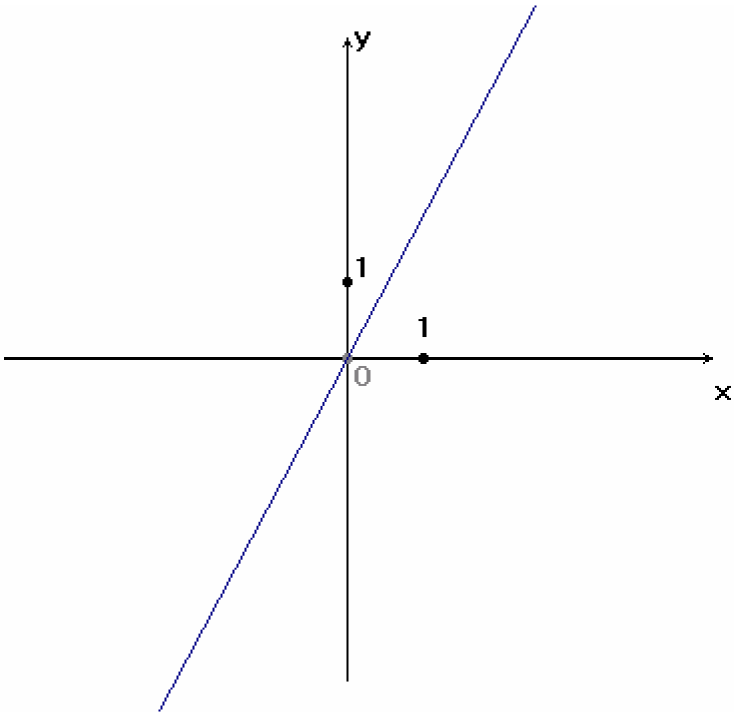
17. La représentation graphique des solutions est une droite du plan parallèle à l'axe y



18. La représentation graphique des solutions est une droite du plan parallèle à l'axe x

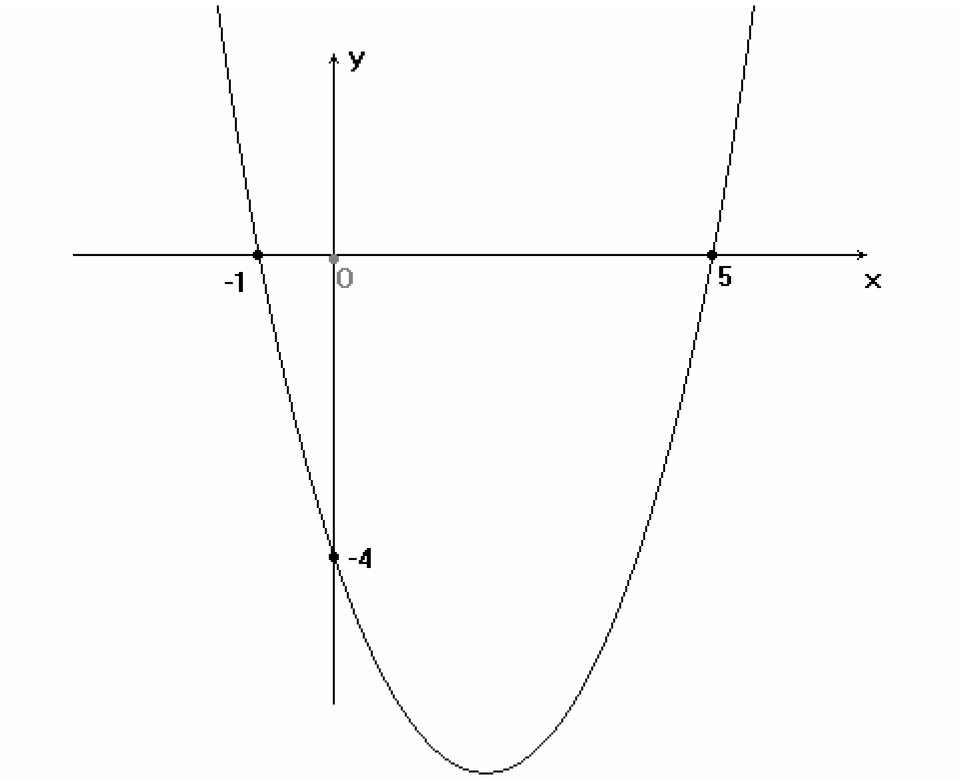


19. La représentation graphique des solutions est une droite du plan comprenant l'origine

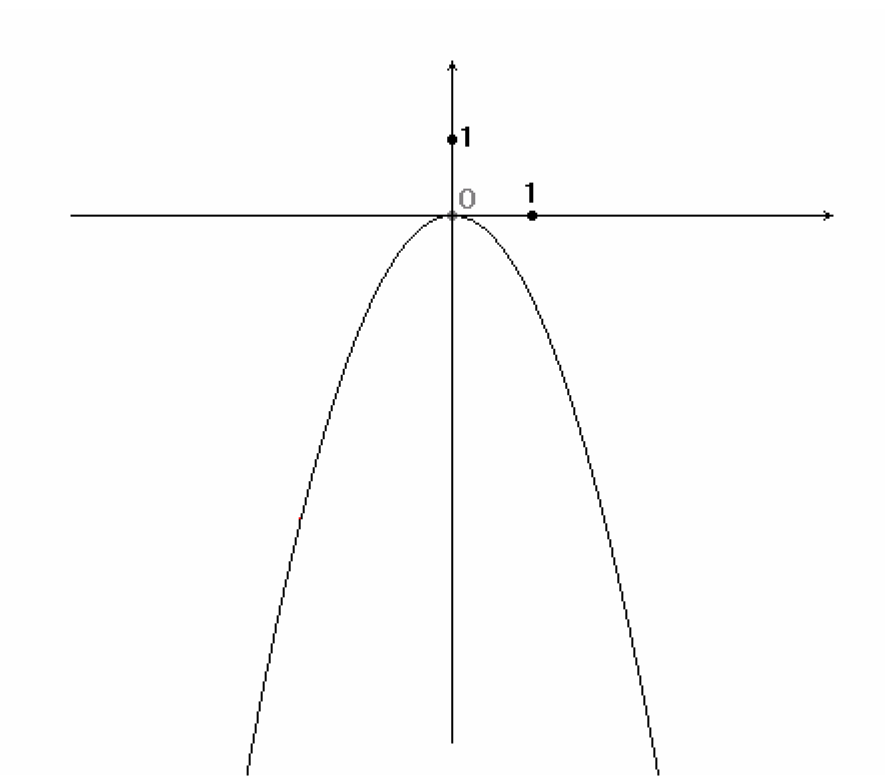


- **Représenter dans R^2 les solutions**

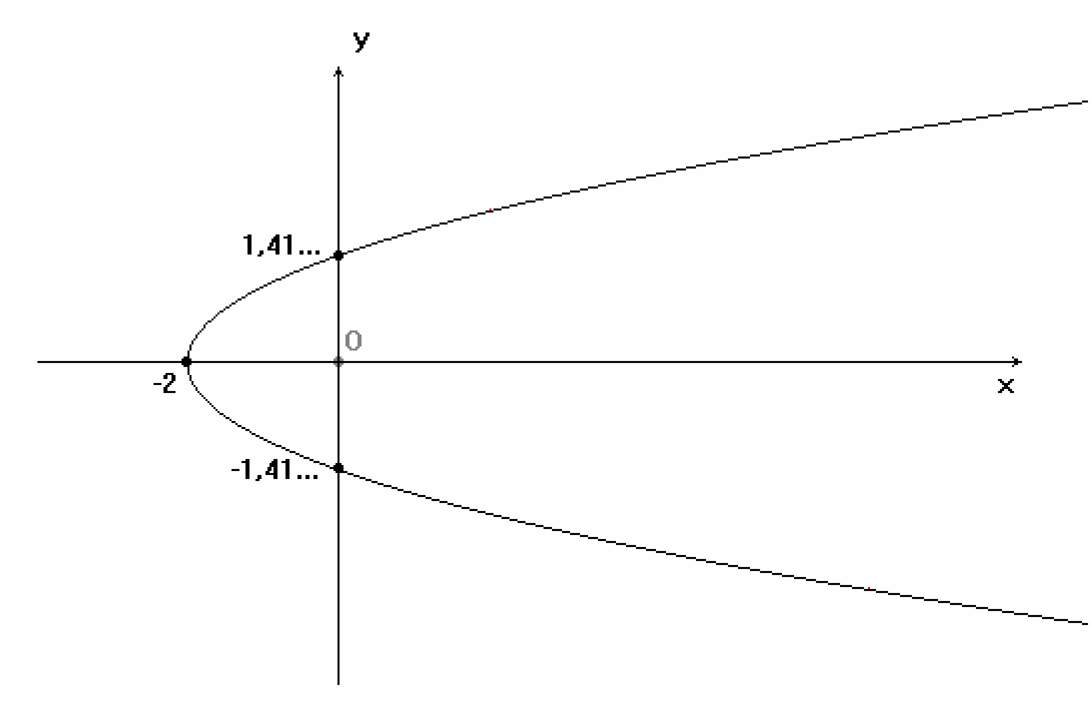
20. La représentation graphique des solutions est une parabole (concavité vers le haut)



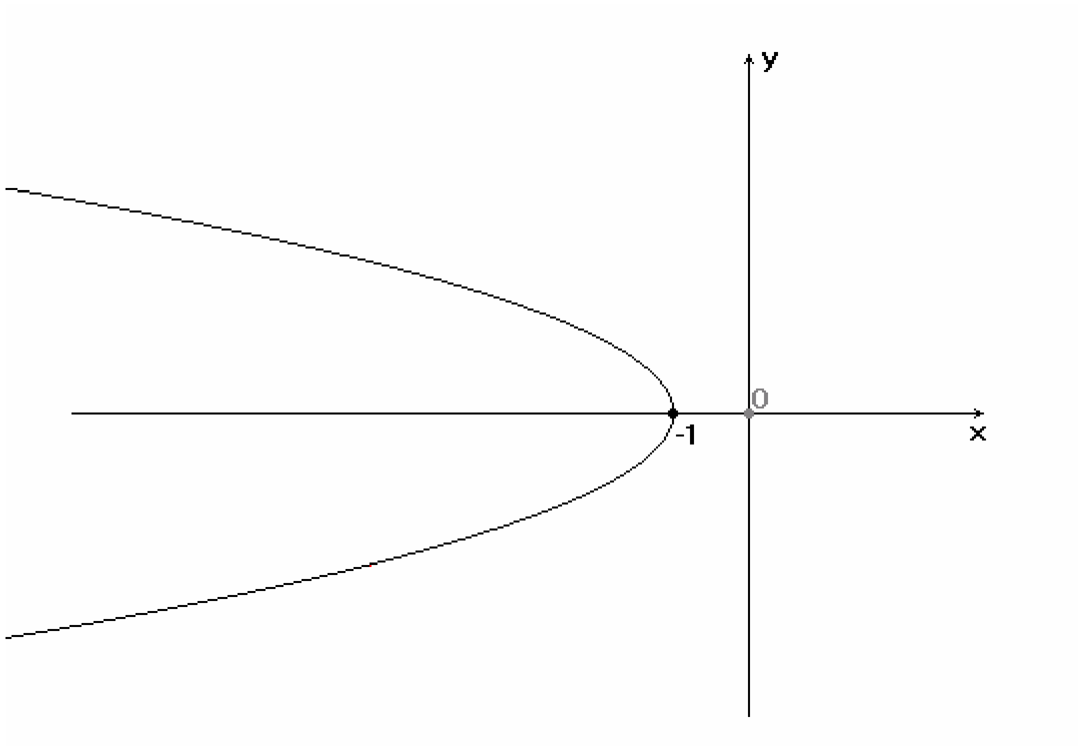
21. La représentation graphique des solutions est une parabole (concavité vers le bas)



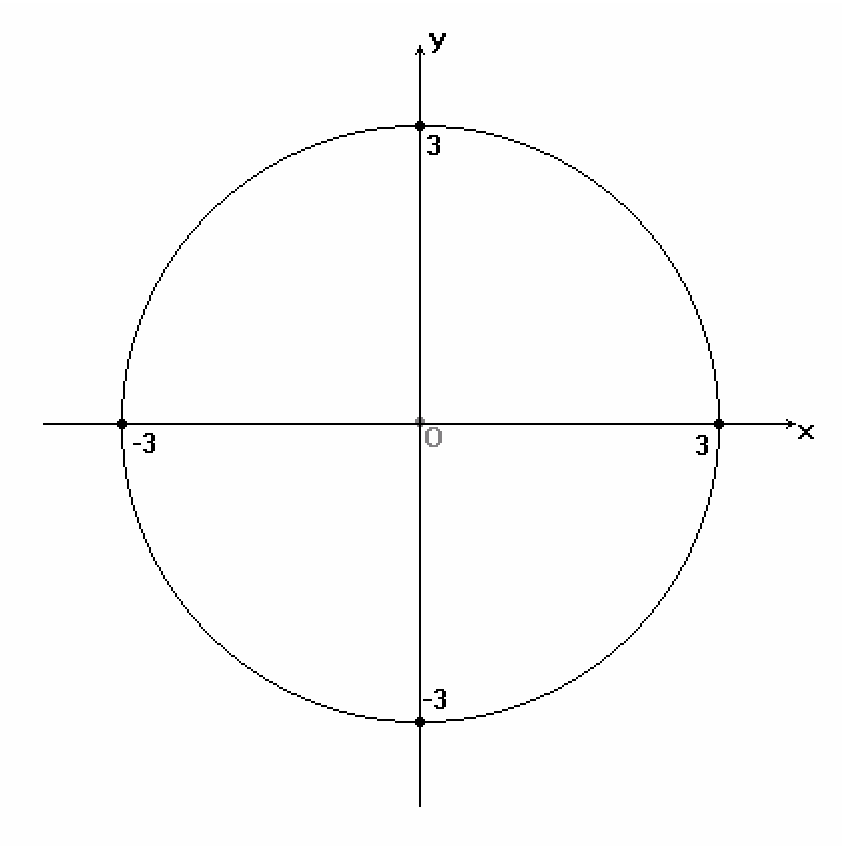
22. La représentation graphique des solutions est une parabole (concavité vers la droite)



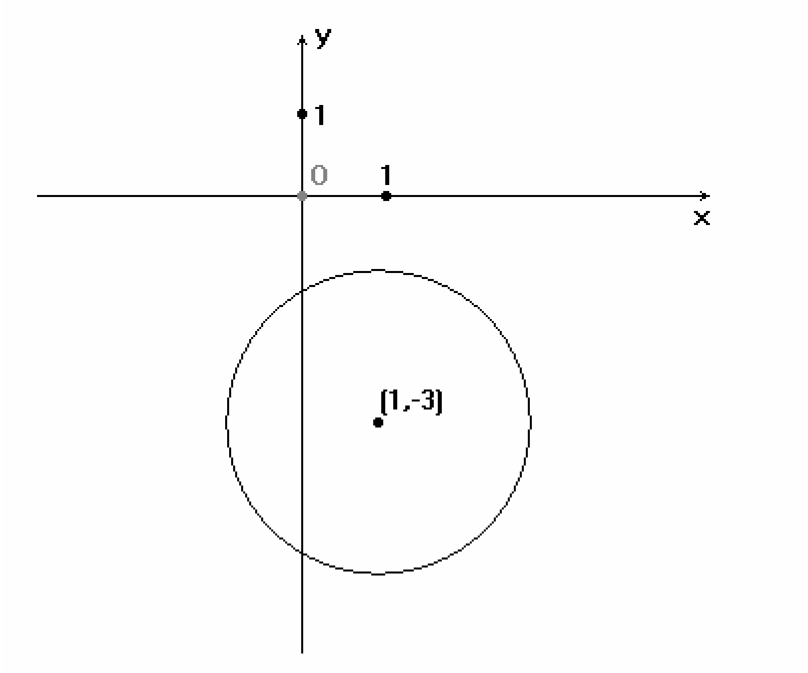
23. La représentation graphique des solutions est une parabole (concavité vers la gauche)



24. La représentation graphique des solutions est un cercle ce centre O et de rayon 3

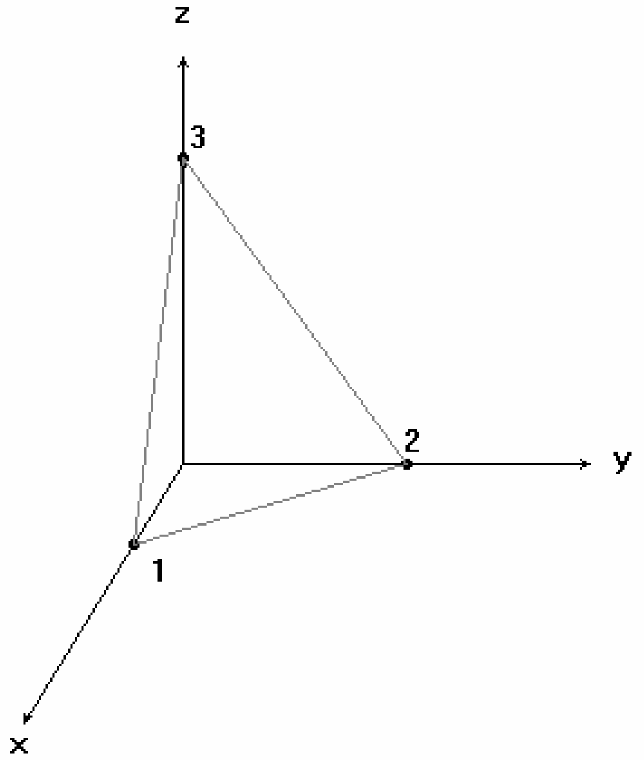


25. La représentation graphique des solutions est un cercle de centre $(1,-3))$ et de rayon 2

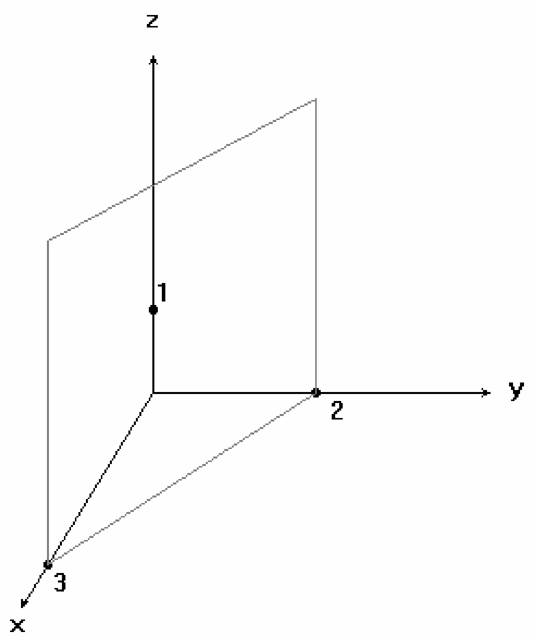


- **Représenter dans R^3 les solutions des équations suivantes**

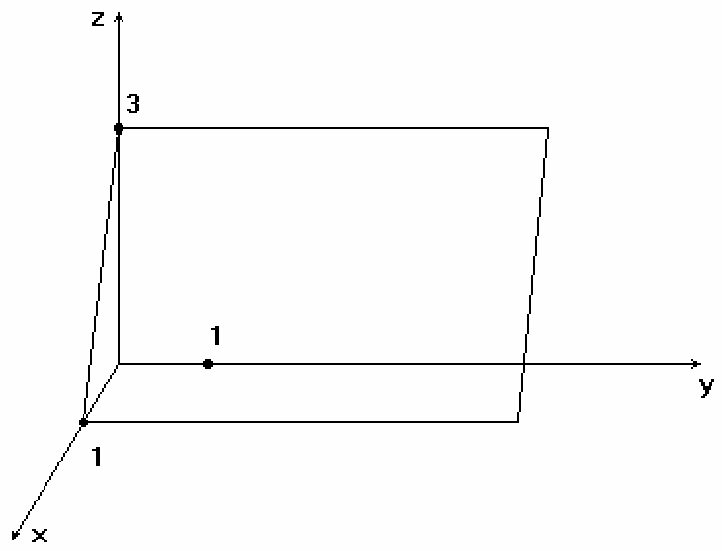
26. La représentation graphique des solutions est un plan de l'espace



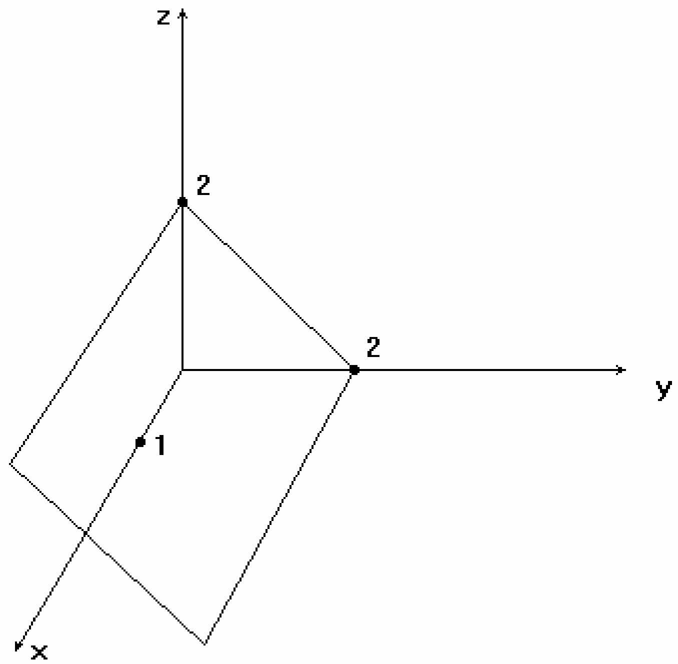
27. La représentation graphique des solutions est un plan parallèle à l'axe des z



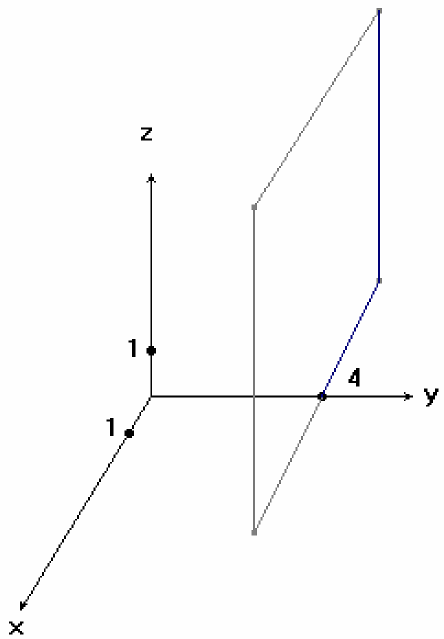
28. La représentation graphique des solutions est un plan parallèle à l'axe des y



29. La représentation graphique des solutions est un plan parallèle à l'axe des x



30. La représentation graphique des solutions est un plan parallèle au plan des xz



Chapitre 3 : exercices

- **Résoudre dans R les inéquations suivantes**

1. $-5.x-2<x+4$
2. $-5\leq\frac{4-3.x}{2}<1$
3. $(7-9.x).(4.x-2)\geq 0$
4. $\frac{x-2}{x+1}>0$

- **Résoudre dans R les inéquations suivantes**

5. $6.x-8>x^2$
6. $x^2-6.x+9\leq 0$
7. $x^2>1$
8. $-x^2>x$
9. $(4-9.x^2).(3.x-1)>0$
10. $\frac{x-1}{2.x}<\frac{1}{x+2}$

- **Représenter dans R^2 les solutions des inéquations suivantes**

11. $2.x+y+4>0$
12. $-\frac{1}{4}.x+\frac{1}{2}.y-1\leq 0$
13. $2.x-10\geq 0$
14. $y+3<0$
15. $x-\frac{1}{2}.y>0$

Chapitre 3 : réponses aux exercices

- **Résoudre dans R les inéquations**

1. $Sol =]-1,+\infty[$ **ou** $Sol = \{x \in R \mid x > -1\}$

2. $Sol = \left]\frac{2}{3},\frac{14}{3}\right]$ **ou** $Sol = \left\{x \in R \mid \frac{2}{3} < x \leq \frac{14}{3}\right\}$

3. $Sol = \left[\frac{1}{2},\frac{7}{9}\right]$ **ou** $Sol = \left\{x \in R \mid \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{9}\right\}$

4. $Sol =]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$

- **Résoudre dans R les inéquations**

5. $Sol = [2,4]$ **ou** $Sol = \{x \in R \mid 2 \leq x \leq 4\}$

6. $Sol = \{3\}$

7. $Sol =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ **ou** $Sol = \{x \in R \mid -\infty \leq x < -1 .ou. 1 < x \leq +\infty\}$

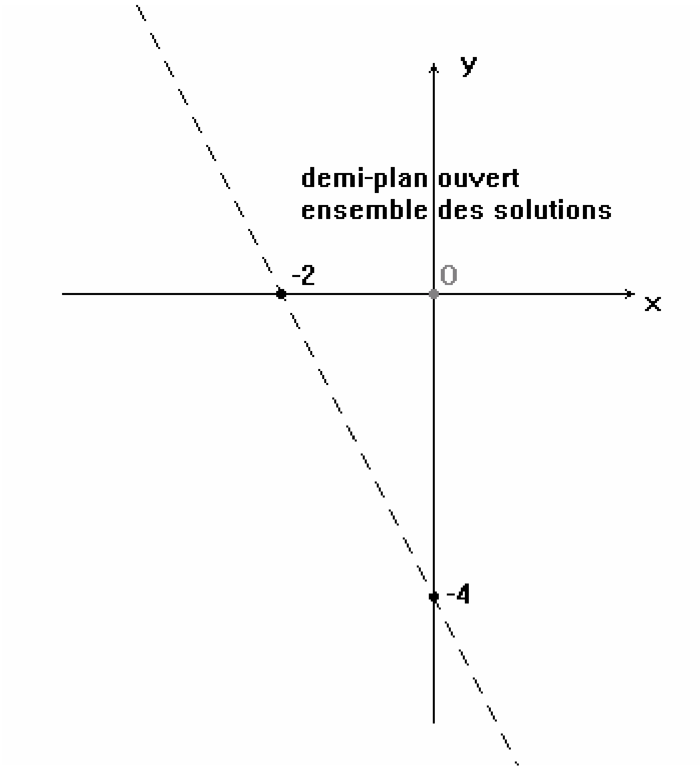
8. $Sol =]0,1[$

9. $Sol = \left]-\infty,\frac{-2}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[$

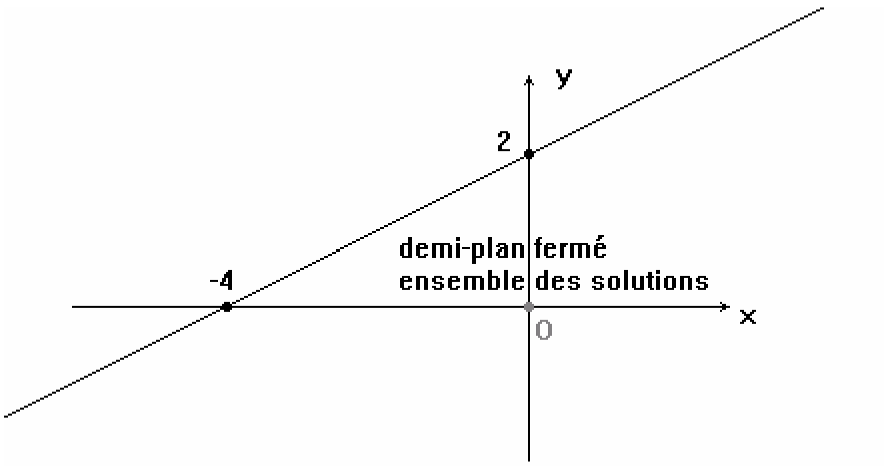
10. $Sol =]-2,-1[\cup]0,2[$

- **Représenter dans R^2 les solutions**

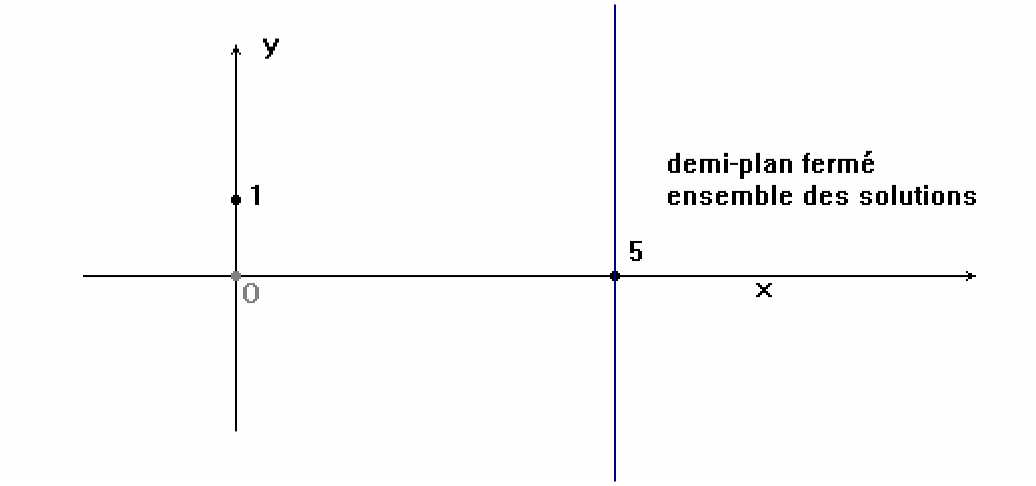
11. $S = \{(x, y) \mid 2x + y + 4 > 0\}$



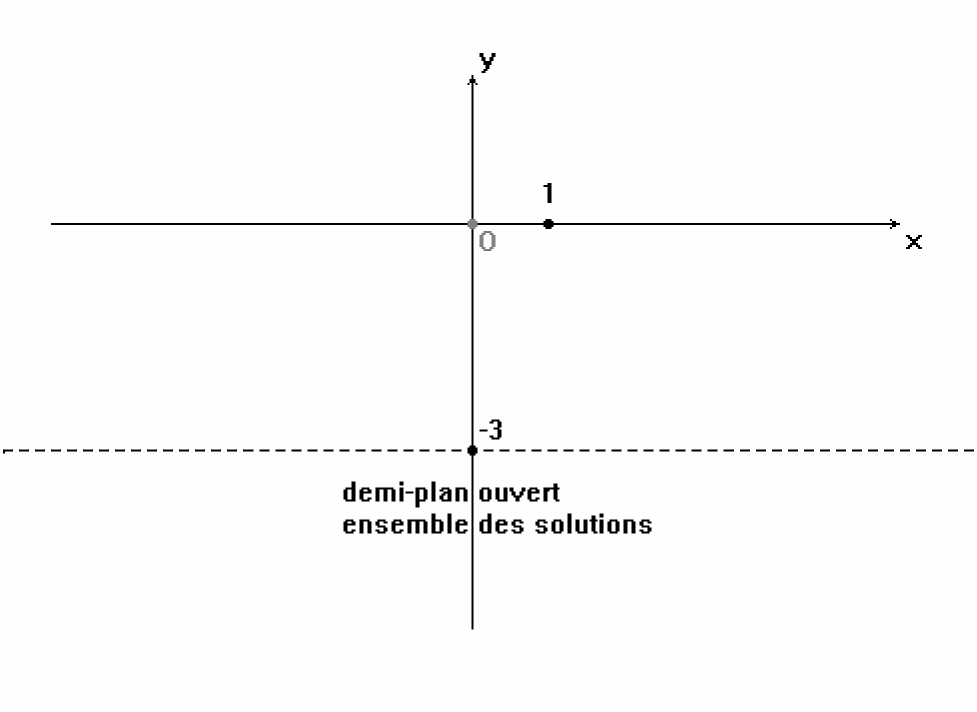
12. $S = \left\{(x, y) \mid -\frac{1}{4}.x + \frac{1}{2}.y - 1 \leq 0\right\}$



13. $S = \{(x, y) \mid 2.x - 10 \geq 0\}$



14. $S = \{(x, y) \mid y + 3 < 0\}$



15. $S = \left\{(x, y) \mid x - \frac{1}{2}.y > 0\right\}$