

**Programmation linéaire avec
le *solveur* de MS Excel (2003)**

Un **programme linéaire** est un problème d'optimisation de la forme

maximiser (ou minimiser) une expression linéaire en les variables x_1, x_2, \dots, x_n
 sous des contraintes de la forme

$$[\text{expression linéaire en } x_1, x_2, \dots, x_n] \quad [\leq \text{ ou } \geq \text{ ou } =] \quad [\text{constante}]$$

Le **solveur** d'Excel peut résoudre ces problèmes par l'**algorithme simplexe** (méthode de calcul basée sur la méthode de Gauss-Jordan pour la résolution de systèmes d'équations linéaires).

Pour accéder à cet outil, sélectionnez "Solveur" dans le menu "Outils" d'Excel. Si l'outil n'est pas disponible, installez-le via l'option "Macros complémentaires" du même menu "Outils"

Exemple 1: le problème du brasseur (J-C Vansnick)

Un brasseur dispose d'ingrédients en quantités limitées :

240 kg de maïs , 5 kg de houblon et 595 kg de malt.

A partir de ces ingrédients, il peut brasser de la bière blonde et de la bière brune.

Pour produire

- un tonneau de bière blonde, il utilise 2.5 kg de maïs, 125 g de houblon et 17.5 kg de malt;
- un tonneau de bière brune, il utilise 7.5 kg de maïs, 125 g de houblon et 10 kg de malt.

Le profit résultant de la vente d'un tonneau de bière blonde est de 39 €.

Le profit résultant de la vente d'un tonneau de bière brune est de 69 €.

Il veut savoir combien il doit brasser de tonneaux de chaque type de bière pour maximiser son profit au départ de ces ingrédients.

Modélisation (programme linéaire)

Variables :	x_1 : quantité de bière blonde à produire
	x_2 : quantité de bière brune à produire
Objectif :	maximiser $39 x_1 + 69 x_2$ ($39 x_1 + 69 x_2$ est la fonction objectif)
Contraintes :	$\begin{cases} 2.5 x_1 + 7.5 x_2 \leq 240 \\ 125 x_1 + 125 x_2 \leq 5000 \\ 17.5 x_1 + 10 x_2 \leq 595 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

Le solveur d'Excel va permettre de déterminer une solution (x_1, x_2) des contraintes qui rend l'expression $39 x_1 + 69 x_2$ maximale.

Préparons la feuille de calcul:

- les **cellules variables** B2:C2 contiendront les solutions après résolution du problème

	A	B	C	D	E
1	Variables	x_1	x_2		
2					

- introduisons les coefficients des variables (contraintes et fonction objectif) :

	A	B	C	D	E
1	Variables	x_1	x_2		
2					
3					
4	Contraintes				
5	maïs	2.5	7.5		240
6	houblon	125	125		5000
7	malt	17.5	10		595
8					
9	Objectif				
10	unitaire :	39	69		
11			Profit		
12					

D5, D6 et D7 vont contenir les formules de calcul des membres de gauche des contraintes, C12 va contenir la formule de calcul de la fonction objectif :

- D5 → SOMMEPROD(B\$2:C\$2 ; B5:C5)
- D6 → SOMMEPROD(B\$2:C\$2 ; B6:C6)
- D7 → SOMMEPROD(B\$2:C\$2 ; B7:C7)
- C12 → SOMMEPROD(B\$2:C\$2 ; B10:C10)

La feuille de calcul du problème →

	A	B	C	D	E
1	Variables	x_1	x_2		
2					
3					
4	Contraintes				
5	maïs	2.5	7.5	0	240
6	houblon	125	125	0	5000
7	malt	17.5	10	0	595
8					
9	Objectif				
10	unitaire :	39	69		
11			Profit		
12			0		

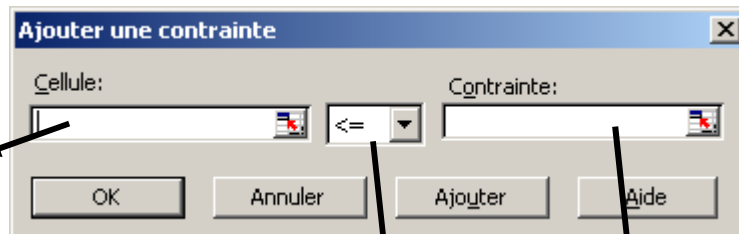
Utilisons le solveur:

Maximiser $39 x_1 + 69 x_2$

A définir... →

Ajoutons les contraintes :

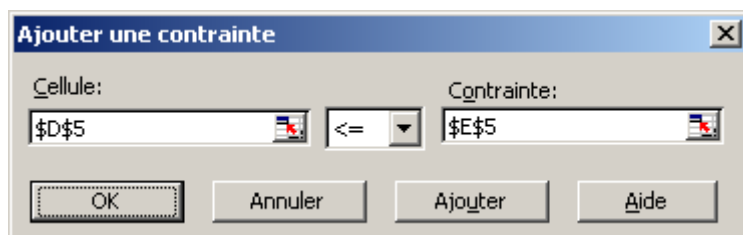
cellule contenant la **formule** qui définit le premier membre de la contrainte



comparaison : = , ≤ ou ≥

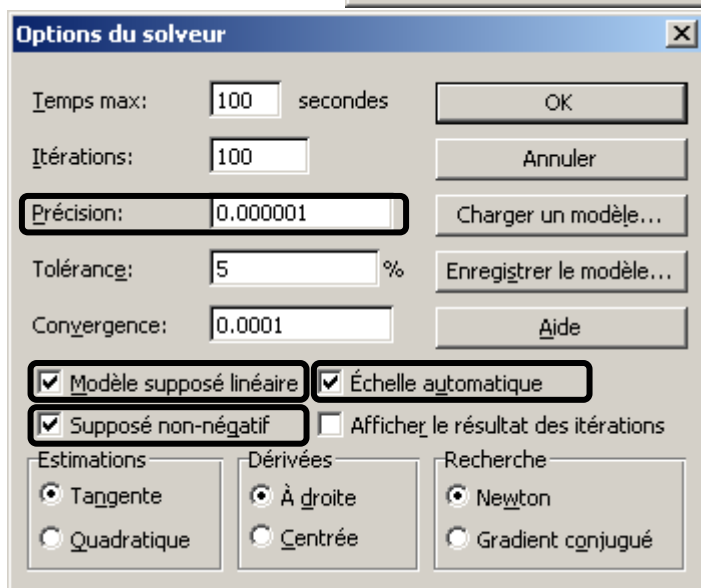
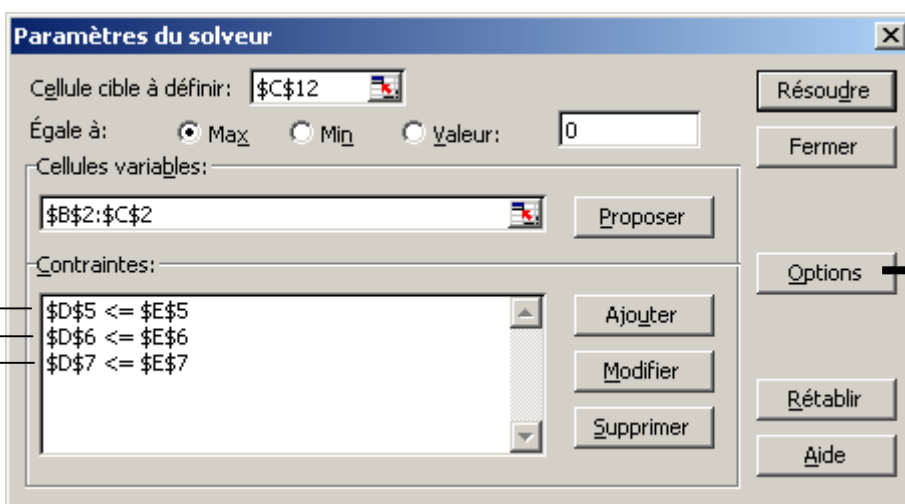
cellule contenant le second membre de la contrainte

Ainsi, la contrainte $2.5 x_1 + 7.5 x_2 \leq 240$ sera traduite par $\$D\$5 \leq \$E\5 :



Avec les 3 contraintes :

$2.5 x_1 + 7.5 x_2 \leq 240$
 $125 x_1 + 125 x_2 \leq 5000$
 $17.5 x_1 + 10 x_2 \leq 595$



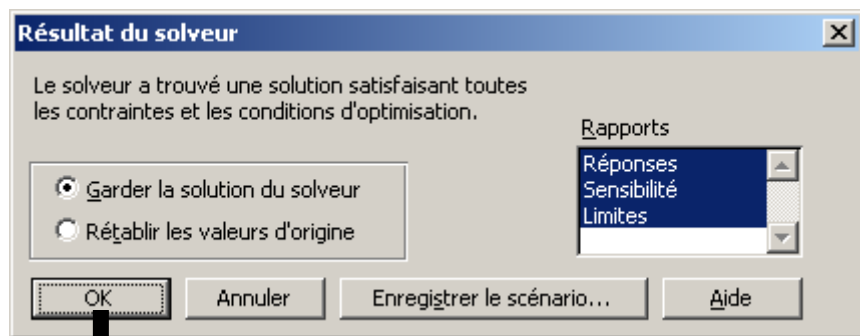
- le **modèle** est **linéaire** (toutes les expressions sont linéaires en les variables) : dans ce cas, le solveur utilise l'algorithme simplexe (rapide); lorsque le modèle n'est pas linéaire, le solveur doit tenter de trouver une solution par approximations successives (itérations).

- les **variables** sont **non-négatives**
- la **précision** : ce nombre dit de combien, au maximum, le membre de gauche de la contrainte peut différer du membre de droite pour qu'on puisse considérer que la contrainte est satisfaite. Il est généralement inutile de prendre une valeur inférieure à 10^{-8} , les calculs étant soumis d'office à une certaine imprécision (± 14 chiffres significatifs).
- la mise à "**Echelle automatique**" : intéressant dans le cas où, dans les contraintes, les coefficients des variables sont des nombres d'ordres de grandeur très différents; l'option "**Echelle automatique**" transformera les coefficients pour atténuer ces disparités.

Pour des problèmes très complexes, les paramètres suivants peuvent avoir un intérêt :

- le paramètre "**Temps max**" limite la durée du processus de résolution; sa valeur par défaut est 100, sa valeur maximale est 32767 (secondes, donc environ 9 heures!);
- le paramètre "**Itérations**" limite le nombre d'itérations; sa valeur par défaut est 100, sa valeur maximale est 32767;

On résout le problème :



	A	B	C	D	E
1	Variables	x_1	x_2		
2		12	28		
3					
4	Contraintes				
5	mais	2.5	7.5	240	240
6	houblon	125	125	5000	5000
7	malt	17.5	10	490	595
8					
9	Objectif				
10	unitaire :	39	69		
11			Profit		
12			2400		

Solution optimale :

$x_1 = 12$ tonneaux de bière blonde
 $x_2 = 28$ tonneaux de bière brune
pour un profit de 2400 €

On consommera :

240 kg de maïs
5 kg de houblon
490 kg de malt

Les deux **rapports** demandés au solveur (*Réponses, Sensibilité*) permettent une analyse assez fine des résultats (le rapport *Limites* est sans intérêt en programmation linéaire).

Rapport des réponses

Cellule cible (Max)

Cellule	Nom	Valeur initiale	Valeur finale
\$C\$12	Profit	0	2400

Cellules variables

Cellule	Nom	Valeur initiale	Valeur finale
\$B\$2	x1	0	12
\$C\$2	x2	0	28

Contraintes

Cellule	Nom	Valeur	Formule	État	Marge
\$D\$5	maïs	240	\$D\$5<=\$E\$5	Lié	0
\$D\$6	houblon	5000	\$D\$6<=\$E\$6	Lié	0
\$D\$7	malt	490	\$D\$7<=\$E\$7	Non lié	105

On a utilisé tout le maïs et tout le houblon (*contraintes saturées, marges nulles*)

On n'a pas utilisé tout le malt (*marge de 105 kg*)

Rapport de la sensibilité

Notons p_1 le profit par tonneau de bière blonde
 p_2 le profit par tonneau de bière brune

Cellules variables

Cellule	Nom	Finale Valeur	Réduit Coût	Objectif Coefficient	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
\$B\$2	x1	12	0	39	30	16
\$C\$2	x2	28	0	69	48	30

Contraintes

Cellule	Nom	Finale Valeur	Ombre Coût	Contrainte à droite	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
\$D\$5	maïs	240	6	240	60	70
\$D\$6	houblon	5000	0.192	5000	617.6470588	1000
\$D\$7	malt	490	0	595	1E+30	105

La solution optimale (12, 28) reste inchangée si $23 \leq p_1 \leq 69$.
 La solution optimale (12, 28) reste inchangée si $39 \leq p_2 \leq 117$.
 (une seule variation à la fois!)

1 kg de maïs supplémentaire permettrait d'augmenter le profit de 6 € (*shadow cost*)
 1 g de houblon supplémentaire permettrait d'augmenter le profit de 0.192 €

On utilise tout le maïs et tout le houblon si $170 \leq [\text{stock maïs en kg}] \leq 300$
 On utilise tout le maïs et tout le houblon si $4000 \leq [\text{stock houblon en g}] \leq 5618$
 On utilise tout le maïs et tout le houblon si $490 \leq [\text{stock malt en kg}] \leq +\infty$

Exemple 2 : les variables sur lesquelles sont bâtis les programmes linéaires doivent parfois être **entières** (nombre de personnes, nombre d'objets sans unité de mesure, ...). Le solveur d'Excel permet de préciser ce type de contrainte. Considérons le programme linéaire :

Variables :	x_1, x_2, x_3
Objectif :	maximiser $6x_1 + 5x_2 + 4.5x_3$
Contraintes :	$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 \leq 2400 \\ 17x_1 + 10x_2 + 5x_3 \leq 5000 \\ x_1 \text{ entier} \geq 0 \\ x_2 \text{ entier} \geq 0 \\ x_3 \text{ entier} \geq 0 \end{cases}$

La feuille de calcul du problème →

- variables : B2:D2

- membres de gauche des contraintes :

E5 → SOMMEPROD(B\$2:D\$2 ; B5:D5)

E6 → SOMMEPROD(B\$2:D\$2 ; B6:D6)

- fonction objectif :

E12 → SOMMEPROD(B\$2:D\$2 ; B9:D9)

	A	B	C	D	E	F
1	Variables	x_1	x_2	x_3		
2						
3						
4	Contraintes					
5		5	7	8	0	2400
6		17	10	5	0	5000
7						
8	Objectif					
9		6	5	4.5		
10					Max	
11					0	

L'introduction du problème dans le solveur est analogue à celle de l'exemple précédent, mis à part le fait qu'il nous faut maintenant ajouter des contraintes qui stipuleront que :

B2 , C2 et D2 doivent contenir un nombre entier

Il suffit de le préciser à l'aide de la boîte de dialogue "Ajouter une contrainte" :

The image shows three screenshots of the Excel Solver interface:

- Ajouter une contrainte (top left):** The 'Cellule' field is set to '\$B\$2' and the 'Contrainte' field is empty. The 'entier' option is selected in the dropdown menu.
- Ajouter une contrainte (top right):** The 'Cellule' field is set to '\$B\$2' and the 'Contrainte' field is set to 'entier'. The 'entier' option is selected in the dropdown menu.
- Paramètres du solveur (bottom):** The 'Cellule cible à définir' is '\$E\$11', 'Égale à' is 'Max', and 'Cellules variables' is '\$B\$2:\$D\$2'. The 'Contraintes' list includes: '\$B\$2 ent entier', '\$C\$2 ent entier', '\$D\$2 ent entier', '\$E\$5 <= \$F\$5', and '\$E\$6 <= \$F\$6'. The 'Options' button is highlighted with an arrow.

- Modèle supposé linéaire
- Échelle automatique
- Supposé non-négatif
- Afficher le résultat des itérations

Remarque : le très important paramètre **tolérance** rappelle le paramètre précision, mais c'est un pourcentage, qui ne concerne que les problèmes où certaines variables sont entières. Sa valeur par défaut est 5% (=0.05).

Tolérance: %

L'explication technique précise de ce paramètre est délicate : nous dirons, en termes fort simples, que le solveur garantit la valeur optimale de l'objectif "à 5% près". Plus ce pourcentage est faible, plus le solveur peut mettre de temps pour arriver à la solution optimale :

- si *Tolérance* = 0%, le solveur garantit que la solution trouvée est optimale
- plus *Tolérance* s'éloigne de 0%, plus le risque est grand que la solution trouvée ne soit pas optimale

Tolérance: %

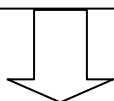


	A	B	C	D	E	F
1	Variables	x_1	x_2	x_3		
2		252	0	142		
3						
4	Contraintes					
5		5	7	8	2396	2400
6		17	10	5	4994	5000
7						
8	Objectif					
9		6	5	4.5		
10					Max	
11					2151	

Solution optimale ?

$x_1 = 252$
 $x_2 = 0$
 $x_3 = 142$
 pour un objectif de 2151 €

On remarquera :
 $2396 < 2400$
 $4994 < 5000$



SOLUTION NON OPTIMALE

Tolérance: %

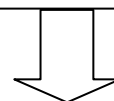


	A	B	C	D	E	F
1	Variables	x_1	x_2	x_3		
2		252	1	141		
3						
4	Contraintes					
5		5	7	8	2395	2400
6		17	10	5	4999	5000
7						
8	Objectif					
9		6	5	4.5		
10					Max	
11					2151.5	

Solution optimale ?

$x_1 = 252$
 $x_2 = 1$
 $x_3 = 141$
 pour un objectif de 2151.5 €

On remarquera :
 $2395 < 2400$
 $4999 < 5000$



SOLUTION OPTIMALE