<u>Exercice</u> : 14 votants, **5** candidats **A**, **B**, **C**, **D** et **E**

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
D	B	A	C	C	C	A	E	E	E	C	C	E	E
A	A	B	E	E	E	B	A	A	B	A	B	D	A
B	D	D	A	B	D	D	D	C	D	B	D	A	B
C	C	C	B	D	A	E	C	B	C	D	E	B	D
E	E	E	D	A	B	C	B	D	A	E	A	C	C

1) Déterminez la relation de préférence collective de Condorcet

2) Déterminez quel(s) candidat(s) serai(en)t en tête des rangements obtenus par les méthodes de Copeland, Schwartz, Fishburn, Raynaud, Perny.

… sera résolu au cours …

Méthodologie d'aide à la décision

Prise de décision multicritère

I.- Notions de base

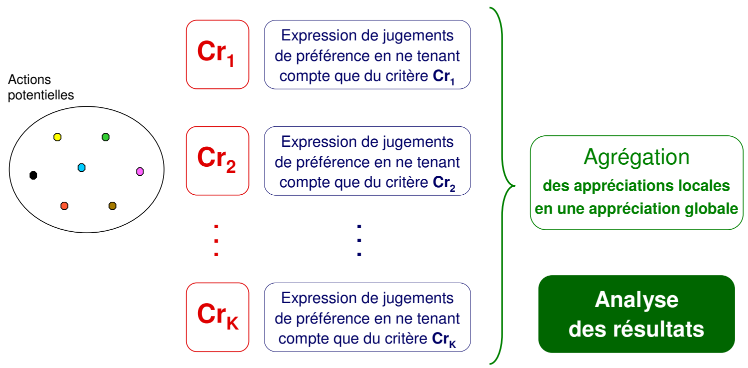
Démarche multicritère

Dans une situation de décision, adopter une **démarche multicritère** c'est

- expliciter les **préoccupations** des décideurs par une famille de **critères**,
- travailler d'abord au niveau de chaque critère
- rassembler les informations recueillies en vue de la prise de décision,

le but étant de favoriser l'émergence d'une <u>conviction</u> commune à tous les décideurs quant à la décision à prendre.

Processus de décision multicritère



Famille de critères

Ce sont les valeurs des décideurs qui, dans le cadre d'une situation de décision, conditionnent la formation de leurs préoccupations, de leurs besoins et de leurs aspirations.

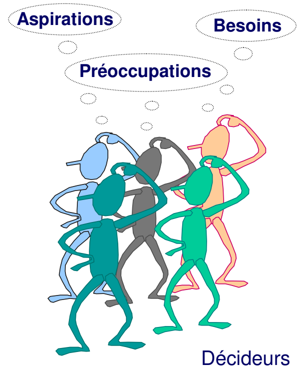
Values are what we care about.

As such, values should be the driving force for our decison making.

They should be the basis for the time and effort we spend thinking about decisions.

[…] Since the values that are of concern in a given decision situation are made explicit by the identification of criteria, this process is crucial.

Ralph L. Keeney
Value-focused Thinking
Harvard University Press, 1992



Famille de critères

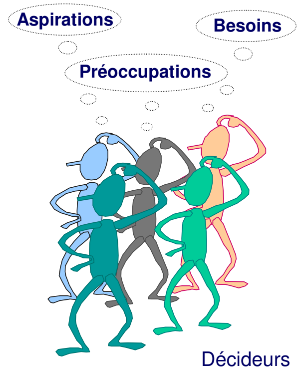
Inventaire des aspects à prendre en considération dans la situation de décision en cours

⇩

Structuration sous la forme d'une arborescence

⇩

Famille de critères



Exemple (cas réel)

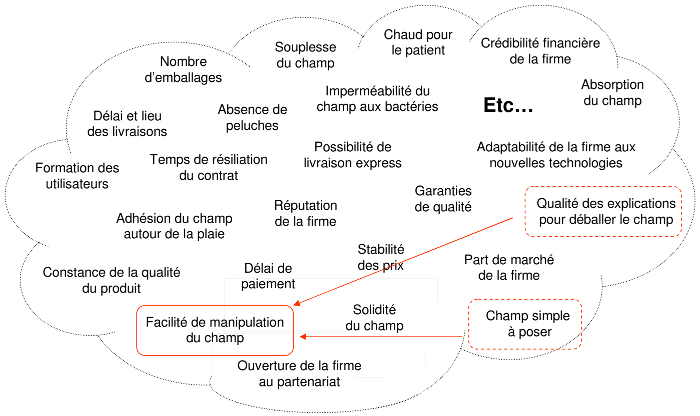
Aspects listés dans une situation de choix d'un fournisseur de champs opératoires

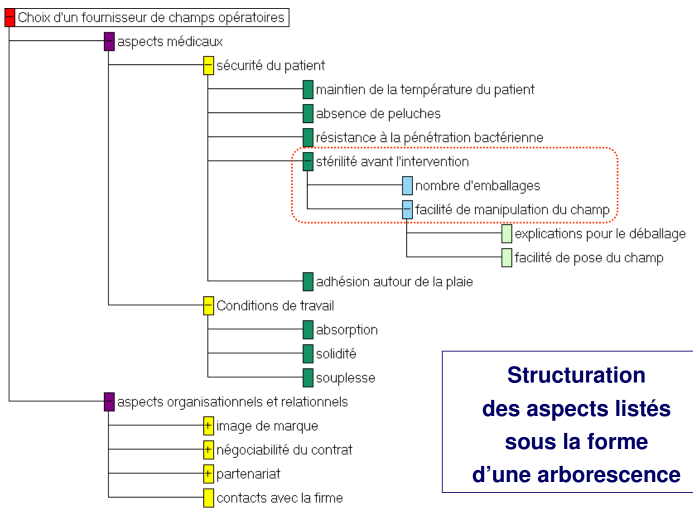
- Nombre d'emballages
- Souplesse du champ
- Chaud pour le patient
- Crédibilité financière de la firme
- Absorption du champ
- Délai et lieu des livraisons
- Absence de peluches
- Imperméabilité du champ aux bactéries
- Etc…
- Formation des utilisateurs
- Temps de résiliation du contrat
- Possibilité de livraison express
- Adaptabilité de la firme aux nouvelles technologies
- Garanties de qualité
- Adhésion du champ autour de la plaie
- Réputation de la firme
- Qualité des explications pour déballer le champ
- Stabilité des prix
- Constance de la qualité du produit
- Délai de paiement
- Part de marché de la firme
- Facilité de manipulation du champ
- Solidité du champ
- Champ simple à poser
- Ouverture de la firme au partenariat

- Choix d'un fournisseur de champs opératoires
  - aspects médicaux
    - sécurité du patient
      - maintien de la température du patient
      - absence de peluches
      - résistance à la pénétration bactérienne
      - stérilité avant l'intervention
        - nombre d'emballages
        - facilité de manipulation du champ
          - explications pour le déballage
          - facilité de pose du champ
      - adhésion autour de la plaie
    - Conditions de travail
      - absorption
      - solidité
      - souplesse
  - aspects organisationnels et relationnels
    - image de marque
    - négociabilité du contrat
    - partenariat
    - contacts avec la firme

Structuration des aspects listés sous la forme d'une arborescence

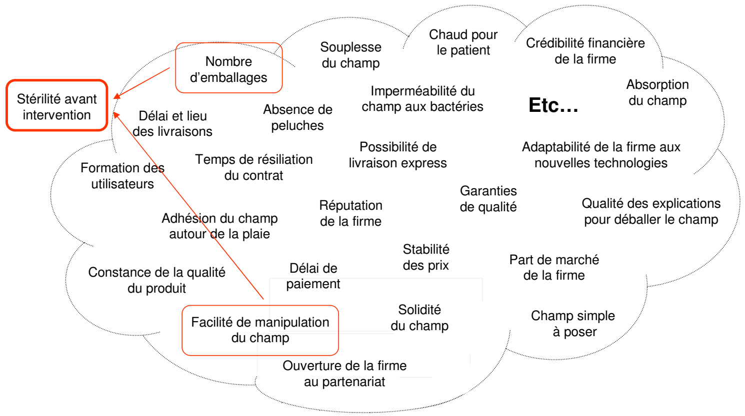
Exemple (cas réel)
Aspects listés dans une situation de choix d'un fournisseur de champs opératoires

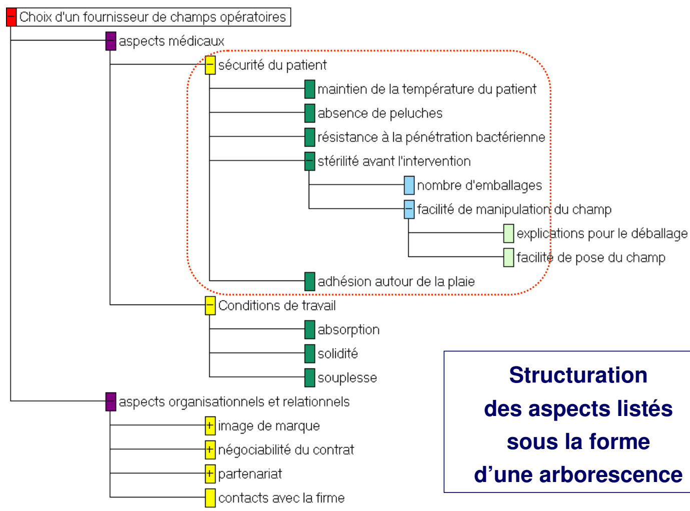




Structuration des aspects listés sous la forme d'une arborescence

Exemple (cas réel)
Aspects listés dans une situation de choix d'un fournisseur de champs opératoires

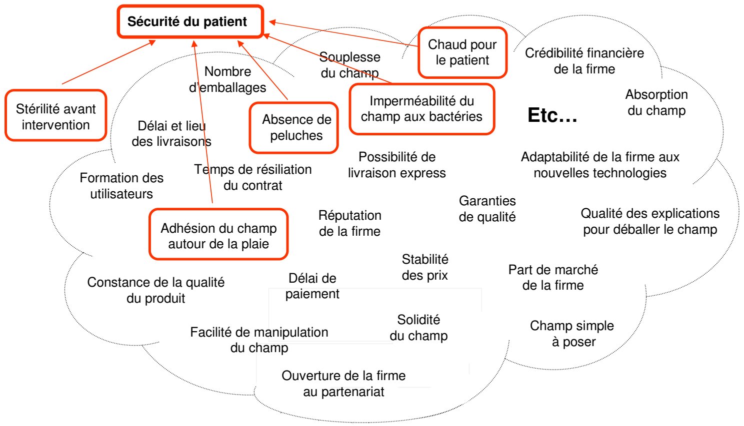




Structuration des aspects listés sous la forme d'une arborescence

Exemple (cas réel)

Aspects listés dans une situation de choix d’un fournisseur de champs opératoires



- Choix d'un fournisseur de champs opératoires
  - aspects médicaux
    - sécurité du patient
      - maintien de la température du patient
      - absence de peluches
      - résistance à la pénétration bactérienne
      - stérilité avant l'intervention
        - nombre d'emballages
        - facilité de manipulation du champ
          - explications pour le déballage
          - facilité de pose du champ
      - adhésion autour de la plaie
    - Conditions de travail
      - absorption
      - solidité
      - souplesse
  - aspects organisationnels et relationnels
    - image de marque
    - négociabilité du contrat
    - partenariat
    - contacts avec la firme

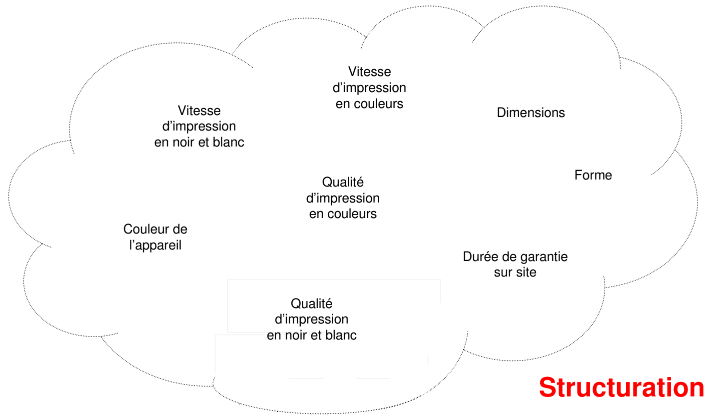
Structuration des aspects listés sous la forme d’une arborescence

- Choix d'un fournisseur de champs opératoires
  - aspects médicaux
    - sécurité du patient
      - maintien de la température du patient
      - absence de peluches
      - résistance à la pénétration bactérienne
      - stérilité avant l'intervention
        - nombre d'emballages
        - facilité de manipulation du champ
          - explications pour le déballage
          - facilité de pose du champ
      - adhésion autour de la plaie
    - Conditions de travail
      - absorption
      - solidité
      - souplesse
  - aspects organisationnels et relationnels
    - image de marque
    - négociabilité du contrat
    - partenariat
    - contacts avec la firme

Famille de critères

Exemple (fictif)

Aspects listés dans une situation de choix d’un modèle d’imprimante à jet d’encre



Structuration ?

Notion de critère

critère : **pôle d'intérêt** pour les décideurs

qui peut servir de base à l'expression de jugements d'appréciation.

⇓

✓ pouvoir associer à chaque critère
au moins 2 modalités
(exemples de performances pouvant être atteintes sur ce critère)
qui ne sont pas équivalentes en termes d'attractivité,

Exemple de modalités pouvant être associées au critère « superficie d'un local »

- 200 m²
- 150 m²
- 175 m²
- …
- 125 m²
- 100 m²

Exemple de modalités pouvant être associées au critère « qualité de prononciation de l'anglais »

- Légers problèmes de prononciation mais qui ne nuisent pas à la communication
- Prononciation parfaite; on dirait un anglophone de naissance
- …
- Problèmes de prononciation si graves que le discours est pratiquement inintelligible
- Des problèmes de prononciation exigent une attention soutenue et peuvent occasionnellement conduire au malentendu
- Bonne prononciation; peu de traces d'accent étranger
- …
- Très difficile à comprendre à cause de problèmes de prononciation : on doit souvent demander de répéter
- Toujours intelligible, malgré l'existence d'un accent défini

Exemple de modalités pouvant être associées au critère « qualité d'impression en couleurs »

- Les photos imprimées semblent sortir d'un labo photo classique
- Bon rendu des couleurs, peut servir à reproduire des photos
- Les bavures sont rares et minuscules, quelques légers défauts
- Rendu des couleurs satisfaisant pour du dessin, par pour une photo
- Qualité des couleurs juste suffisante pour colorer du texte

Notion de critère

critère : **pôle d'intérêt** pour les décideurs

qui peut servir de base à l'expression de jugements d'appréciation.

✓ on peut associer à chaque critère

au moins 2 modalités

(exemples de performances pouvant être atteintes sur ce critère)

qui ne sont pas équivalentes en termes d'attractivité,

✓ chaque critère est isolable des autres en ce qui concerne l'expression de jugements d'appréciation,

(en pratique,

signifie les décideurs peuvent exprimer des jugements d'appréciation concernant les performances pouvant être atteintes sur un critère indépendamment des performances atteintes sur les autres critères).

Exemple d'un aspect non isolable d'un autre

Choix d'un appartement à louer…

Aspects : « superficie de l'appartement » , « nombre de chambres » , ….

Supposons que

- lorsque la « superficie de l'appartement » est de 70 m²,
  les décideurs préfèrent un appartement avec 3 chambres plutôt qu'un appartement avec 4 chambres

- lorsque la « superficie de l'appartement » est de 100 m²,
  les décideurs préfèrent un appartement avec 4 chambres plutôt qu'un appartement avec 3 chambres

On ne peut pas exprimer des jugements d'appréciation concernant l'attractivité des modalités « 3 chambres » et « 4 chambres » de l'aspect « nombre de chambres » indépendamment de ce qui se passe sur l'aspect « superficie de l'appartement ».

Dans ce cas, l'aspect « nombre de chambres » n'est pas isolable de l'aspect « superficie de l'appartement » (en ce qui concerne l'expression de jugements d'appréciation)

Jugements d'appréciation

Le plus souvent, en pratique, deux formes de jugements d'appréciation :

• le **rangement** (par ordre d'attractivité décroissante) des éléments à évaluer

• l'**évaluation numérique** c'est-à-dire l'association à chaque élément à évaluer d'un nombre qui « mesure » son attractivité.

Recueil de jugements d'appréciation : questionnement de base

Soit **E** un ensemble d'éléments auxquels s'intéressent des décideurs.

<u>Questionnement de base</u>

(recueil de jugements d'appréciation comparatifs)

Étant donné deux éléments X et Y de **E**, quelle est, parmi les propositions suivantes, celle qui correspond à votre jugement :

• vous préférez X à Y (notation X **P** Y)

• vous préférez Y à X (notation Y **P** X)

• X et Y sont indifférents à vos yeux (notation X **I** Y ou Y **I** X).

Recueil de jugements d’appréciation : questionnement de base

Lorsque la question de base est posée

pour plusieurs paires { X, Y } d’éléments de **E**,

on peut représenter les jugements recueillis

sous forme graphique

Conventions graphiques

X **P** Y

X • → • Y

X **I** Y

X • ═ • Y

ou sous la forme d’un tableau.

Recueil de jugements d’appréciation : questionnement de base

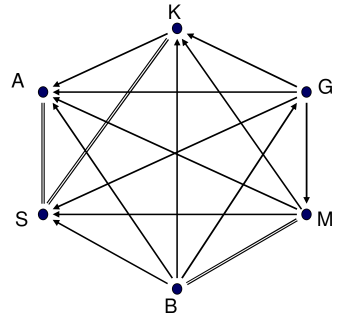
Exemple

Recueil de jugements d’appréciation comparatifs concernant la prestation scénique de groupes musicaux lors d’un festival « rock » :

- K : Kasabian
- G : Grinderman
- M : Iron Maiden
- B : Black Eyed Peas
- S : Social Distortion
- A : A-trak

Recueil de jugements d’appréciation : questionnement de base

Exemple : **E** = { K, G, M, B, S, A }



Présentation sous forme graphique

	K	G	M	B	S	A
K					I	P
G	P		P		P	P
M	P			I	P	P
B	P	P	I		P	P
S	I					I
A					I	

Présentation sous forme d’un tableau

Rangement (information ordinale)

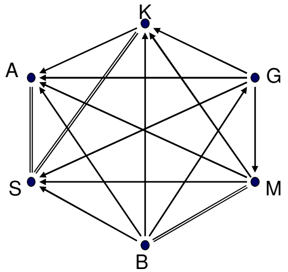
information (préférentielle) **ordinale** :

rangement des éléments de **E** par ordre d’attractivité décroissante.

(avec ou sans ex-æquo)

Recueil de jugements d'appréciation : questionnement de base

Exemple : **E** = { K, G, M, B, S, A }



	K	G	M	B	S	A
K					I	P
G	P		P		P	P
M	P			I	P	P
B	P	P	I		P	P
S	I					I
A					I	

rangement ?

Comment tester si les jugements constituent un rangement ?

		K	G	M	B	S	A
(1 - 3 = -2)	K					I	P
(4 - 1 = 3)	G	P		P		P	P
(3 - 1 = 2)	M	P			I	P	P
(4 - 0 = 4)	B	P	P	I		P	P
(0 - 3 = -3)	S	I					I
(0 - 4 = -4)	A					I	

Comment tester si les jugements constituent un rangement ?

		→	
(1 - 3 = -2)	K		B (4)
(4 - 1 = 3)	G		G (3)
(3 - 1 = 2)	M		M (2)
(4 - 0 = 4)	B		K (-2)
(0 - 3 = -3)	S		S (-3)
(0 - 4 = -4)	A		A (-4)

Comment tester si les jugements constituent un rangement ?

	B	G	M	K	S	A	
B		P	I	P	P	P	B (4)
G			P	P	P	P	G (3)
M	I			P	P	P	M (2)
K					I	P	K (-2)
S				I		I	S (-3)
A					I		A (-4)

Comment tester si les jugements constituent un rangement ?

La ligne brisée séparant les « P » et les « I »

est d'un seul tenant

et …

Pas de rangement entre B, G et M

	B	G	M	K	S	A
B		P	I	P	P	P
G			P	P	P	P
M	I			P	P	P
K					I	P
S				I		I
A					I	

Comment tester si les jugements constituent un rangement ?

La ligne brisée séparant les « P » et les « I »

est d'un seul tenant

et représente un escalier dont chaque marche

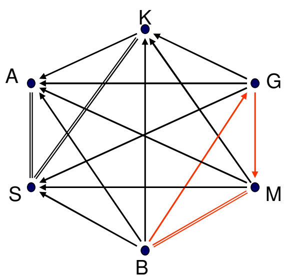
s'appuie sur la diagonale principale de la matrice

	B	G	M	K	S	A
B		P	I	P	P	P
G		O.K.	P	P	P	P
M	I		O.K.	P	P	P
K				O.K.	I	P
S				I		~~O.K.~~ I
A					I	

Pas de rangement entre K, S et A

Les jugements recueillis ne constituent pas un rangement

Exemple : **E** = { K, G, M, B, S, A }

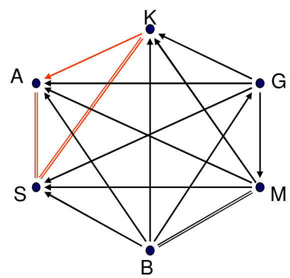


	B	G	M	K	S	A
B		P	I	P	P	P
G			P	P	P	P
M	I			P	P	P
K					I	P
S				I		I
A					I	

La relation **P** n'est pas transitive (B **P** G, G **P** M mais B **I** M).

Les jugements recueillis ne constituent pas un rangement

Exemple : **E** = { K, G, M, B, S, A }



	B	G	M	K	S	A
B		P	I	P	P	P
G			P	P	P	P
M	I			P	P	P
K					I	P
S				I		I
A					I	

La relation **I** n'est pas transitive (K **I** S, S **I** A mais K **P** A).

Les jugements recueillis ne constituent pas un rangement

Remarque

Si on avait demandé aux décideurs de ranger les éléments de **E** par ordre d'attractivité décroissante, il est possible qu'ils auraient accepté de le faire.

Question importante en pratique :
quelle est la fiabilité de l'information préférentielle recueillie ?

Évaluation numérique

• l'**évaluation numérique** c'est-à-dire l'association à chaque élément à évaluer d'un nombre qui « mesure » son attractivité.

- forme la plus courante d'expression de jugements de valeur.
- pourtant la plus difficile

car nécessite des connaissances de base
concernant les notions de **nombre** et de **mesurage**

À propos de la notion de nombre

Mathématiques pures

(langage abstrait dont le vocabulaire est fait de symboles et dont la grammaire relève de la logique)

L'une de ses notions fondamentales est celle de **nombre**.(*)

concept abstrait défini sur base axiomatique

(*) Notion […] qui ne peut faire l'objet d'une définition stricte (petit Larousse illustré)

Concept de base des mathématiques […] que l'on peut rapporter à d'autres idées […] mais non définir (petit Robert)

À propos de la notion de nombre

Mathématiques appliquées

En mathématiques appliquées, les nombres peuvent apparaître sous 3 formes :

- la forme nominale
- la forme ordinale
- la forme cardinale.

→ 3 rôles distincts en pratique.

À propos de la notion de nombre

- Dans un hôtel : chambre **17**

  → nombre « **nominal** » (qui sert à identifier)

- Arrivée du « Tour des Flandres 2010 » : **1** Cancellara Fabian, **2** Boonen Tom, **3** Gilbert Philippe

  → nombre « **ordinal** » (qui sert à ordonner)

- La température dans cette pièce est de **21**℃

  → nombre « **cardinal** » (qui sert à **mesurer**)

À propos de la notion de nombre

Ce n'est que lorsqu'on dispose de **nombres cardinaux**

que certaines opérations mathématiques élémentaires

(comme l'addition ou la somme pondérée)

peuvent conduire à des résultats qui sont « interprétables »

À propos de mesurage

Qui dit « mesurage » pense « affectation de nombres à des objets ».

ATTENTION :

- on ne mesure pas les objets

  exemple : un bâton n'est pas mesurable

- on mesure une propriété que ces objets peuvent posséder à des niveaux divers

  exemple : la longueur, le poids, … d'un bâton sont mesurables

  on dispose d'une unité de mesure

À propos de mesurage

Quelle que soit la propriété considérée

- attractivité (d'actions potentielles),
- gravité (de délits),
- vraisemblance (d'événements)
- …

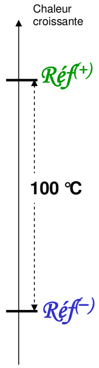
pour pouvoir mesurer cette propriété, il faut disposer d'une **unité de mesure**.

Construction d'une unité de mesure pour la propriété de chaleur : Celsius (1742)

1°) <u>Choix d'un repère</u> (= ensemble de deux éléments dont les niveaux de possession de la propriété de chaleur sont bien connus)

- Réf$^{(+)}$: eau bouillante
- Réf$^{(-)}$: glace fondante

2°) <u>Définition d'une unité de mesure</u> : par définition, le degré Celsius (°C) est la centième partie de la différence de chaleur entre Réf$^{(+)}$ et Réf$^{(-)}$.

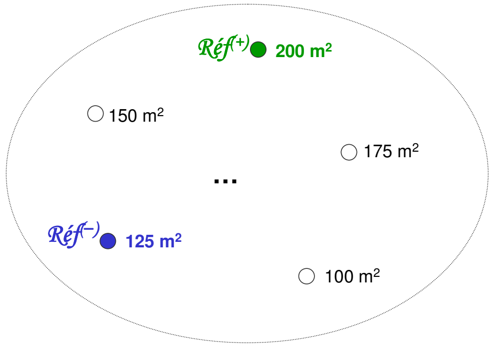


<u>Remarque</u>
Observons que, bien qu'on parle de mesurage de la propriété de chaleur, le degré Celsius est une unité de mesure de la <u>différence de chaleur</u> et pas une unité de mesure de la chaleur.

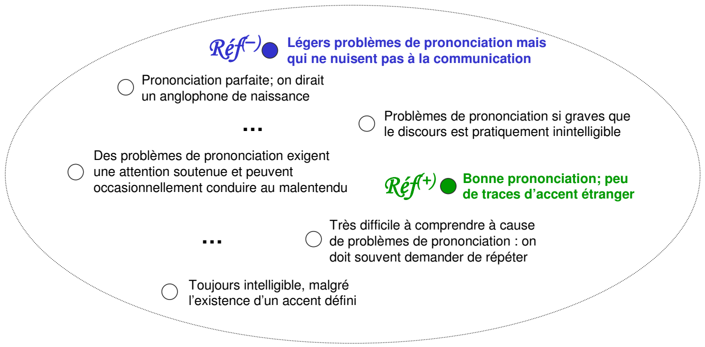
Construction d'une unité de mesure pour la propriété d'attractivité

1°) Spécifier un repère c'est-à-dire deux éléments de référence Réf$^{(+)}$ et Réf$^{(-)}$ dont les niveaux d'attractivité sont bien connus et tels que Réf$^{(+)}$ est nettement plus attractif que Réf$^{(-)}$.

Exemple de modalités pouvant être associées au critère « superficie d'un local »



Exemple de modalités pouvant être associées au critère « qualité de prononciation de l'anglais »



Exemple de modalités pouvant être associées au critère « qualité d'impression en couleurs »

- Les photos imprimées semblent sortir d'un labo photo classique
- Réf$^{(+)}$ • **Bon rendu des couleurs, peut servir à reproduire des photos**
- Les bavures sont rares et minuscules, quelques légers défauts
- Réf$^{(-)}$ • **Rendu des couleurs satisfaisant pour du dessin, par pour une photo**
- Qualité des couleurs juste suffisante pour colorer du texte

Construction d'une unité de mesure pour la propriété d'attractivité

1°) Spécifier un repère c'est-à-dire deux éléments de référence

Réf$^{(+)}$ et Réf$^{(-)}$

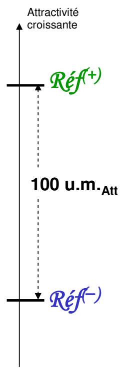
dont les niveaux d'attractivité sont bien connus

et tels que Réf$^{(+)}$ est nettement plus attractif que Réf$^{(-)}$.

2°) Prendre comme **unité de mesure** de la différence d'attractivité[*]

celle existant entre Réf$^{(+)}$ et Réf$^{(-)}$

(ou une partie bien spécifiée de cette différence, par exemple 1/100).



---

[*] Même remarque que pour la propriété de chaleur : bien qu'on parle de mesurage de l'attractivité, en réalité, ce sont des différences d'attractivité que l'on mesure. Il s'agit là d'une situation assez générale : <u>on parle de mesurage d'une propriété mais ce sont des différences de possession de cette propriété que l'on mesure</u>.

Mesurage de la propriété d'attractivité

Dès qu'on dispose d'une unité de mesure de la différence d'attractivité,

on peut définir l'attractivité d'un élément X [notation Att(X)]

comme étant le nombre qui mesure la différence d'attractivité entre X et Réf$^{(-)}$ (dans l'unité de mesure choisie).

Mesurage de la propriété d'attractivité

Sur le plan pratique, une façon de

déterminer l'attractivité d'un élément X

consiste à positionner X

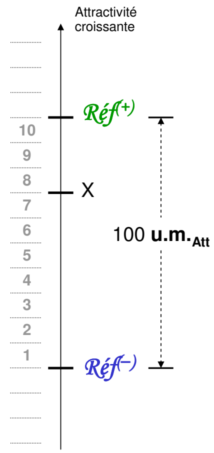
par rapport au repère {Réf$^{(+)}$, Réf$^{(-)}$}

de telle sorte que

les distances relatives entre X, Réf$^{(+)}$ et Réf$^{(-)}$

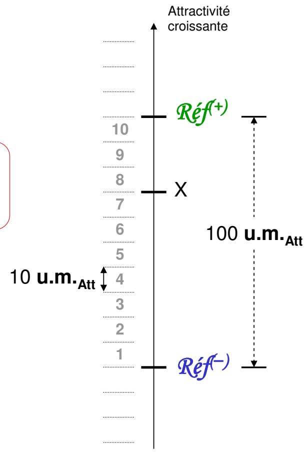
traduisent les différences d'attractivité relatives

ressenties entre ces éléments.



Mesurage de la propriété d'attractivité

Att(X) ≡ Diff. Att (X, Réf(−)) = 70 $\mathbf{u.m.}_{Att}$



Mesurage de la propriété d'attractivité

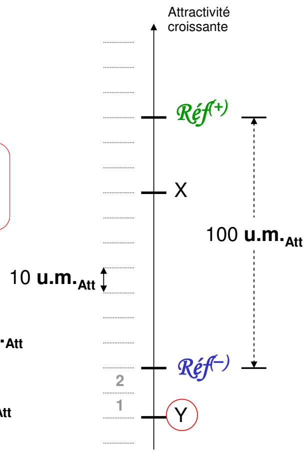
Supposons qu'un autre élément Y ait été positionné comme indiqué ci-contre.

Att(Y) ≡ Diff. Att (Y, Réf(−)) = - 20 $\mathbf{u.m.}_{Att}$

Observons que :

Att(Réf(+)) ≡ Diff. Att (Réf(+), Réf(−)) = 100 $\mathbf{u.m.}_{Att}$

Att(Réf(−)) ≡ Diff. Att (Réf(−), Réf(−)) = 0 $\mathbf{u.m.}_{Att}$



Sur quelle échelle est-il « naturel » de mesurer une propriété ?

En cas d'évaluation, beaucoup de gens travaillent avec une échelle fermée .

Exemple : évaluation « scolaire »

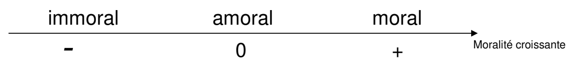
Il est naturel de mesurer la propriété de « connaissance d'une matière » sur une échelle fermée,

MAIS toute propriété ne se mesure pas naturellement sur une échelle fermée.

Types de propriété et échelles « naturelles » associées

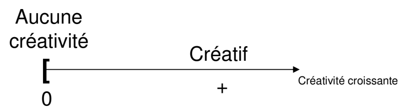
Propriété **bipolaire** : admet à la fois l'idée d'absence et celle d'opposé.

Exemple : propriété de moralité



Propriété **unipolaire** : admet l'idée d'absence mais pas celle d'opposé.

Exemple : propriété de créativité



Propriétés unipolaires bornées

L'idée de posséder **totalement** cette propriété a un sens.

Exemples : la vraisemblance, la crédibilité, la connaissance d'une matière

Types de propriété et échelles « naturelles » associées

Une échelle **fermée** est naturellement adaptée à la mesure d'une propriété **unipolaire bornée**.

Exemple : connaissance d'une matière

★ possession totale de la propriété ← Connaissance parfaite

repère naturel et implicite

★ absence de possession de la propriété ← Aucune connaissance

Types de propriété et échelles « naturelles » associées

Une propriété **unipolaire** se mesure naturellement sur une échelle **semi-ouverte** (ou semi-fermée).

Exemple : propriété d'importance

Importance croissante

★ spécifier $\mathit{Réf}_{\mathcal{P}}^{(+)}$.

repère

★ absence de possession de la propriété ← Sans importance

Types de propriété et échelles « naturelles » associées

Une propriété **bipolaire** se mesure naturellement sur une échelle **ouverte** .

Exemple : propriété d'attractivité

Attractivité croissante

★ spécifier $\mathit{Réf}_{\mathcal{P}}^{(+)}$

repère

★ spécifier $\mathit{Réf}_{\mathcal{P}}^{(-)}$

Fonction de valeur cardinale

Soit **E** un ensemble d'éléments dont on désire mesurer l'attractivité.

On appelle fonction de valeur cardinale sur **E**
toute fonction v(•)(*)
associant à chaque élément X de **E** un nombre v(X)
de telle sorte que
les différences (numériques) relatives entre ces nombres
traduisent les différences d'attractivité relatives
ressenties entre les éléments
auxquels ces nombres sont associés.

(*) N.B. On dit que deux fonctions de valeur cardinales sont équivalentes lorsqu'elles traduisent toutes deux la même information en termes de différences d'attractivité.
Si $v_1(\bullet)$ et $v_2(\bullet)$ sont deux fonctions de valeur cardinales équivalentes, alors, il existe entre elles une liaison du type suivant : $v_2(\bullet) = \alpha.v_1(\bullet) + \beta$ où α et β sont deux nombres réels avec $\alpha > 0$.

Exemple

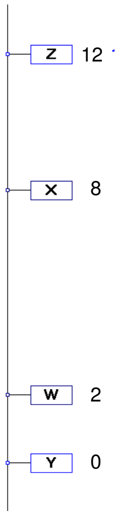
Soit **E** = { W, X, Y, Z }

Si la fonction v(•) définie par
$$\begin{cases} v(W) = 2 \\ v(X) = 8 \\ v(Y) = 0 \\ v(Z) = 12 \end{cases}$$

est une fonction de valeur cardinale sur **E**,

on peut par exemple affirmer que :

- ✓ la différence d'attractivité entre Z et X est deux fois plus grande que celle entre W et Y
- ✓ la différence d'attractivité entre X et W est trois fois plus grande que celle entre W et Y
- ✓ $\dfrac{\text{Diff. Att.(Z, W)}}{\text{Diff. Att.(X, Y)}} = \dfrac{12 - 2}{8 - 0} = \dfrac{5}{4}$



Fonction de valeur cardinale

Lorsqu'on dispose d'une fonction de valeur cardinale sur un ensemble **E**,

il suffit de

- ✓ spécifier un **repère** parmi les éléments considérés
- ✓ définir une **unité de mesure** de la différence d'attractivité,

afin de pouvoir déterminer l'attractivité de chacun des éléments.

Si on prend comme repère { X , W }
et si on définit l'unité de mesure $\mathbf{u.m.}_{Att}$ comme étant
la centième partie de la différence d'attractivité
existant entre X et W, on a :

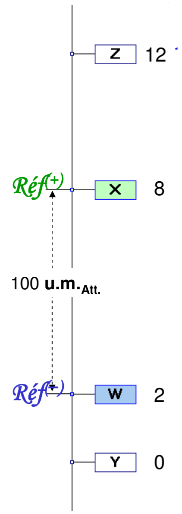
$$\frac{\text{Diff. Att.}(Z, Réf^{(-)})}{\text{Diff. Att.}(Réf^{(+)}, Réf^{(-)})} = \frac{v(Z) - v(Réf^{(-)})}{v(Réf^{(+)}) - v(Réf^{(-)})}$$

$$= \frac{12 - 2}{8 - 2} = \frac{10}{6} = 1{,}6666$$

Par conséquent : $\text{Att}(Z) \equiv \text{Diff. Att.}(Z, Réf^{(-)})$

$= 1{,}6666 \,.\, \text{Diff. Att.}(Réf^{(+)}, Réf^{(-)})$

$= 1{,}6666 \,.\, 100\ \mathbf{u.m.}_{Att} = 166{,}66\ \mathbf{u.m.}_{Att}$



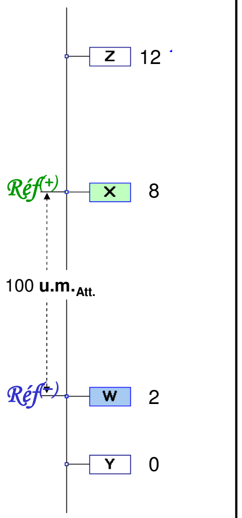
On vérifie de même que :

Att(X) = 100 **u.m.**$_{Att}$

Att(W) = 0 **u.m.**$_{Att}$

Att(Y) = – 33,33 **u.m.**$_{Att}$

<u>Remarque</u> : on obtiendrait les mêmes valeurs pour les attractivités si celles-ci avaient été déterminées au départ d'une fonction de valeur cardinale équivalente à v(•).



A propos d'agrégation

La plupart des modèles d'agrégation font intervenir dans leur formulation

des **paramètres techniques**

destinés à ajuster le modèle au système de valeurs des décideurs.

Lorsqu'on est en présence de K critères $\mathbf{Cr_1}$, $\mathbf{Cr_2}$, …, $\mathbf{Cr_K}$,

ces paramètres sont généralement au nombre de K

et ils sont (malheureusement) souvent appelés « poids des critères » .

Lorsque l'unité de mesure **u.m.**$_{Att}$

a été définie comme la N^{ième} partie

de la différence d'attractivité entre les

références supérieure et inférieure du repère,

la fonction de valeur cardinale

qui fournit directement

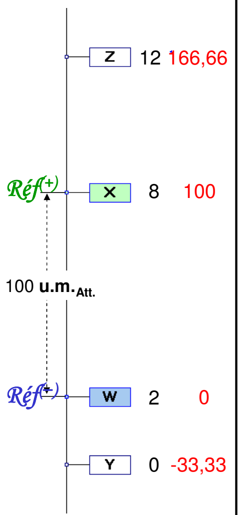
les attractivités des éléments

est celle pour laquelle

le nombre associé à *Réf*$^{(-)}$ est 0

et

le nombre associé à la *Réf*$^{(+)}$ est N.



A propos d'agrégation

Il faut être conscient que

- la signification de ces paramètres peut varier d'un modèle d'agrégation à l'autre
- quel que soit le modèle d'agrégation considéré,

  il n'y a aucune raison que

  la signification des paramètres de ce modèle

  corresponde à celle que les décideurs pourraient « intuitivement » accorder

  à l'idée d' « importance » des critères

A propos d'agrégation

Quel que soit le modèle d'agrégation utilisé,

il faut donc absolument éviter

de déterminer les valeurs des paramètres de ce modèle
sur base d'informations fournies par les décideurs
concernant l' « importance » relative des critères

car on court alors le risque que les résultats obtenus en appliquant le modèle
ne correspondent en rien aux préoccupations des décideurs.

Signification de la notion d'importance des critères

Exemple : achat d'une voiture pour un ami

- Achat d'une voiture
  - Prix
  - Confort

2 critères

Le **prix** est plus important que le **confort**

	Prix	Confort
Voiture A	16250 €	Moyen (□)
Voiture B	17000 €	Excellent (+ +)

Le **prix** est plus important que le **confort**

Quelle voiture acheter ?

Quelle est la signification opérationnelle de l'affirmation « tel critère est plus important que tel autre » ?

	Prix	Confort
Voiture A	16250 €	Moyen (□)
Voiture B	17000 €	Excellent (+ +)

Le **prix** est plus important que le **confort**

L'information que les décideurs donnent intuitivement quant à l'importance relative des critères n'est pas utilisable en pratique.

Rappel concernant l'agrégation de rangements

En 1951, Kenneth J. Arrow a démontré

(dans un théorème célèbre actuellement connu

sous le nom de « théorème d'impossibilité d'Arrow »)

le caractère problématique de l'agrégation de rangements.

Il est impossible d'agréger des rangements

en un rangement global

sans introduction d'arbitraire.

Le modèle d'agrégation additif

Lorsque, pour chaque critère **Cr**$_i$,

• un repère ($\mathcal{Réf}_{CRi}^{(+)}$, $\mathcal{Réf}_{CRi}^{(-)}$) a été spécifié,

• on a mesuré l'attractivité (locale sur **Cr**$_i$) de chaque action potentielle X
en prenant comme unité de mesure de la différence d'attractivité
celle existant entre $\mathcal{Réf}_{CRi}^{(+)}$ et $\mathcal{Réf}_{CRi}^{(-)}$ (ou une partie bien spécifiée de cette différence),

alors, il existe de nombreux modèles permettant d'effectuer
« valablement » l'agrégation de ces informations.

Le **modèle d'agrégation additif** est le plus simple d'entre eux.

Le modèle d'agrégation additif :

associer à chaque élément à évaluer X un nombre quantifiant son attractivité globale

si trois critères **Cr**$_1$, **Cr**$_2$ et **Cr**$_3$

$$Att_G(X) = p_1.Att_{CR1}(X) + p_2.Att_{CR2}(X) + p_3.Att_{CR3}(X)$$

- $Att_{CRi}(X)$ est un nombre qui mesure l'attractivité locale de X sur le critère **Cr**$_i$
- p_1, p_2 et p_3 sont des paramètres positifs tels que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ (=100%) .

Le modèle d'agrégation additif

En termes techniques,

ces paramètres p_1, p_2, p_3 sont des *taux de conversion* qui permettent de transformer

les unités de mesure de différence d'attractivité locale **u.m.**$_{Att(CRi)}$

en une même unité de mesure de différence d'attractivité globale **u.m.**$_{Att(G)}$:

$$1 \times \mathbf{u.m.}_{Att(CRi)} = p_i \times \mathbf{u.m.}_{Att(G)}$$

Le modèle d'agrégation additif

En ce qui concerne la **signification** des paramètres p_1, p_2 et p_3,

ils quantifient l'importance relative que les décideurs attribuent

au départ de la situation (Réf$_{CR1}^{(-)}$, Réf$_{CR2}^{(-)}$, Réf$_{Cr3}^{(-)}$),

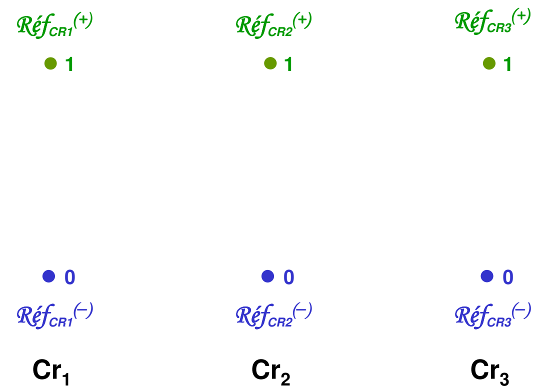
aux passages

de Réf$_{CR1}^{(-)}$ à Réf$_{CR1}^{(+)}$,

de Réf$_{CR2}^{(-)}$ à Réf$_{CR2}^{(+)}$,

de Réf$_{CR3}^{(-)}$ à Réf$_{CR3}^{(+)}$.

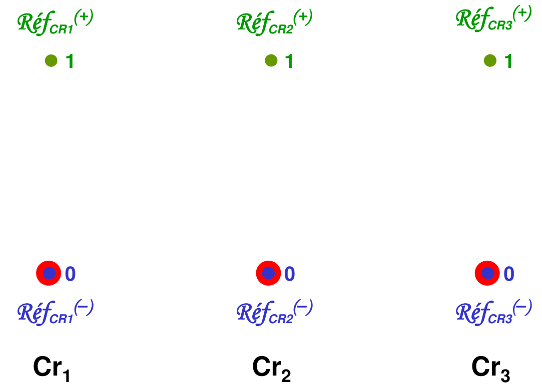
Supposons que l'unité de mesure choisie pour
la différence d'attractivité (locale ou globale) soit
la différence d'attractivité entre les deux références du repère.



Situation de départ : (Réf$_{CR1}^{(-)}$, Réf$_{CR2}^{(-)}$, Réf$_{CR3}^{(-)}$)

Att$_G$(Réf$_{CR1}^{(-)}$, Réf$_{CR2}^{(-)}$, Réf$_{CR3}^{(-)}$)

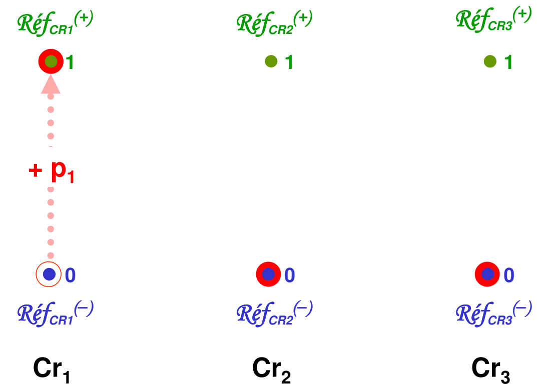
$= p_1.\text{Att}_{CR1}(\text{Réf}_{CR1}^{(-)}) + p_2.\text{Att}_{CR2}(\text{Réf}_{CR2}^{(-)}) + p_3.\text{Att}_{CR3}(\text{Réf}_{CR3}^{(-)}) = \mathbf{0}$



Passage de Réf$_{CR1}^{(-)}$ **à** Réf$_{CR1}^{(+)}$

Att$_G$(Réf$_{CR1}^{(+)}$, Réf$_{CR2}^{(-)}$, Réf$_{CR3}^{(-)}$)

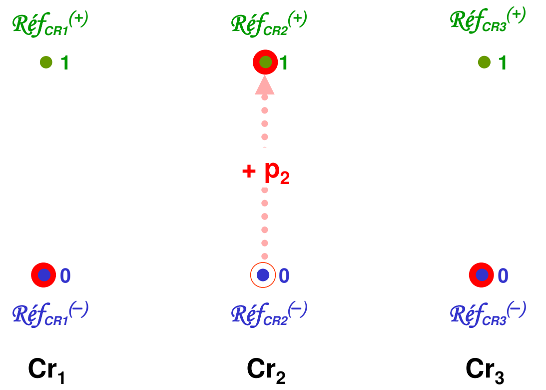
$= p_1.\text{Att}_{CR1}(\text{Réf}_{CR1}^{(+)}) + p_2.\text{Att}_{CR2}(\text{Réf}_{CR2}^{(-)}) + p_3.\text{Att}_{CR3}(\text{Réf}_{CR3}^{(-)}) = \mathbf{p_1}$



Passage de $\mathit{Réf}_{CR2}^{(-)}$ à $\mathit{Réf}_{CR2}^{(+)}$

$\mathbf{Att}_G(\mathit{Réf}_{CR1}^{(-)}, \mathit{Réf}_{CR2}^{(+)}, \mathit{Réf}_{CR3}^{(-)})$

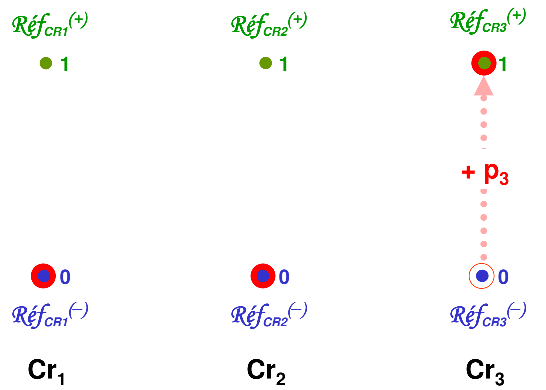
$= p_1.\mathrm{Att}_{CR1}(\mathit{Réf}_{CR1}^{(-)}) + p_2.\mathrm{Att}_{CR2}(\mathit{Réf}_{CR2}^{(+)}) + p_3.\mathrm{Att}_{CR3}(\mathit{Réf}_{CR3}^{(-)}) = \mathbf{p_2}$



Passage de $\mathit{Réf}_{CR3}^{(-)}$ à $\mathit{Réf}_{CR3}^{(+)}$

$\mathbf{Att}_G(\mathit{Réf}_{CR1}^{(-)}, \mathit{Réf}_{CR2}^{(-)}, \mathit{Réf}_{CR3}^{(+)})$

$= p_1.\mathrm{Att}_{CR1}(\mathit{Réf}_{CR1}^{(-)}) + p_2.\mathrm{Att}_{CR2}(\mathit{Réf}_{CR2}^{(-)}) + p_3.\mathrm{Att}_{CR3}(\mathit{Réf}_{CR3}^{(+)}) = \mathbf{p_3}$



Le modèle d'agrégation additif

Contrairement à ce que beaucoup de personnes pensent,

les paramètres p_i

du modèle d'agrégation additif

ne caractérisent **pas**

l'importance relative des critères !

It's the most common critical mistake in decision making !

Ralph L. Keeney (Value-Focussed Thinking, page 147)

Conclusion

Si on ne spécifie **pas**, pour chaque critère,
deux niveaux de performance pouvant être atteints sur ce critère,

- on n'a pas d'unité de mesure *(que mesure-t-on?)*
  pour l'évaluation numérique locale (sur chaque critère) des actions potentielles

- on ne peut pas spécifier correctement les « poids » dans la somme pondérée,
  (que signifie la note finale d'une action potentielle en ce qui concerne sa valeur globale?)

→ on ouvre la porte à la **manipulation** et à l'**arbitraire**.

Première question

A quoi faut-il veiller lorsque,

pour chaque critère **Cr$_i$**, on travaille non pas avec $Att_{CRi}(\bullet)$

mais avec une fonction de valeur cardinale $v_{CRi}(\bullet)$?

Première question

Lorsque, pour chaque critère **Cr$_i$**,

- un repère ($\text{Réf}_{CRi}^{(+)}$, $\text{Réf}_{CRi}^{(-)}$) a été spécifié,
- on dispose d'une fonction de valeur cardinale (locale) $v_{CRi}(\bullet)$,

alors, on peut obtenir une fonction de valeur cardinale (globale) $v_G(\bullet)$ comme suit :

1°) Si, pour tous les critères **Cr$_i$**,

les différences [$v_{CRi}(\text{Réf}_{CRi}^{(+)}) - v_{CRi}(\text{Réf}_{CRi}^{(-)})$] sont égales

alors $v_G(\bullet) = p_1.v_{CR1}(\bullet) + p_2.v_{CR2}(\bullet) + p_3.v_{CR3}(\bullet)$

où, comme précédemment, les p_i sont des « poids de passage ».

Première question

Lorsque, pour chaque critère **Cr$_i$**,

- un repère ($\text{Réf}_{CRi}^{(+)}$, $\text{Réf}_{CRi}^{(-)}$) a été spécifié,
- on dispose d'une fonction de valeur cardinale (locale) $v_{CRi}(\bullet)$,

alors, on peut obtenir une fonction de valeur cardinale (globale) $v_G(\bullet)$ comme suit :

2°) Si les différences [$v_{CRi}(\text{Réf}_{CRi}^{(+)}) - v_{CRi}(\text{Réf}_{CRi}^{(-)})$] ne sont pas égales

pour tous les critères **Cr$_i$**,

alors $v_G(\bullet) = \sigma_1.v_{CR1}(\bullet) + \sigma_2.v_{CR2}(\bullet) + \sigma_3.v_{CR3}(\bullet)$

où
- les valeurs des σ_i sont proportionnelles à $\dfrac{p_i}{v_{CRi}(\text{Réf}_{CRi}^{(+)}) - v_{CRi}(\text{Réf}_{CRi}^{(-)})}$
- $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1$.

Deuxième question

Est-il nécessaire, pour réaliser « valablement » une agrégation,

de disposer d'une évaluation numérique sur chaque critère ?

Deuxième question

<u>Examen d'une tentative originale : la méthode ARGUS</u>

Enrichissement de l'information ordinale par l'introduction de catégories de différence d'attractivité :

Différence d'attractivité
- Très forte
- Forte
- Modérée
- Faible

Tableau des performances des voitures

	Volume du coffre	Prix d'achat	Consommation aux 100 km
Voit. A	275 dm^3	4500 €	8,1 litres
Voit. B	200 dm^3	6750 €	5 litres
Voit. C	350 dm^3	7050 €	5,8 litres

Exemple

- Achat d'une voiture d'occasion
  - Volume du coffre (Cr_1)
  - Prix d'achat (Cr_2)
  - Consommation aux 100 km (Cr_3)

Trois actions potentielles :
- Voit. A
- Voit. B
- Voit. C

Différences d'attractivité pour chaque critère

	Volume du coffre	Prix d'achat	Consommation aux 100 km
Voit. A	275 dm^3	4500 €	8,1 litres
	Forte	Très forte	Très forte
Voit. B	200 dm^3	6750 €	5 litres
	Très forte	Faible	Modérée
Voit. C	350 dm^3	7050 €	5,8 litres
	Forte	Très forte	Très forte

	Cr_1	Cr_2	Cr_3
A	275 dm^3	4500 €	8,1 litres
	For.	T.For.	T.For.
B	200 dm^3	6750 €	5 litres
	T.For.	fai.	Mod.
C	350 dm^3	7050 €	5,8 litres
A–C	For.	T.For.	T.For.

Comparaison des actions **A** et **B**

En faveur de **A**

Diff. très forte sur **Cr_2**
Diff. forte sur **Cr_1**

En faveur de **B**

Diff. très forte sur **Cr_3**

Peser le pour et le contre

Méthode « ARGUS »

ARGUS
(**A**chieving **R**espect for **G**rades by **U**sing ordinal **S**cales only)
est une méthode d'agrégation
qui propose des règles pour « avancer »
dans de telles situations.

Pour cerner l'idée d'importance des critères,
elle demande de préciser, pour chaque critère, si celui-ci est :

« très faiblement » important,
« faiblement » important,
« moyennement » important,
« fortement » important,
ou « extrêmement » important.

Méthode « ARGUS »

Les règles utilisées dans ARGUS
découlent alors du tableau suivant :

Rangement des différences d'attractivité compte tenu de l'importance des critères		Catégories d'importance des critères				
		Très faible	Faible	Moyenne	Forte	Extrême
Catégories de différences d'attractivité (pour chaque critère)	Faible	R.8	R.7	R.6	R.5	R.4
	Modérée	R.7	R.6	R.5	R.4	R.3
	Forte	R.6	R.5	R.4	R.3	R.2
	Très forte	R.5	R.4	R.3	R.2	R.1

Rangement des différences d'attractivité compte tenu de l'importance des critères		Catégories d'importance des critères				
		Très faible	Faible	Moyenne	Forte	Extrême
Catégories de différences d'attractivité (pour chaque critère)	Faible	R.8	R.7	R.6	R.5	R.4
	Modérée	R.7	R.6	R.5	R.4	R.3
	Forte	R.6	R.5	R.4	R.3	R.2
	Très forte	R.5	R.4	R.3	R.2	R.1

Exemple de règle

Une différence d'attractivité forte sur un critère d'importance moyenne
équivaut à
une différence d'attractivité modérée sur un critère d'importance forte.

Rangement des différences d'attractivité compte tenu de l'importance des critères		Catégories d'importance des critères				
		Très faible	Faible	Moyenne	Forte	Extrême
Catégories de différences d'attractivité (pour chaque critère)	Faible	R.8	R.7	R.6	R.5	R.4
	Modérée	R.7	R.6	$\boxed{\text{R.5}}$	R.4	R.3
	Forte	R.6	R.5	R.4	R.3	R.2
	Très forte	R.5	$\boxed{\text{R.4}}$	R.3	R.2	R.1

Exemple de règle

Une différence d'attractivité très forte sur un critère d'importance faible

vaut plus

qu'une différence d'attractivité modérée sur un critère d'importance moyenne.

Exemple de l'achat d'une voiture d'occasion

Importance des critères

- Achat d'une voiture d'occasion
  - Volume du coffre (Cr_1)
  - Prix d'achat (Cr_2)
  - Consommation aux 100 km (Cr_3)

Cr_1 : critère faiblement important

Cr_2 : critère fortement important

Cr_3 : critère fortement important

Cr_1 : critère faiblement important

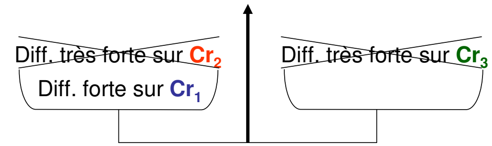
Cr_2 : critère fortement important

Cr_3 : critère fortement important

	Cr_1	Cr_2	Cr_3
A	275 dm³	4500 €	8,1 litres
	For.	T.For.	T.For.
B	200 dm³	6750 €	5 litres
	T.For.	fai.	Mod.
C	350 dm³	7050 €	5,8 litres
	For.	T.For.	T.For.

Comparaison des actions **A** et **B**

En faveur de **A** | En faveur de **B**



Peser le pour et le contre

Cr_1 : critère faiblement important

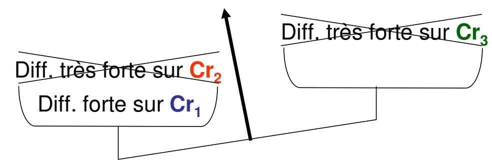
Cr_2 : critère fortement important

Cr_3 : critère fortement important

	Cr_1	Cr_2	Cr_3
A	275 dm³	4500 €	8,1 litres
	For.	T.For.	T.For.
B	200 dm³	6750 €	5 litres
	T.For.	fai.	Mod.
C	350 dm³	7050 €	5,8 litres
	For.	T.For.	T.For.

Comparaison des actions **A** et **B**

En faveur de **A** | En faveur de **B**



A plus attractif que **B**

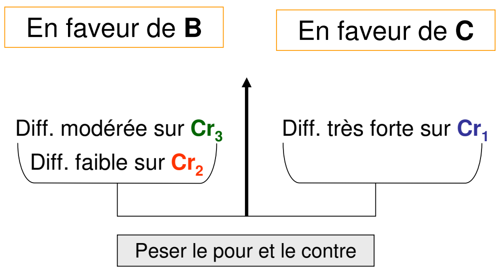
Cr_1 : critère faiblement important

Cr_2 : critère fortement important

Cr_3 : critère fortement important

	Cr_1	Cr_2	Cr_3
A	275 dm^3	4500 €	8,1 litres
	↕ For.	↕ T.For.	↕ T.For.
B	200 dm^3	6750 €	5 litres
	↕ T.For.	↕ fai.	↕ Mod.
C	350 dm^3	7050 €	5,8 litres
(A ↕ C)	For.	T.For.	T.For.

Comparaison des actions **B** et **C**



Rangement des différences d'attractivité compte tenu de l'importance des critères		Catégories d'importance des critères				
		Très faible	Faible	Moyenne	Forte	Extrême
Catégories de différences d'attractivité (pour chaque critère)	Faible	R.8	R.7	R.6	R.5	R.4
	Modérée	R.7	R.6	R.5	$\boxed{\text{R.4}}$	R.3
	Forte	R.6	R.5	R.4	R.3	R.2
	Très forte	R.5	$\boxed{\text{R.4}}$	R.3	R.2	R.1

Exemple de règle

Une différence d'attractivité très forte sur un critère d'importance faible

est équivalente à

une différence d'attractivité modérée sur un critère d'importance forte.

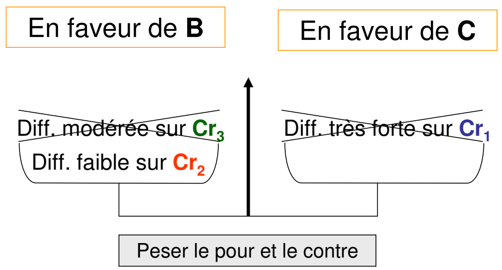
Cr_1 : critère faiblement important

Cr_2 : critère fortement important

Cr_3 : critère fortement important

	Cr_1	Cr_2	Cr_3
A	275 dm^3	4500 €	8,1 litres
	↕ For.	↕ T.For.	↕ T.For.
B	200 dm^3	6750 €	5 litres
	↕ T.For.	↕ fai.	↕ Mod.
C	350 dm^3	7050 €	5,8 litres
(A ↕ C)	For.	T.For.	T.For.

Comparaison des actions **B** et **C**



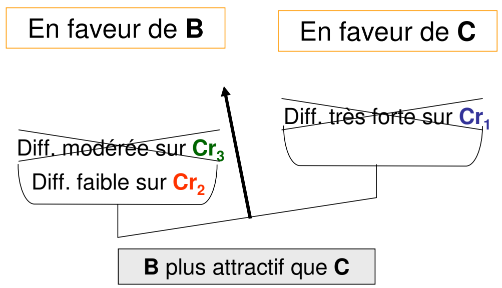
Cr_1 : critère faiblement important

Cr_2 : critère fortement important

Cr_3 : critère fortement important

	Cr_1	Cr_2	Cr_3
A	275 dm^3	4500 €	8,1 litres
	↕ For.	↕ T.For.	↕ T.For.
B	200 dm^3	6750 €	5 litres
	↕ T.For.	↕ fai.	↕ Mod.
C	350 dm^3	7050 €	5,8 litres
(A ↕ C)	For.	T.For.	T.For.

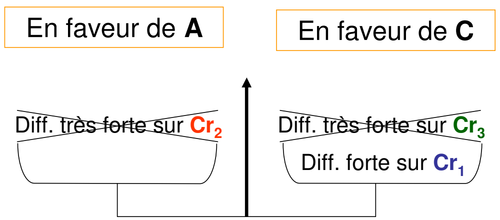
Comparaison des actions **B** et **C**



Cr_1 : critère faiblement important
Cr_2 : critère fortement important
Cr_3 : critère fortement important

	Cr_1	Cr_2	Cr_3
A	275 dm^3	4500 €	8,1 litres
	For.	T.For.	T.For.
B	200 dm^3	6750 €	5 litres
	T.For.	fai.	Mod.
C	350 dm^3	7050 €	5,8 litres
	For.	T.For.	T.For.

Comparaison des actions **A** et **C**

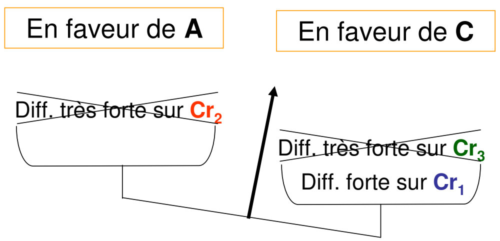


Peser le pour et le contre

Cr_1 : critère faiblement important
Cr_2 : critère fortement important
Cr_3 : critère fortement important

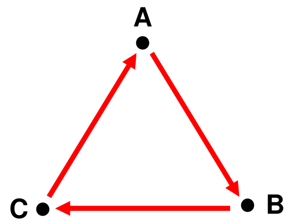
	Cr_1	Cr_2	Cr_3
A	275 dm^3	4500 €	8,1 litres
	For.	T.For.	T.For.
B	200 dm^3	6750 €	5 litres
	T.For.	fai.	Mod.
C	350 dm^3	7050 €	5,8 litres
	For.	T.For.	T.For.

Comparaison des actions **A** et **C**



C plus attractif que **A**

Méthode « ARGUS »



La cohérence des préférences globales n'est pas garantie !