

MATHEMATIQUES APPLIQUEES A LA GESTION

**J.M. DE CORTE
C. MOUSSET**

2^{ème} Bachelier en SG-SEG-IG (Mons-Charleroi)

2007-2008

Code 3062

LES COURS NE SONT NI REPRIS NI ECHANGES

**MATHEMATIQUES APPLIQUEES
A LA GESTION**

**J.M. DE CORTE
C. MOUSSET**

1. Un peu de théorie des graphes...

1. Introduction

Un graphe est un schéma constitué

- d'un ensemble X de points appelés **sommets** du graphe
- et d'un ensemble U de "lignes" reliant chacune deux sommets (distincts ou non).

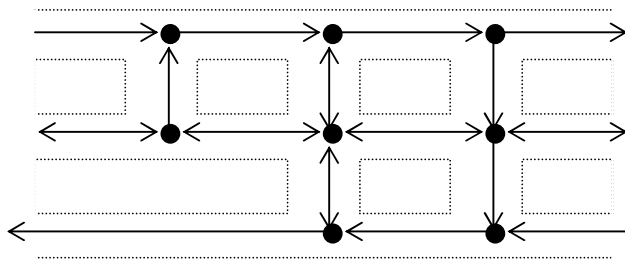
On le désigne souvent par $G(X,U)$.

Lorsque les "lignes" sont orientées, elles portent le nom d'**arcs** et on parle de **graphe orienté**. Lorsque ces lignes sont sans orientation, elles portent le nom d'**arêtes** et on parle alors de **graphe non orienté**.

Exemples

a) Tout réseau de routes, de câbles téléphoniques, de canalisations d'eau, de relais de gsm, ... peut être représenté par un graphe (orienté ou non).

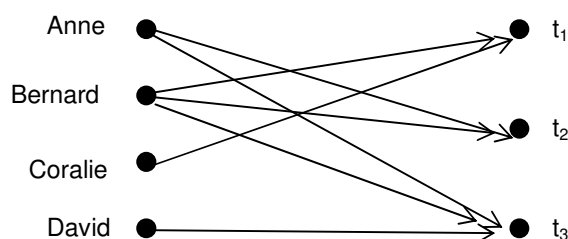
Exemple : Réseau de circulation urbaine



b) Anne, Bernard, Coralie et David sont chacun capables d'effectuer certaines des tâches t_1 , t_2 et t_3 :

- Anne est apte à effectuer les tâches t_2 et t_3
- Bernard est apte à effectuer les tâches t_1 , t_2 et t_3
- Coralie est apte à effectuer la tâche t_1
- David est apte à effectuer la tâche t_3 .

Ceci peut être représenté par le graphe orienté suivant :



c) De manière générale, la présence d'un lien, d'une relation entre certains éléments peut être représentée par un arc (ou une arête) dans un graphe.

NB : Dans la vie courante, ce fait est utilisé dans les arbres généalogiques, pour représenter la relation de parenté.

2. Problème d'ordonnement

2.1. Graphes - tâche

Le cas particulier que nous envisagerons ici est la représentation, par un graphe, des **contraintes temporelles** existant entre les tâches constitutives d'un projet. On envisage un projet constitué d'un ensemble complexe de tâches (programme de recherche, de production, lancement d'un produit, construction d'un bâtiment, d'une route, ...), ces tâches étant soumises à des contraintes de postériorité (une tâche ne peut commencer que si certaines autres tâches sont complètement ou partiellement terminées).

Une façon de représenter une telle situation est d'utiliser un **graphe-tâches** ou **graphe A.O.N.** ("*actions on nodes*") :

- chaque tâche est représentée par un sommet,
- deux sommets supplémentaires sont introduits : "**début**" (ou x_d) qui représente la tâche "débuter le projet" et "**fin**" (ou x_f) qui représente la tâche "entériner la fin du projet";
- toute contrainte de postériorité du type "la tâche b commencera après la tâche a" se traduit par la présence dans U d'un arc (**a,b**);
- à chaque sommet x auquel n'aboutit aucun arc (sommet sans prédécesseur), on associe un arc (**début, x**),
- à chaque sommet x dont n'est issu aucun arc (sommet sans successeur), on associe un arc (**x, fin**).

Exercices

1. L'usinage d'une pièce mécanique nécessite 12 opérations. Certaines de celles-ci doivent être nécessairement précédées d'autres. Ces contraintes apparaissent dans le tableau suivant :

Tâches	Prédécesseurs	Tâches	Prédécesseurs
a	-	g	c, d
b	-	h	e
c	a	i	e
d	a, b	j	e, f
e	a, b	k	g, h
f	c, d	l	i

Modélisez par un graphe A.O.N.

2. Modélisez sous forme de graphe A.O.N. le problème repris dans le tableau ci-dessous.

Tâches	Successeurs	Tâches	Successeurs
a	b	f	g, j
b	e	g	h
c	d, e	h	i
d	f, i	i	-
e	h	j	i

Dans un problème d'ordonnancement d'un projet (cf. derniers exemples cités), on dispose parfois de la durée (estimée) des différentes tâches composant le projet. Grâce à cette information, on peut associer à chaque arc (x,y) un nombre représentant l'intervalle de **temps minimum** qui doit s'écouler entre le début de la tâche x et le début de la tâche y. On a alors affaire à un graphe **valué**.

Exercices

3. Un procédé de fabrication fait intervenir 8 opérations. Celles-ci apparaissent dans le tableau suivant, associées à leur durée et aux contraintes éventuelles.

Opérations	Durées (en minutes)	Contraintes
A	30	-
B	5	après A
C	12	après A
D	17	après A
E	4	après B et C
F	3	après C
G	14	après E et F
H	8	après D

Modélisez sous forme de graphe tâches, en indiquant les durées sur les arcs.

4. Modélisez sous forme de graphe A.O.N. le problème repris dans le tableau ci-dessous.

Tâches	Durées	Prédécesseurs
A	6	-
B	2	-
C	4	A
D	5	A
E	10	B
F	9	B
G	2	C

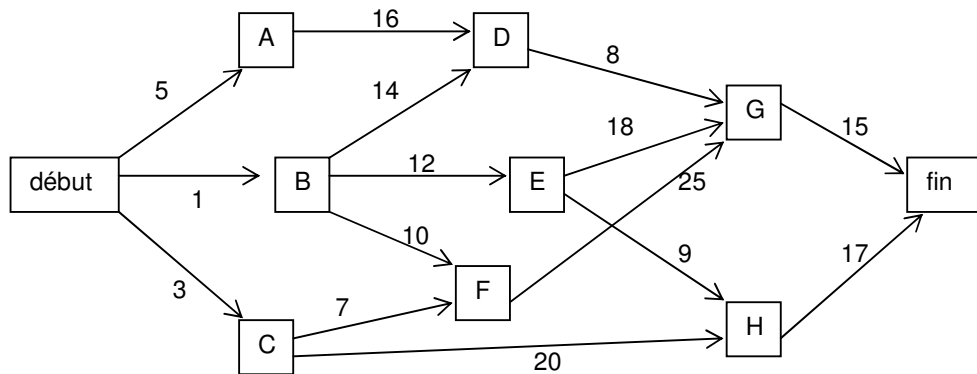
Certaines situations peuvent faire apparaître des contraintes plus sophistiquées que celles rencontrées précédemment. L'exercice résolu qui suit en est un exemple.

Exercice résolu

5.

Tâches	Contraintes à satisfaire avant le début de la tâche	Durée
A	5 jours écoulés depuis le démarrage du projet	16
B	1 jour écoulé depuis le démarrage du projet	14
C	3 jours écoulés depuis le démarrage du projet	20
D	Tâches A et B achevées	8
E	tâche B avancée aux 6/7	18
F	tâche B avancée aux 5/7 et tâche C avancée aux 7/20	25
G	Tâches D, E, F achevées	15
H	tâche C achevée et tâche E avancée aux 5/10	17

Le graphe-tâches permettant de modéliser ce problème est le suivant :



2.2. Valeur d'un chemin dans un graphe A.O.N.

C'est la somme des nombres associées aux arcs constituant le chemin envisagé. Pour l'exemple précédent, la valeur du chemin (début, A, D) est 21.

Remarquons que plusieurs chemins peuvent permettre d'arriver à un même sommet. Dans ce graphe, les chemins (début, A, D) et (début, B, D) arrivent à D. Ces chemins n'ont pas la même valeur, l'une est 21, l'autre est 15.

2.3. Date au plus tôt

Comme son nom l'indique, la date au plus tôt de la mise en exécution d'une tâche est le nombre minimum d'unités de temps, comptées depuis le début du projet, devant obligatoirement, d'après les contraintes, précéder la mise en exécution de la tâche.

Dans l'exemple ci-dessus (exercice résolu), la date au plus tôt de A est 5; celle de D est 21 et non 15 car après 15 jours, la tâche A, dont l'achèvement est nécessaire au démarrage de D, n'est pas encore réalisée.

Le laps de temps nécessaire à la réalisation de toutes les tâches devant précéder la tâche X s'obtient en considérant le chemin de valeur maximale arrivant à X. Nous définirons donc la date au plus tôt de X comme étant la plus grande des valeurs des chemins arrivant au sommet associé à X (on dit aussi valeur du "plus long chemin").

Le temps minimum pour la réalisation du projet est la date au plus tôt associée au sommet "fin".

2.4. Date au plus tard

La date au plus tard de la mise à exécution d'une tâche est la date limite à laquelle il faut commencer cette tâche pour pouvoir terminer le projet dans le temps minimum.

Dans l'exemple précédent, le sommet E est l'origine de 2 chemins (E, G, fin) et (E, H, fin) de valeurs respectives 33 et 26. La tâche E doit donc débuter au plus tard 33 jours avant la fin du projet; si par exemple elle commençait 26 jours avant la fin, la tâche H serait finie à temps, mais pas la tâche G. On constate donc qu'il faut une fois encore considérer des chemins de valeur maximale.

Si le projet nécessite un minimum de 51 jours (voir plus loin), la date au plus tard de début d'exécution de E sera de $51 - 33 = 18$. Il conviendra donc de démarrer la tâche E au plus tard 18 jours après le début du projet, si on veut que celui-ci soit achevé en 51 jours.

Le chemin de valeur maximale partant de E pour arriver à la fin est le même que celui qui part de la fin pour arriver à E dans le graphe inverse (où l'on a inversé le sens des flèches). Donc, si un algorithme existe pour trouver les dates au plus tôt, on pourra se servir du même algorithme pour trouver les dates au plus tard, en l'appliquant au graphe inverse.

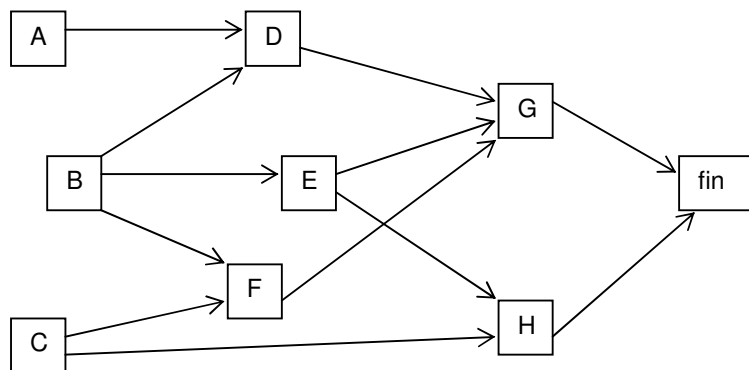
2.5. Mise en ordre des sommets

On a pu se rendre compte que, dans la recherche des dates au plus tôt et au plus tard, la chronologie des tâches doit apparaître clairement : une mise en ordre des sommets doit donc être faite. Cette mise en ordre est basée sur un partage des sommets en classes obtenu par l'algorithme décrit ci-après.

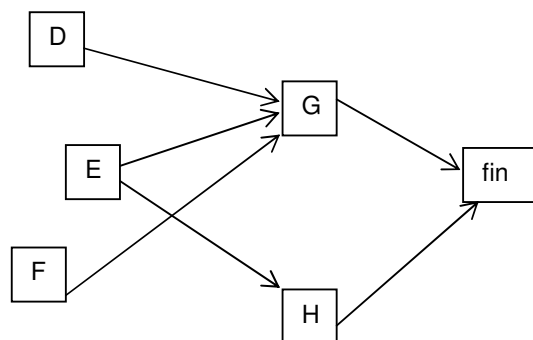
Soit $G(X,U)$ un graphe orienté sans circuit (c'est le cas des graphes associés aux applications d'ordonnement que nous étudions).

- On place dans la première classe les sommets de G sans prédécesseur.
- On considère le sous-graphe de G obtenu en retirant des sommets de G, les sommets de la première classe, et on place dans la deuxième classe les sommets sans prédécesseurs de ce nouveau graphe.
- On considère le sous-graphe de G obtenu en retirant des sommets du sous-graphe précédent, les sommets de la deuxième classe, et on place dans la troisième classe les sommets sans prédécesseurs de ce nouveau graphe.
- etc... jusqu'à ce qu'il ne reste plus de sommet.

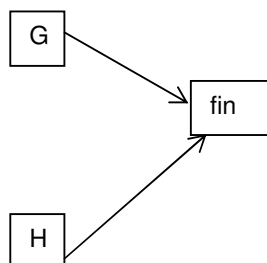
Pour notre exemple, la première classe est {début}. On considère ensuite le graphe



qui fournit la classe {A, B, C}, puis le graphe



qui fournit la classe {D, E, F}, puis le graphe



qui fournit la classe {G, H}, et enfin  qui fournit la classe {fin}.

On construit alors le tableau suivant :
(les éléments sont ordonnés dans le tableau de manière à respecter l'ordre des classes)

tâches	début	A	B	C	D	E	F	G	H	fin
prédécesseurs & val. arc	-	déb(5)	déb(1)	déb(3)	A(16) B(14)	B(12)	B(10) C(7)	D(8) E(18) F(25)	C(20) E(9)	G(15) H(17)
dates au plus tôt	0	5	1	3	21	13	11	36	23	51

Pour trouver la date au plus tôt d'un sommet, il y a autant de valeurs à comparer qu'il y a de prédécesseurs de ce sommet (chaque valeur correspondant au chemin de longueur maximal de "début" jusqu'au sommet en passant par le prédécesseur en question).

Ainsi, pour le sommet G,

- le chemin passant par D aura une valeur maximale $21 + 8$
- le chemin passant par E aura une valeur maximale $13 + 18$
- le chemin passant par F aura une valeur maximale $11 + 25$.

Le chemin de valeur maximale aboutissant à G sera celui qui passe par F : il aura donc pour valeur 36.

Voici un tableau donnant les chemins de valeur maximale pour le graphe inversé.

tâches	fin	H	G	F	E	D	C	B	A	début
val. max chemin	0	17	15	40	33	23	47	50	39	51

Pour obtenir les dates au plus tard des différentes tâches, il suffira de retirer de 51, date au plus tôt de la fin du projet, les valeurs obtenues dans le tableau ci-dessus. Finalement,

tâches	début	A	B	C	D	E	F	G	H	fin
dates au plus tôt	0	5	1	3	21	13	11	36	23	51
dates au plus tard	0	12	1	4	28	18	11	36	34	51

2.6. Intervalle de flottement

L'intervalle de flottement d'une tâche est la différence entre sa date au plus tôt et sa date au plus tard. Elle représente la latitude qui est laissée pour démarrer cette tâche après sa date au plus tôt et sans retarder la date au plus tôt de la fin du projet.

Remarquons que retarder la date de démarrage d'une tâche (en profitant de la liberté laissée par l'intervalle de flottement) n'influence pas le temps minimum de réalisation du projet, mais peut raccourcir les intervalles de flottement des tâches suivantes.

2.7. Tâches et chemin critiques

Une tâche est dite critique lorsque ses dates au plus tôt et au plus tard coïncident. Un chemin critique est un chemin allant de la tâche début à la tâche fin en passant par des tâches critiques. Il peut parfois y avoir plusieurs chemins critiques.

Les tâches critiques sont celles dont le démarrage ne peut absolument pas être retardé, sous peine de voir augmenter la durée minimale de réalisation du projet.

Dans l'exemple ci-dessus, on peut voir que les tâches début, B, F, G et fin sont des tâches critiques (et constituent d'ailleurs le seul chemin critique du problème).

2.8. Marge libre

La marge libre d'une tâche est le temps dont on dispose après la date au plus tôt de la tâche, pour démarrer cette tâche sans modifier les dates au plus tôt des tâches suivantes, c'est-à-dire sans modifier leurs intervalles de flottement.

Considérons par exemple la tâche E de l'exercice résolu.

Ses successeurs sont G et H, dont les dates au plus tôt respectives sont 36 et 23. E doit précéder G de 18 jours, et H de 9 jours. Pour que les intervalles de flottement des successeurs de E (c'est-à-dire G et H) ne varient pas, il faut que les dates au plus tôt de G et H restent inchangées.

Soit d_E , la date de début de E. Ce qui précède implique que

$$\begin{cases} d_E + 18 \leq 36 \\ d_E + 9 \leq 23 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} d_E \leq 36 - 18 \\ d_E \leq 23 - 9 \end{cases}$$

et finalement

$$d_E \leq 14.$$

Donc en commençant E 14 jours après le début du projet, les dates au plus tôt des tâches G et H resteront inchangées : 36 et 23.

La date au plus tôt de E étant 13, la marge libre de E sera de $14 - 13 = 1$.

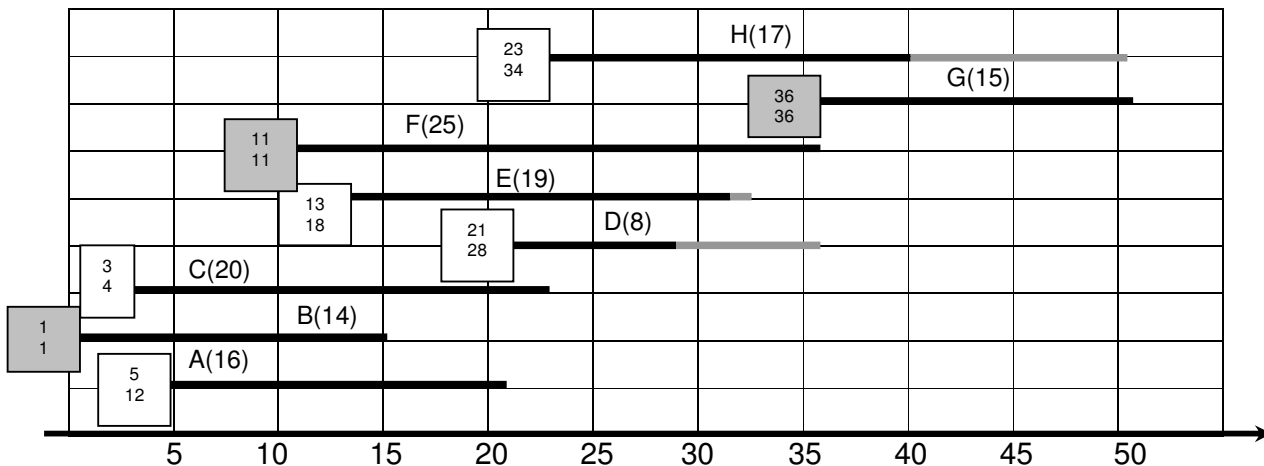
Pour les autres tâches du projet :

tâches	début	A	B	C	D	E	F	G	H	fin
marges libres	0	0	0	0	7	1	0	0	11	0

2.9. Diagramme de Gantt

C'est un diagramme formé de barres horizontales servant à représenter les tâches. L'abscisse du début de la barre (extrémité gauche) est la date au plus tôt de la tâche. La longueur de la barre traduit la durée de la tâche.

Pour notre exemple :



Les barres horizontales sont surmontées du nom de la tâche, accompagné de la durée de celle-ci, indiquée entre parenthèses. Les encadrés précédant les barres reprennent les dates au plus tôt et au plus tard des tâches correspondantes. Ceux qui concernent les tâches critiques sont ombrés.

Les marges libres sont représentées par des barres grises accolées à l'extrémité droite de la tâche correspondante.

Exercices

6. Soit un projet comportant les tâches A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N. La mise en exécution de la tâche A coïncide avec le début de la réalisation du projet. Le projet est terminé lorsque les tâches L, M et N le sont. Pour des raisons de calendrier, la mise à exécution de la tâche B ne peut commencer que 5 jours après le démarrage du projet. Les autres contraintes sont reprises dans le tableau suivant (les durées des tâches sont exprimées en nombre de jours) :

Tâches	Durées	Successeurs	Tâches	Durées	Successeurs
A	20	C	H	15	K
B	10	D	I	4	L
C	5	E	J	3	M
D	7	E, F	K	5	M, N, L
E	30	G, H, I	L	10	-
F	3	I	M	20	-
G	8	J, K	N	12	-

Modélisez au moyen d'un graphe A.O.N. Déterminez les dates au plus tôt, au plus tard, intervalles de flottement et marges libres de chacune des tâches.

7. Soit un projet comportant les tâches A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L. La mise en exécution des tâches A et B coïncide avec le début de la réalisation du projet. Le projet est terminé lorsque les tâches L, K et J le sont. Les autres contraintes sont reprises dans le tableau suivant :

Tâches	Durées	Successeurs	Tâches	Durées	Successeurs
A	4	C, D, E	G	2	K
B	5	D, E	H	3	K
C	4	F, G	I	1	L
D	2	F, G	J	1	-
E	2	J, H, I	K	6	-
F	3	J	L	4	-

Modélisez au moyen d'un graphe A.O.N. Déterminez les dates au plus tôt, au plus tard, intervalles de flottement et marges libres de chacune des tâches.

8. (Juin 2003) Vous projetez d'organiser un voyage pour un groupe d'étudiants souhaitant marquer le coup pour la fin de leurs années de bachelier. Il y a beaucoup de choses à penser : choix de la destination, itinéraire, moyen de transport, réservations diverses, paiement d'un acompte, envoi des documents, ... Vous souhaiteriez que ce projet soit bouclé le plus rapidement possible et, pour estimer ce délai optimal, vous faites appel à vos connaissances en recherche opérationnelle. Les tâches à réaliser sont notées A, D, G, J, M, P, S, V. Les contraintes de calendrier sont reprises dans le tableau suivant :

Tâche	Contraintes à satisfaire avant le début de la tâche	Durée
J	-	2
V	2 jours après le début du projet	6
A	V achevée	10
P	J achevée, A avancée de moitié	3
S	A achevée	7
D	V aux 2/3 de son avancement	5
G	D et S achevées	1
M	A avancée aux 4/5	8

9. (Juin 2006) Paul est responsable d'une chaîne de montage d'une machine mécanique destinée à l'industrie textile. Ce montage résulte de la coordination de toute une série d'opérations. Les contraintes liées à l'ordre de succession des opérations, ainsi que leur durée, sont reprises dans le tableau suivant.

Opération	Durée (en ')	Contraintes
O	7	commencer au + tôt 1' après le début du montage
B	12	opération O achevée
F	10	opération B achevée
V	10	2' après le démarrage de B
M	13	11' après le début du montage
U	4	1' après le début de F, opération V avancée de moitié
A	8	opération V achevée
E	1	opérations M et U terminées
R	3	opérations E et A achevées

Un jour, le patron de Paul l'appelle dans son bureau : il est insatisfait du nombre maximum de machines montées par journée de 8h de travail, à savoir 15. Paul est perplexe : compte tenu des contraintes de montage et des durées des opérations, il est persuadé que son équipe ne peut pas faire mieux lorsqu'aucun problème ne surgit.

Paul vient trouver son délégué syndical : toi. ☺ A l'aide de tes connaissances en théorie des graphes, tu vas pouvoir aider Paul à se justifier devant son patron.

- Est-il possible pour Paul et son équipe de monter plus de 15 machines par jour ? Justifie ta réponse, en détaillant toutes les étapes de ton raisonnement.
- Quelles sont les opérations dans la réalisation desquelles un retard éventuel affectera immédiatement la durée minimale de montage d'une machine ? Justifie ta réponse.

2. Programmation linéaire : Modélisation

Exercice 1 - Bureaux

Une fabrique de meubles métalliques produit deux types de bureaux, luxe et standard, qui ne diffèrent que par le nombre de tiroirs et la finition. On désire établir un plan de fabrication de ces bureaux pour une période déterminée. Les marges bénéficiaires unitaires doivent être respectivement de 25 € et 20 €.

L'usine dispose de 250 structures qui peuvent servir indifféremment pour les versions luxe et standard. Le stock de glissières, pour les tiroirs, est de 800 paires. Le bureau luxe compte 4 tiroirs, la version standard n'en compte que 2.

Pour la période considérée, 840 heures de main d'œuvre sont disponibles pour ce travail. Le montage et la finition d'un bureau luxe nécessitent 4 heures, alors qu'il n'en faut que 3 pour l'autre version.

Pour des raisons de prestige, le service commercial désire que le nombre de bureaux de luxe mis sur le marché ne soit pas strictement inférieur au tiers du nombre de bureaux ordinaires proposés à la clientèle durant cette période.

Exercice 2 – Papier

L'entreprise Mâcher occupe trois ouvriers à raison de 40 heures semaine chacun. Elle fabrique trois types de papier A, B, C. Pour des raisons d'approvisionnement en matières premières, la production totale hebdomadaire de cette entreprise est limitée à 500 tonnes. Les rendements horaires pour la fabrication des papiers A, B, C sont respectivement de 5 tonnes, 2.5 tonnes et 3 tonnes. Les bénéfices sont respectivement de 20, 50 et 40 € par tonne.

L'expérience a montré que si la production était limitée respectivement à 300 tonnes, 100 tonnes et 150 tonnes par semaine, elle était entièrement absorbée par le marché. On veut déterminer les quantités hebdomadaires à produire pour que le bénéfice soit maximum et toute la production vendue.

Exercice 3 – Livres

Un éditeur dispose de 2 dépôts, D_1 et D_2 , possédant respectivement 5 et 4 exemplaires d'un livre. Trois libraires, L_1 , L_2 et L_3 , lui demandent respectivement 2, 3 et 4 exemplaires de ce livre. Il a un contrat avec une firme de transport : quel que soit le nombre d'ouvrages livrés, les coûts unitaires, exprimés en francs, de transport des dépôts vers les librairies sont les quantités indiquées dans le tableau ci-dessous.

de ↓ vers →	L_1	L_2	L_3
D_1	2	5	2
D_2	7	3	6

Déterminer le plan de transport de coût minimum pour que les trois libraires soient satisfaits.

Exercice 4 – Pollution

Les services écologiques d'une zone industrielle sont chargés du maintien des normes de concentration en produits toxiques des eaux d'un lac où trois entreprises déversent des sels de plomb, de mercure et de manganèse. Pour ce faire, ils disposent de deux types d'agents chimiques, eux-mêmes non polluants, l'un à base de nitrates, l'autre à base de sulfates, qui transforment les sels en précipités inoffensifs. Il s'agit d'aider ces services en leur fournissant les quantités de nitrates et de sulfates à déverser dans les eaux du lac, pour que les normes écologiques soient respectées, et ce, au prix le plus bas. On dispose des données suivantes :

Quantités de déchets déversés :

	volumes déversés (litres)	concentrations en Pb (g/l)	concentrations en Hg (g/l)	concentrations en Mn (g/l)
usine n°1	1 000 000	0,0025	0,0005	0,0007
usine n°2	3 000 000	0,0003	0,0005	0,003
usine n°3	1 200 000	0,00125	0,001	0,0005

Capacité de neutralisation par baril déversé :

	sels de Pb (kg)	sels de Hg (kg)	sels de Mn (kg)
sulfates	2	1	12
nitrates	4	6	4

Tolérance écologique : la législation admet qu'après action antipollution, il subsiste dans les eaux du lac une quantité maximum de 0,9 kg de sels de Pb, 0,2kg de sels de Hg et 1,3 kg de sels de Mn.

Coût des agents anti-polluants : par baril, les sulfates et les nitrates coûtent chacun 25 €.

Exercice 5 – Tôle

Une usine sidérurgique dispose de trois chaînes de laminoirs A, B et C, et se propose de fabriquer de la manière la plus rentable quatre catégories de tôles ayant respectivement les épaisseurs suivantes : 0.5, 0.8, 1.4 et 2.2 mm. Les coûts de production à la tonne de chacune des tôles, par chacune des chaînes, sont données dans le tableau suivant :

	0.5 mm	0.8 mm	1.4 mm	2.2 mm
A	330 €	360 €	240 €	250 €
B	600 €	540 €	480 €	450 €
C	800 €	700 €	620 €	500 €

Les débits en tonnes par heure sont donnés par le tableau :

	0.5 mm	0.8 mm	1.4 mm	2.2 mm
A	20	40	40	38
B	7	9	12	12
C	8	9	12	15

Les nombres d'heures disponibles, pour le planning considéré, sont respectivement pour les chaînes A, B, C de 200, 600 et 400. D'autre part, les demandes à satisfaire durant la période envisagée sont de 5000 tonnes de 0.5 mm, 5100 tonnes de 0.8 mm, 3000 tonnes de 1.4 mm et 500 tonnes de 2.2 mm. On supposera qu'en début de période, les stocks de tôles sont nuls et qu'en fin de période, toutes les demandes seront satisfaites. Il s'agit d'organiser la production en rendant minimum le prix de production.

Exercice 6 – Péage

Une étude sur le trafic autoroutier français a amené le conseil d'administration de la société exploitante à prendre les décisions suivantes en vue de gérer les péages à l'entrée d'un nouveau tronçon qui sera bientôt ouvert à la circulation.

- Une journée sera décomposée en 6 phases de 4 heures, les besoins en guichets au cours de ces phases étant reprises ci-dessous :
 - au moins 3 guichets ouverts de 22h à 02h
 - au moins 2 guichets ouverts de 02h à 06h
 - au moins 4 guichets ouverts de 06h à 10h
 - au moins 5 guichets ouverts de 10h à 14h
 - au moins 4 guichets ouverts de 14h à 18h
 - au moins 3 guichets ouverts de 18h à 22h.
- Une campagne d'embauche sera lancée. Les nouveaux agents se verront proposer un contrat au titre duquel ils travailleront 8 heures consécutives par jour. Ils seront répartis dans 6 brigades. A chaque début de phase reprise ci-dessus correspondra une brigade : la première brigade travaillera de 22h à 06h, la deuxième de 02h à 10h, etc...
- La rémunération journalière d'un agent sera indépendante de l'heure à laquelle commence sa prestation.

Le problème consiste à déterminer l'effectif de chacune des brigades, et ce, au moindre coût. Modéliser. Que devient le modèle si l'on décide de payer les heures de nuit (22h – 06h) 50% plus chères que les heures de jour (06h-22h) ?

Exercice 7 – Crèches

Une ville de 15000 habitants possède trois crèches dont les capacités d'accueil, exprimées en nombres d'enfants, sont respectivement de 100, 60 et 100. Le CPAS cherche à répartir au mieux les enfants dans les trois crèches. Pour cela, on divise la ville en sept zones, les trois crèches étant respectivement dans les zones 1, 2 et 3. Les temps moyens de déplacement, exprimés en minutes, pour passer de la zone i à la crèche de la zone j, sont repris dans le tableau suivant :

	crèche de la zone 1	crèche de la zone 2	crèche de la zone 3
zone 1	5	25	35
zone 2	25	5	10
zone 3	35	10	5
zone 4	25	10	10
zone 5	15	18	18

zone 6	25	20	18
zone 7	10	25	18

Les demandes d'inscription par zone sont reprises dans le tableau suivant :

zone 1	zone 2	zone 3	zone 4	zone 5	zone 6	zone 7
20	50	30	40	45	25	40

Les parents estiment qu'un temps de trajet (de leur domicile à la crèche) strictement supérieur à un quart d'heure est inacceptable.

Il n'est pas certain que, sous cette dernière condition, toutes les demandes puissent être satisfaites : on cherchera alors à inscrire un maximum d'enfants. Modéliser ce problème.

Que devient cette modélisation si le CPAS décide de ne pas tenir compte de cette dernière contrainte ? Dans ce cas, on s'arrangera pour minimiser la somme des temps de trajet supérieurs à un quart d'heure.

Exercice 8 – Gestion de stocks

Une entreprise doit produire 8000 pièces en quatre mois et les fournir à un même client selon les modalités suivantes :

- à la fin du premier mois : 1500 pièces
- à la fin du deuxième mois : 1500 pièces
- à la fin du troisième mois : 2000 pièces
- à la fin du quatrième mois : 3000 pièces.

Cette entreprise peut produire mensuellement un maximum de 1700 pièces, en régime de travail ordinaire. Mais, si nécessaire, 500 autres pièces peuvent être réalisées, en faisant appel à des heures supplémentaires. Le coût de revient d'une pièce est de 5 € si elle est produite durant les heures régulières, et de 7 € si elle est produite hors horaire normal. Une pièce qui doit être stockée entraîne un coût de stockage de 1,2 € par mois, les stocks étant établis en début de mois.

Organiser la production de l'entreprise pour que la livraison soit faite dans les délais, au moindre coût de production et de stockage.

Exercice 9 – Mélange de pétroles

Une raffinerie désire mélanger quatre dérivés pétroliers (numérotés 1, 2, 3, 4) pour obtenir trois variétés de produits finis : A, B, C.

La disponibilité et les coûts des constituants sont repris dans le tableau suivant :

Numéro du constituant	Quantité maximum disponible par jour (en baril)	Prix par baril (en \$)
1	3000	3
2	2000	6
3	4000	4
4	1000	5

Les appellations A, B, C sont soumises à des normes sur la teneur en leurs différents constituants. On trouvera ces normes dans le tableau ci-après, où figurent également les prix de vente, en \$, des produits A, B, C.

Produit fini	Normes	Prix de vente au baril (en \$)
A	pas plus de 30% de 1 pas moins de 40% de 2 pas plus de 50% de 3	5,5
B	pas plus de 50% de 1 pas plus de 10% de 2	4,5
C	pas plus de 70% de 1	3,5

Modéliser le problème consistant à déterminer les mélanges qui rendent maximal le bénéfice de la raffinerie, sachant qu'elle est certaine d'écouler l'entièreté de sa production.

Exercice 10 – Hôtesses (avertissement : c'est un problème difficile !)

Une compagnie d'aviation doit régler le problème de recrutement des hôtesses pour le second semestre de cette année. Ses besoins mensuels en nombre d'heures sont repris dans le tableau suivant :

juillet	août	septembre	octobre	novembre	décembre	janvier
8500	9000	10100	11700	11600	12100	14000

Il faut savoir qu'une hôtesse doit subir un mois de formation avant de pouvoir être placée sur un vol de la compagnie et qu'un maximum de 20 hôtesses peuvent être formées en un mois. De plus, les lois sur la durée du temps de travail limite celui-ci à 80 heures par mois. Le coût de la formation d'une hôtesse est de 3500 € et son salaire mensuel est fixé à 6500 €, aussi bien durant son mois de formation que durant ses prestations de travail en vol ou au sol.

De plus, on estime que, chaque mois, 10% des hôtesses quittent la compagnie. Modéliser ce problème de recrutement, de façon à minimiser les dépenses de formations et de salaires, sachant que, pour le mois de juillet, la compagnie dispose de 150 hôtesses déjà formées.

Exercice 11 – Limonades

Un artisan limonadier décide de fabriquer et de commercialiser des cocktails de fruits frais : Trio, constitué de jus d'orange, de pêche et d'ananas, dans les proportions respectives de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$, et Duo, constitué de jus d'orange et de pêche, dans les proportions $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$. Un contrat est signé avec un fournisseur, où il s'engage à acheter une quantité de fruits frais lui permettant de produire, par semaine, 2000 litres de jus d'orange, 500 litres de jus de pêche et 200 litres de jus d'ananas . Les prix d'achat respectifs sont de 0.5 €, 1 € et 2.5 € le litre.

Les fruits seront livrés le lundi matin. Pour garantir la qualité des produits, le limonadier est décidé à détruire tout fruit n'ayant pas été pressé endéans la semaine.

La location hebdomadaire du matériel nécessaire à cette fabrication lui revient à 125 €. L'emballage d'un litre de Trio revient à 0.12 €, celui d'un litre de Duo, à 0.09 €. En fonction de la concurrence, il fixe les prix de vente à 2.4 € le litre (Trio) et 2.1 € le litre (Duo).

Une étude de marché préalable lui permet d'estimer que la demande en Duo sera supérieure au tiers de la demande en Trio.

Modéliser ce problème afin d'aider le limonadier à optimiser ses bénéfices.

Exercice 12 – Vins

Un vigneron du Languedoc dispose d'un marché illimité. Il commercialise deux types de vin sous les appellations « Rouge Feuille » et « Dernière Cueillette », aux prix respectifs de 6 et 4.5 € la bouteille de 75 cl. Ces deux produits sont issus du mélange des jus de trois types de cépage : merlot, grenache et syrah. Les prix de revient, au litre, de chacun de ces jus sont respectivement de 0.75, 0.6 et 0.9 €. Il dispose de 2000 litres de jus de merlot, 2500 litres de jus de grenache et 1200 litres de jus de syrah. Dans le « Rouge Feuille », il n'y a pas moins de 60% de merlot et pas plus de 20% de grenache ; dans le « Dernière Cueillette », pas moins de 15% de merlot et pas plus de 60% de grenache.

Le vigneron cherche les proportions qui rendent son bénéfice maximum.

Exercice 13 – Baba Cool

Dans les années 60, Baba Cool, un sympathique hippie, décide de partir avec sa communauté vers Katmandou. Pour payer son voyage, il fabrique et vend des colliers et des bracelets de perles. Pour réaliser 5 colliers, il lui faut une heure. La confection d'un bracelet lui prend la moitié du temps nécessaire à la réalisation d'un collier.

Son amie, Cindy, sait lui procurer un maximum de 1000 perles par jour, qu'il utilise à raison de 25 perles par bracelet, et 75 perles par collier.

Fidèle à sa vision du monde et du travail, il ne souhaite pas passer plus de 2 heures par jour à la fabrication des bijoux, et veut absolument écouler sa production quotidienne, objectif qui sera atteint s'il ne produit pas plus de 8 colliers et 16 bracelets par jour.

Un collier lui rapporte 10 €, un bracelet 5 €.

Modélisez ce problème afin d'aider Baba à réaliser un bénéfice maximum.

Exercice 14 – Le retour de Baba Cool

Revenu de Katmandou où il a fait la connaissance de Dolly, une ravissante anglaise, Baba Cool se laisse convaincre par cette dernière des bienfaits de la vie au grand air et des joies de l'élevage.

Suite à un héritage providentiel, il prend donc la décision d'acheter une ferme de 15 hectares, à l'abandon, pour se livrer à la production de produits laitiers. Vient le moment d'acheter le bétail pour lequel il dispose de 12 500 €. Une vache laitière coûte 500 €, alors qu'une brebis en coûte 50. Dolly veut absolument un nombre de brebis au moins 10 fois supérieur au nombre de vaches. Cindy, qui est restée la copine de Baba, veut au moins deux vaches.

Selon les statistiques de l'union agricole de l'endroit, un hectare de prairie permet de nourrir, annuellement, un maximum de 5 vaches ou un maximum de 25 brebis, et une vache rapporte en moyenne 2000 € par an, alors qu'une brebis en rapporte 150.

Aidez notre ami Baba dans l'achat de son bétail afin qu'il réalise un bénéfice annuel maximum et que ses deux copines soient contentées.

Exercice 15 – P.C.

Une firme spécialisée dans la vente de produits informatiques dispose d'un stock de cinq P.C., différents par les composants, qui peuvent être modifiés selon les désirs des clients (disque dur plus performant, ajout de mémoire, graveur DVD, etc..). Durant la période de gestion envisagée, huit P.C. lui sont commandés, dont deux (il s'agit des commandes 1 et 2) par un même client. La firme ne peut évidemment satisfaire les sept clients. Elle décide d'honorer les commandes qui lui permettront de réaliser, pour la période envisagée, la plus grosse rentrée d'argent (à long terme, ce n'est peut-être pas la meilleure solution, mais elle doit faire face dans l'immédiat à une sérieuse facture fiscale). Notons que le client ayant passé deux commandes verra soit ses deux commandes satisfaites, soit aucune des deux.

Les coûts d'aménagement, en centaines d'euros, des différents P.C. selon les huit commandes sont repris dans le tableau suivant :

PC\commande	1	2	3	4	5	6	7	8
PC 1	12	2	10	15	20	25	20	15
PC 2	25	30	45	10	30	15	50	35
PC 3	10	5	50	50	20	60	10	5
PC 4	10	5	60	60	60	70	10	10
PC 5	50	20	10	10	5	25	10	10

Les prix de vente annoncés pour les P.C. équipés selon les spécifications des commandes 1, 2, ..., 8 sont donnés, en centaines d'euros, par le tableau suivant :

cmde 1	cmde 2	cmde 3	cmde 4	cmde 5	cmde 6	cmde 7	cmde 8
50	75	40	80	150	100	50	70

Modéliser le problème pour aider la firme à choisir les clients à satisfaire et les P.C. correspondants, tout en assurant le plus grand bénéfice.

----- Iteration 3 -----							
		X1	X2	S1	S2	S3	
Basis	c(j)	2	1	0	0	0	RHS
S1	0	0	0	1	1	-2	1
X1	2	1	0	0	0	1	2
X2	1	0	1	0	-1	1	1
c(j)-Z(j)		0	0	0	1	-3	5
* Big M		0	0	0	0	0	0
Current OBJ (Max.) = 5 IN: S2 OUT: S1							
< Next > < Skip > < PgLt > < PgRt > < HardCopy > < Cancel >							

----- Final Tableau (Total Iterations = 3) -----							
		X1	X2	S1	S2	S3	
Basis	c(j)	2	1	0	0	0	RHS
S2	0	0	0	1	1	-2	1
X1	2	1	0	0	0	1	2
X2	1	0	1	1	0	-1	2
c(j)-Z(j)		0	0	-1	0	-1	6
* Big M		0	0	0	0	0	0
(Max.) Optimal OBJ value = 6							
< Next > < Skip > < PgLt > < PgRt > < HardCopy > < Cancel >							

Exercice 2

$$\text{Max } x_1 + 2x_2 \text{ sous } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

----- Iteration 1 -----									
		X1	X2	S1	S2	A2			
Basis	c(j)	1	2	0	0	-M	RHS	Ratio	
S1	0	1	1	1	0	0	3	3	
A2	-M	-1	1	0	-1	1	1	1	
c(j)-Z(j)		1	2	0	0	0	0		
* Big M		-1	1	0	-1	0	-1		
Current OBJ (Max.) = 0 + (-1 M) IN: X2 OUT: A2									

iteration 2...

iteration 3...

----- Final Tableau (Total Iterations = 3) -----									
		X1	X2	S1	S2	A2			
Basis	c(j)	1	2	0	0	-M	RHS	Ratio	
S2	0	2	0	1	1	-1	2		
X2	2	1	1	1	0	0	3		
c(j)-Z(j)		-1	0	-2	0	0	6		
* Big M		0	0	0	0	-1	0		
(Max.) Optimal OBJ value = 6									

Exercice 3

Voici un tableau simplexe figurant dans la résolution d'un problème de programmation linéaire. A quel problème correspond-il ?

		X ₁	X ₂	X ₃	S ₁	A ₁	S ₂	A ₂		
Basis	C(j)	3	5	4	0	-M	0	-M	RHS	Ratio
A₁	-M	-1	0	2	-1	1	0	0	2	M
A₂	-M	-5	1	-2	0	0	-1	1	3	3
c(j)-Z(j)		3	5	4	0	0	0	0	0	
BigM		-6	1	0	-1	0	-1	0	-5	

Exercice 4 : Dédurre du tableau précédent la variable à entrer, la variable à sortir, la valeur de la fonction à optimiser.

Exercice 5

La lecture du tableau suivant vous incite-t-elle à penser que le problème est résolu ? Si oui, pourquoi, sinon, quelle serait la prochaine étape ?

		X ₁	X ₂	X ₃	S ₁	A ₁	S ₂	A ₂		
Basis	C(j)	3	5	4	0	-M	0	-M	RHS	Ratio
A₁	-M	-1	0	2	-1	1	0	0	2	
X₂	5	-5	1	-2	0	0	-1	1	3	
c(j)-Z(j)		28	0	14	0	0	5	-5	15	
BigM		-1	0	2	-1	0	0	-1	-2	

Exercice 6

Max $3x_1 + 2x_2$ sous $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

```

----- Iteration 1 -----
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|      |      | X1  | X2  | S1  | S2  | A2  |      |      |      |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| Basis | c(j) |    3 |    2 |    0 |    0 | -M | RHS | Ratio |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| S1    | 0    |    1 |    1 |    1 |    0 | 0  | 1   | 1     |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| A2    | -M   |    2 |    2 |    0 |   -1 | 1  | 4   | 2     |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| c(j)-Z(j) |    3 |    2 |    0 |    0 | 0  | 0  | 0   |      |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| * Big M |    2 |    2 |    0 |   -1 | 0  | -4 |     |      |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| Current OBJ (Max.) = 0 + (-4 M)  IN: X1 OUT: S1
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

```

```

----- Final Tableau (Total Iterations = 1) -----
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|      |      | X1  | X2  | S1  | S2  | A2  |      |      |      |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| Basis | c(j) |    3 |    2 |    0 |    0 | -M | RHS | Ratio |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| X1    | 3    |    1 |    1 |    1 |    0 | 0  | 1   |      |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| A2    | -M   |    0 |    0 |   -2 |   -1 | 1  | 2   |      |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| c(j)-Z(j) |    0 |   -1 |   -3 |    0 | 0  | 3  |     |      |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| * Big M |    0 |    0 |   -2 |   -1 | 0  | -2 |     |      |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| No feasible solution
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

```

Exercice 7

Maximiser $x_1 + x_2$ sous les contraintes $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \end{cases}$

```

----- Iteration 1 -----
|-----|
|      |      | X1 | X2 | S1 | S2 | S3 |      |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| Basis | c(j) |    |    |    |    |    | RHS |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
|  S1   |  0   |  1 |  3 |  1 |  0 |  0 |  12 |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
|  S2   |  0   |  1 |  1 |  0 |  1 |  0 |   6 |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
|  S3   |  0   |  2 |  1 |  0 |  0 |  1 |  10 |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| c(j)-Z(j) |    |  1 |  1 |  0 |  0 |  0 |   0 |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| * Big M |    |  0 |  0 |  0 |  0 |  0 |   0 |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
|                                     Current OBJ (Max.) = 0  IN: X1 OUT: S3
|-----|

```

```

----- Iteration 2 -----
|-----|
|      |      | X1 | X2 | S1 | S2 | S3 |      |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| Basis | c(j) |    |    |    |    |    | RHS |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
|  S1   |  0   |  0 | 2.5|  1 |  0 | -.5|   7 |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
|  S2   |  0   |  0 |  .5|  0 |  1 | -.5|   1 |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
|  X1   |  1   |  1 |  .5|  0 |  0 |  .5|   5 |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| c(j)-Z(j) |    |  0 |  .5|  0 |  0 | -.5|   5 |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| * Big M |    |  0 |  0 |  0 |  0 |  0 |   0 |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
|                                     Current OBJ (Max.) = 5  IN: X2 OUT: S2
|-----|

```

```

----- Final Tableau (Total Iterations = 2) -----
|-----|
|      |      | X1 | X2 | S1 | S2 | S3 |      |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| Basis | c(j) |    |    |    |    |    | RHS |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
|  S1   |  0   |  0 |  0 |  1 | -5 |  2 |   2 |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
|  X2   |  1   |  0 |  1 |  0 |  2 | -1 |   2 |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
|  X1   |  1   |  1 |  0 |  0 | -1 |  1 |   4 |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| c(j)-Z(j) |    |  0 |  0 |  0 | -1 |  0 |   6 |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
| * Big M |    |  0 |  0 |  0 |  0 |  0 |   0 |
|-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
|                                     (Max.) Optimal OBJ value = 6
|-----|

```

Exercice 8

La lecture du tableau suivant vous incite-t-elle à penser que le problème est résolu ? Si oui, pourquoi, sinon, quelle serait la prochaine étape ?

		X ₁	X ₂	X ₃	S ₁	A ₁	S ₂	A ₂		
Basis	C(j)	3	5	4	0	-M	0	-M	RHS	Ratio
X ₃	4	-0.5	0	1	-0.5	0.5	0	0	1	
X ₂	5	-6	1	0	-1	1	-1	1	5	
c(j)-Z(j)		35	0	0	7	-7	5	-5	29	
BigM		0	0	0	0	-1	0	-1	0	

Exercice 9

Dans un problème de maximisation, que pouvez-vous déduire d'un tableau où tous les éléments (dans les lignes correspondant aux contraintes) de la colonne relative à la variable à entrer sont strictement négatifs ? Pourquoi ?

Exercice 10

$$\text{Min } 2x_1 + x_2 - x_3 \text{ sous } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

```

----- Iteration 1 -----
|-----|
|      |      | x1 | x2 | x3 | s1 | A1 | S2 |      |      |
|-----|
| Basis | c(j) | 2 | 1 | -1 | 0 | M | 0 | RHS | Ratio |
|-----|
| A1    | M    | 2 | -1| 1 | -1| 1 | 0 | 2 | 1     |
|-----|
| S2    | 0    | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1     |
|-----|
| c(j)-Z(j) |      | 2 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |      |
|-----|
| * Big M |      | -2| 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 2 |      |
|-----|
| Current OBJ (Min.) = 0 + (2 M) IN: X1 OUT: A1
|-----|

```

----- Iteration 2 -----										
		X1	X2	X3	S1	A1	S2			
Basis	c(j)	2	1	-1	0	M	0	RHS	Ratio	
X1	2	1	-.5	.5	-.5	.5	0	1	2	
S2	0	0	1.5	-1.5	.5	-.5	1	0	/	
c(j)-Z(j)		0	2	-2	1	-1	0	2		
* Big M		0	0	0	0	1	0	0		
Current OBJ (Min.) = 2 IN: X3 OUT: X1										

----- Final Tableau (Total Iterations = 2) -----										
		X1	X2	X3	S1	A1	S2			
Basis	c(j)	2	1	-1	0	M	0	RHS	Ratio	
X3	-1	2	-1	1	-1	1	0	2		
S2	0	3	0	0	-1	1	1	3		
c(j)-Z(j)		4	0	0	-1	1	0	-2		
* Big M		0	0	0	0	1	0	0		
Unbounded solution.										

4. Programmation linéaire : Analyse de sensibilité

◆ Problème 1

Considérons le problème suivant :

« Un marchand vend deux mélanges d'aliments pour volaille, M1 et M2, composés à partir des ingrédients A, B et C dans les proportions suivantes :

- le mélange M1 contient 50% de A, 20% de B et 30% de C ;
- le mélange M2 contient 50% de A, 40% de B et 10% de C.

Le marchand a en stock 500 kg de A, 320 kg de B et 240 kg de C.

Les marges bénéficiaires par kg pour les produits M1 et M2 sont respectivement de 30 cents et 20 cents.

En supposant qu'il est certain d'écouler toute sa production, quelles quantités d'aliments M1 et M2 doit-il préparer s'il veut maximiser son profit ? »

Modélisation :

- variables de décision :

x_1 : quantité (en kg) de mélange M1 à produire

x_2 : quantité (en kg) de mélange M2 à produire

- programme linéaire :

Maximiser $30 x_1 + 20 x_2$

$$\text{sous } \begin{cases} 0.5 x_1 + 0.5 x_2 + s_1 = 500 \\ 0.2 x_1 + 0.4 x_2 + s_2 = 320 \\ 0.3 x_1 + 0.1 x_2 + s_3 = 240 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

Remarquons que s_1 représente la quantité d'ingrédient A non utilisée,
 s_2 représente la quantité d'ingrédient B non utilisée,
 s_3 représente la quantité d'ingrédient C non utilisée.

Le tableau initial sera

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
		30	20	0	0	0	RHS	Ratio
s_1	0	0.5	0.5	1	0	0	500	
s_2	0	0.2	0.4	0	1	0	320	
s_3	0	0.3	0.1	0	0	1	240	
		30	20	0	0	0	0	

et le tableau final sera (après 2 tableaux intermédiaires) :

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
		30	20	0	0	0	RHS	Ratio
x_2	20	0	1	3	0	-5	300	
s_2	0	0	0	-1	1	1	60	
x_1	30	1	0	-1	0	5	700	
		0	0	-30	0	-50	27000	

On constate que :

- le profit maximal (270 €) est atteint lorsqu'on compose 700 kg de M1 et 300 kg de M2 ;
- on utilise tout le stock d'ingrédients A et C ($s_1 = s_3 = 0$, contraintes saturées) ;
- il reste alors 60 kg de B non utilisés ($s_2 = 60$).

A l'optimum, augmenter le seul stock d'ingrédient B laisserait donc inchangé le profit du négociant s'il souhaite écouler tout le stock de A et de C (ce qui revient à « rester dans la même base »).

On dira que la *valeur marginale de B est nulle à l'optimum*.

Et si le stock de A était plus important ?

Nous constatons (voir tableau final) que si on donne à s_1 la valeur 1, en laissant s_3 à 0, le profit diminue de 30 cents.

La linéarité des équations nous autorise à penser que donner à s_1 la valeur -1, en laissant s_3 à 0, entraînera une augmentation du profit de 30 cents.

Mais comment interpréter « donner à s_1 la valeur -1 » ?

s_1 a été défini par $s_1 = 500 - (0.5 x_1 + 0.5 x_2)$

$s_1 = -1 \Rightarrow 0.5 x_1 + 0.5 x_2 = 501$

Ceci correspond à l'idée qu'on dispose d'un kg de A supplémentaire.

On dit que *la valeur marginale de A à l'optimum est de 30*.

Par linéarité, on déduira :

α kg de A supplémentaires induisent une augmentation du profit de $\alpha \times 30$ cents.

On est donc tenté d'augmenter le stock initial de A, en laissant inchangé celui de C. Mais pour rester dans la base optimale, cette variation de stock devra être limitée.

En effet, le tableau simplexe final nous apprend que

$$\begin{cases} x_2 = 300 - 3s_1 + 5s_3 \\ x_1 = 700 + s_1 - 5s_3 \\ s_2 = 60 + s_1 - s_3 \end{cases}$$

Augmenter de α kg le stock de A conduit à
$$\begin{cases} x_2 = 300 + 3\alpha \\ x_1 = 700 - \alpha \\ s_2 = 60 - \alpha \end{cases} \quad (*)$$

(pour une explication détaillée de ce qui précède, voir page 30).

Les conditions de positivité imposent
$$\begin{cases} 300 + 3\alpha \geq 0 \\ 700 - \alpha \geq 0 \\ 60 - \alpha \geq 0 \end{cases}, \text{ donc } -100 \leq \alpha \leq 60.$$

On restera donc dans la base optimale si le stock de A est compris entre 400 et 560 kg.

Si, au départ, le négociant dispose de 60 kg de A supplémentaires, il pourra préparer

$$700 - 60 = 640 \text{ kg de mélange M1}$$

$$300 + 3 \times 60 = 480 \text{ kg de mélange M2}$$

et son profit sera de $27000 + 30 \times 60 = 28800$ cents.

Exercice 1 : reprendre le problème ci-dessus mais cette fois, envisager d'augmenter le stock de C, sans toucher au stock initial de A et de B.

Dans quelles limites ce stock peut-il varier en laissant la base optimale inchangée ?

Quel est alors le profit maximum réalisable ?

Visualiser graphiquement cette situation.

Exercice 2 : reprendre le problème ci-dessus mais cette fois, envisager d'augmenter simultanément le stock de A de α kg et le stock de C de β kg, sans toucher au stock initial de B.

Quelles conditions devraient satisfaire α et β ?

Quel est alors le profit maximum réalisable ?

Visualiser graphiquement cette situation.

Explication détaillée .

Si on augmente le stock de A de α kg, le programme linéaire de départ devient

Maximiser $30 x_1 + 20 x_2$

$$\text{sous } \begin{cases} 0.5 x_1 + 0.5 x_2 + s_1 = 500 + \alpha \\ 0.2 x_1 + 0.4 x_2 + s_2 = 320 \\ 0.3 x_1 + 0.1 x_2 + s_3 = 240 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

Le tableau initial devient

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
		30	20	0	0	0	RHS	Ratio
s_1	0	0.5	0.5	1	0	0	$500 + \alpha$	
s_2	0	0.2	0.4	0	1	0	320	
s_3	0	0.3	0.1	0	0	1	240	
		30	20	0	0	0	0	

et le tableau final sera :

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
		30	20	0	0	0	RHS	
x_2	20	0	1	3	0	-5	$300 + 3 \alpha$	
s_2	0	0	0	-1	1	1	$60 - \alpha$	
x_1	30	1	0	-1	0	5	$700 - \alpha$	
		0	0	-30	0	-50	$27000 + 30 \alpha$	

à condition que $\{x_1, x_2, s_2\}$ soit encore une base admissible, c'à d si $\begin{cases} 300 + 3 \alpha \geq 0 \\ 700 - \alpha \geq 0 \\ 60 - \alpha \geq 0 \end{cases}$

Remarquons que le système de départ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 320 \\ 240 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et qu'au tableau simplexe final correspond le système

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + s_1 \cdot S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \cdot S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 320 \\ 240 \end{pmatrix} + \alpha \cdot S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad S = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.3 \end{pmatrix} \text{ ou}$$

encore

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 60 \\ 700 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 60 \\ 700 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

où on observe que, dans chaque équation, le coefficient de s_1 est l'opposé de celui de α .

Quand à la fonction objectif, son expression en fonction des variables hors base est :

$$27000 + 30 \alpha - 30 s_1 - 50 s_3$$

Si on reste dans la même base $\{x_1, x_2, s_2\}$ ($s_1 = s_3 = 0$), on trouve :

$$\begin{cases} x_2 = 300 + 3 \alpha \\ x_1 = 700 - \alpha \\ s_2 = 60 - \alpha \end{cases} \quad \text{pour une fonction objectif qui vaut } 27000 + 30 \alpha$$

◆ Problème 2

Considérons le problème suivant :

« Une entreprise fabrique 5 produits P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 . Ces produits nécessitent 2 à 3 opérations qui se font dans les ateliers A_1, A_2 et A_3 . Les temps de fabrication par tonne de produit, exprimés en minutes, sont repris dans le tableau suivant :

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
A_1	100	50	60	160	0
A_2	50	60	40	0	40
A_3	25	0	75	20	30

L'usine travaille 250 jours par an, à raison de 8 heures par jour.

Les marges bénéficiaires par tonne (en Euros), sont reprises dans le tableau suivant :

P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
330	300	305	225	200

- 1) Etablissez un plan annuel de fabrication pour que les bénéfices soient maximaux. Quels sont ces bénéfices ?
- 2) Vous constatez que les produits P₁ et P₂ ne sont pas rentables sans modifier leur marge bénéficiaire. Donnez de nouvelles marges pour P₁ et P₂ qui permettraient d'obtenir les bénéfices précités tout en maintenant la fabrication des 2 produits.
- 3) Ces nouvelles marges étant adoptées, déterminez la production de P₃, P₄ et P₅ qui correspondraient à la production de 275 tonnes de P₁ et de 290 tonnes de P₂ et à un travail à plein rendement dans chacun des ateliers.
- 4) L'entreprise envisage maintenant d'augmenter la production d'au moins un des produits rentables P₃ ou P₄ : malheureusement, les ateliers sont saturés. Il faudra donc faire appel à une entreprise sous-traitante. La direction n'envisage cette possibilité que pour le travail réalisé dans l'atelier A₁ et ce, en maintenant respectivement à 275 et 290 tonnes les productions de P₁ et P₂.

Montrez qu'alors, c'est la production de P₄ qu'on va pouvoir augmenter.

Faisons passer cette dernière à 400 tonnes ; que devient alors le plan de production ?

Solution

- 1) Le tableau initial sera

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	S ₁	S ₂	S ₃	
		330	300	305	225	200	0	0	0	RHS
S ₁	0	100	50	60	160	0	1	0	0	120000
S ₂	0	50	60	40	0	40	0	1	0	120000
S ₃	0	25	0	75	20	30	0	0	1	120000
		330	300	305	225	200	0	0	0	0

et le tableau final sera

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	S ₁	S ₂	S ₃	
		330	300	305	225	200	0	0	0	RHS
X ₄	225	0.875	0.825	0	1	0	0.0075	0.0075	-0.01	600
X ₅	200	1.9167	2.8667	0	0	1	0.0033	0.045	-0.0267	2600
X ₃	305	-0.6667	-1.3667	1	0	0	-0.0033	-0.02	0.0267	400
		-46.875	-42.125	0	0	0	-1.3375	-4.5875	-0.55	777000

Bénéfice maximal de 777000 Euros pour la production de 0 tonnes de P₁, 0 tonnes de P₂, 400 tonnes de P₃, 600 tonnes de P₄ et 2600 tonnes de P₅.

2) nouvelle marge de P₁ : 376.875

nouvelle marge de P₂ : 342.125

3) Le nouveau tableau final est

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	S ₁	S ₂	S ₃	
		376.875	342.125	305	225	200	0	0	0	RHS
X ₄	225	0.875	0.825	0	1	0	0.0075	0.0075	-0.01	600
X ₅	200	1.9167	2.8667	0	0	1	0.0033	0.045	-0.0267	2600
X ₃	305	-0.6667	-1.3667	1	0	0	-0.0033	-0.02	0.0267	400
		0	0	0	0	0	-1.3375	-4.5875	-0.55	777000

Bénéfice maximal de 777000 Euros pour la production de 275 tonnes de P₁
 290 tonnes de P₂
 979.6667 tonnes de P₃
 120.125 tonnes de P₄
 1241.583 tonnes de P₅

4) Notons α l'augmentation de « temps disponible dans l'atelier A₁ ». On a :

$$x_3 = 979.6667 - 0.0033 \alpha$$

$$x_4 = 120.125 + 0.0075 \alpha$$

$$x_5 = 1241.583 + 0.0033 \alpha$$

etc...

◆ Problème 3 (juin 2004)

Une entreprise fabrique 4 types de produits A, B, C et D.

La fabrication d'une tonne de produit A ou B nécessite la consommation de 3 m³ d'eau, une tonne de produit C demande 2 m³ d'eau et une tonne de produit D demande 1 m³ d'eau.

L'entreprise s'est engagée à ne pas consommer plus de 240 m³ d'eau par semaine.

Une tonne de produit A ou B occupe un volume de 2 m³, une tonne de produit C ou D occupe un volume de 4 m³.

La capacité de stockage de l'entreprise est de 400 m³ de produits finis.

Pour être assuré de voir toute la production entièrement absorbée par le marché, il faut limiter la production de A à un maximum de 80 tonnes par semaine et la production totale des 4 produits à un maximum de 200 tonnes par semaine.

Les marges bénéficiaires sont respectivement de 120, 100, 80 et 60 Euros par tonne de produit.

On veut déterminer les quantités hebdomadaires à fabriquer pour que le bénéfice total soit maximum et toute la production vendue.

Le problème peut être modélisé comme suit :

- variables de décision : x_1 : quantité de A à fabriquer par semaine (en tonnes)
 x_2 : quantité de B à fabriquer par semaine (en tonnes)
 x_3 : quantité de C à fabriquer par semaine (en tonnes)
 x_4 : quantité de D à fabriquer par semaine (en tonnes)

- fonction à maximiser : $120 x_1 + 100 x_2 + 80 x_3 + 60 x_4$

- contraintes : $3 x_1 + 3 x_2 + 2 x_3 + x_4 \leq 240$
 $2 x_1 + 2 x_2 + 4 x_3 + 4 x_4 \leq 400$
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 200$
 $x_1 \leq 80$
 $x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4$

Les tableaux simplexes initial et final sont les suivants :

tableau initial

		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4	
Basis	$c(j)$	120	100	80	60	0	0	0	0	RHS
s_1	0	3	3	2	1	1	0	0	0	240
s_2	0	2	2	4	4	0	1	0	0	400
s_3	0	1	1	1	1	0	0	1	0	200
s_4	0	1	0	0	0	0	0	0	1	80
$c(j)-z(j)$		120	100	80	60	0	0	0	0	0

tableau final

		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4	
Basis	$c(j)$	120	100	80	60	0	0	0	0	RHS
x_1	0	1	1	0.4	0	0.4	-0.1	0	0	56
x_4	60	0	0	0.8	1	-0.2	0.3	0	0	72
s_3	0	0	0	-0.2	0	-0.2	-0.2	1	0	72
s_4	30	0	-1	-0.4	0	-0.4	0.1	0	1	24
$c(j)-z(j)$		0	-20	-16	0	-36	-6	0	0	11040

- 1) Au vu de ce tableau final, le produit B est-il rentable (oui ou non) ? Si oui, justifiez votre réponse. Si non, quelle devrait être sa marge bénéficiaire pour qu'il le soit ?
- 2) Si l'entreprise avait la possibilité de vendre **plus de 200 tonnes** de produits par semaine, quel bénéfice total pourrait-elle atteindre ? Justifiez votre réponse.
- 3) L'entreprise envisage d'**augmenter** sa capacité de stockage des produits finis, sans modifier les autres contraintes et en conservant les marges bénéficiaires initiales. Dans ce cas, en gardant les mêmes variables de base, quel est (en euros) le profit maximal que l'entreprise peut espérer atteindre ? Justifiez votre réponse.

5. Programmation linéaire en nombres entiers

Exercices

Etablir l'arborescence de la résolution par la méthode « Branch and Bound » de chacun des programmes linéaires en nombres entiers suivants :

$$1. \text{ Max } x_1 + x_2 \text{ sous } \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \text{ entiers positifs} \end{cases}$$

$$2. \text{ Min } 3x_1 + x_2 \text{ sous } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 13 \\ x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ 3x_2 \geq 17 \\ x_1, x_2 \text{ entiers positifs} \end{cases}$$

$$3. \text{ Min } 2x_1 + 1.25x_2 \text{ sous } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ 5x_1 - x_2 \geq 10 \\ x_1, x_2 \text{ entiers positifs} \end{cases}$$

$$4. \text{ Max } x_1 + 2x_2 \text{ sous } \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \text{ entiers positifs} \end{cases}$$

$$5. \text{ Max } x_1 + 10x_2 \text{ sous } \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ 5x_2 \leq 34 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ x_1, x_2 \text{ entiers positifs} \end{cases}$$

$$6. \text{ Min } x_1 + 4x_2 \text{ sous } \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \leq 0 \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 15 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{N} \end{cases}$$

