

Familles  
de structures de préférence  
non complètes

Céline Mousset  
Université de Mons-Hainaut  
Centre de Recherche Warocqué



# Remerciements

On me l'avait souvent dit, à présent je peux en témoigner : réaliser une thèse de doctorat est un travail de longue haleine. Nombreux sont les doutes, les moments de découragement, heureusement bien vite balayés par les moments d'euphorie qui suivent les pas en avant. Arriver au bout du chemin nécessite de faire régulièrement le point pour se recentrer sur l'essentiel, remettre en question les directions choisies et acquérir des certitudes. Mais seul, on peut tourner en rond. Je tiens à remercier ici Jean-Claude Vansnick, promoteur de ce travail, pour tous les échanges que nous avons eus autour de ma thèse. A chaque fois, ils m'ont permis de voir les choses sous un autre angle, et ainsi de progresser. Merci également à Jean-Marie De Corte, présent à une bonne partie de nos discussions, et toujours disponible.

En septembre 1999, Jean-Claude m'a introduite au sein du groupe de travail européen en aide multicritère à la décision ; en partant à Cerisy-la-Salle avec ma guitare, j'étais bien loin de penser que cette réunion et celles qui suivraient allaient être parmi les principales sources de motivation pour ma recherche doctorale. J'y ai rencontré des gens passionnés et passionnants, des chercheurs compétents et accessibles. Je tiens à remercier particulièrement Denis Bouyssou, Marc Pirlot, Alexis Tsoukias et Philippe Vincke, pour les discussions intéressantes que j'ai eues avec eux. De leur côté, les jeunes chercheurs du groupe sont autant de personnes sympathiques que je me réjouis toujours de retrouver. A chacune de mes participations aux réunions du groupe de travail, je suis arrivée en ayant fait un "état des lieux" de ma recherche, et je suis repartie avec les batteries rechargées, en ayant retrouvé un souffle nouveau pour avancer dans ma thèse.

Il y a un peu moins de deux ans, un groupe parallèle s'est créé : celui des "jeunes chercheurs belges en aide multicritère à la décision". Par deux fois, nous fûmes une douzaine à nous réunir, pour échanger, deux jours durant, autour de nos recherches doctorales respectives. Ces rencontres furent riches tant sur le plan

scientifique que sur le plan humain. Ma sympathie va à chacun des membres de cette fine équipe, caractérisée par sa rigueur scientifique, son esprit d'ouverture et de discussion, et sa franche camaraderie.

Il paraît qu'on ne comprend réellement bien quelque chose que lorsque l'on peut l'expliquer. Je suis assez d'accord avec cette idée. J'ai eu l'occasion par deux fois d'exposer plus longuement mes résultats dans le cadre du séminaire FNRS en aide à la décision et modélisation des préférences organisé à l'Université Libre de Bruxelles par Philippe Vincke, puis une troisième fois au séminaire du Lamsade, invitée par Bernard Roy et Daniel Vanderpooten à l'Université de Paris Dauphine. Merci à chacun d'entre eux de m'avoir accueillie dans leur séminaire, les préparations (épuisantes mais passionnantes) de ces présentations m'ont permis de faire trois pas de géant dans ma recherche.

Au séminaire FNRS, j'ai eu l'occasion de rencontrer Jean-Paul Doignon. Qu'il soit ici remercié pour ses explications, ses conseils et sa disponibilité à me recevoir chaque fois que je le lui ai demandé.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude envers Denis Bouyssou, Jean-Marie De Corte, Catherine Finet, Jacqueline Loris-Teghem, Christian Michaux, Jean-Claude Vansnick et Philippe Vincke, membres du jury, qui ont accepté de consacrer de leur temps précieux pour lire et évaluer ce travail. Un merci tout particulier va à Jacqueline Loris-Teghem, pour sa relecture minutieuse de l'antépénultième version des chapitres 1, 2 et 3.

La décision de faire une thèse est prise pour soi, mais certaines personnes, bien malgré nous, doivent en subir les conséquences. Jérôme, mon mari, s'est trouvé aux premières lignes du front depuis le début de la bataille. Il a encouragé mes progrès, écouté mes doutes, supporté mes changements d'humeur, et pris le relais quand je passais plus de temps devant mon ordinateur que devant mes casseroles... Qu'il puisse trouver ici une marque de l'infinie tendresse que je lui porte : il est pour beaucoup dans le fait que je sois arrivée à finaliser ce travail.

Les petits encouragements, reçus au quotidien, sont autant de doses d'énergie dans lesquelles on peut puiser, et qui revigorent. J'en ai reçu des tas, en particulier de mes parents, mais aussi de ma famille, de mes amis, de mes collègues. Merci à tous de m'avoir si bien entourée.

Ma reconnaissance va aussi à José Garcia et Carlo Palumbieri, pour avoir joliment reproduit et relié ce document.

Pour terminer, je voudrais remercier les nombreuses personnes qui ont aidé la néophyte en  $\LaTeX$  que je suis à se sortir des multiples situations problématiques

rencontrées lors de mon apprentissage, puis au cours de la rédaction de cette thèse : Denis Bouyssou, Kim Cao-Van, Catherine Charles, Martin De Corte, Yves De Smet, Fabrice Louche, François Meers, Linett Montano, Marc PirLOT. Sans eux, j'aurais bien vite abandonné cet outil à la fois rébarbatif et merveilleux !

Je dédie ce travail à Maurice Boffa, mon excellent professeur d'algèbre et de logique et directeur de mon mémoire de licence en sciences mathématiques. Il n'est malheureusement plus là pour en témoigner aujourd'hui, mais il fut probablement l'un des premiers, et ce, bien avant moi, à croire en l'aboutissement de ma thèse.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Notions de base</b>	<b>15</b>
2.1	Aide à la décision . . . . .	15
2.2	Tout . . . sur les relations binaires . . . . .	18
2.2.1	Définitions . . . . .	18
2.2.2	Propriétés . . . . .	18
2.2.3	Représentation graphique . . . . .	19
2.2.4	Représentation matricielle . . . . .	22
2.2.5	Parties symétrique et asymétrique . . . . .	22
2.2.6	Relation duale . . . . .	23
2.2.7	Relations particulières . . . . .	23
2.2.8	Structure relationnelle de préférence . . . . .	25
2.3	Ordre d'intervalles et semi-ordre . . . . .	27
2.3.1	Semi-ordre . . . . .	28
2.3.2	Ordre d'intervalles . . . . .	32
2.3.3	Note sur les biordres . . . . .	35
2.4	Préordre total . . . . .	36
2.5	Famille de structures de préf. complètes . . . . .	38
2.5.1	Résultats antérieurs . . . . .	39
2.5.2	Familles de préordres totaux . . . . .	53
2.5.3	Schéma récapitulatif . . . . .	63
2.5.4	Note sur les familles de structures de préférence emboîtées . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Familles de struct. de préf. non complètes</b>	<b>69</b>
3.1	Introduction . . . . .	69
3.2	Les types de familles . . . . .	70
3.2.1	Structure prolongeable en un ordre d'intervalles . . . . .	70

3.2.2	Structure prolongeable en un semi-ordre . . . . .	73
3.2.3	Structure prolongeable en un préordre total . . . . .	74
3.2.4	Famille de type <b>IF</b> . . . . .	75
3.2.5	Les autres types de familles . . . . .	76
3.2.6	Exemples . . . . .	80
3.3	Vision sémantico-numérique . . . . .	92
3.3.1	Structures prolongeables en un ordre d'intervalles . . . . .	93
3.3.2	Structures prolongeables en un semi-ordre . . . . .	94
3.3.3	Structures prolongeables en un préordre total . . . . .	95
3.3.4	Familles de structures de préférence . . . . .	95
3.4	Vision relationnelle . . . . .	99
3.4.1	Structures prolongeables en un O.I. ou un S.O. . . . .	99
3.4.2	Structures prolongeables en un préordre total . . . . .	100
3.4.3	Familles de structures de préférence . . . . .	103
3.5	Vision matricielle . . . . .	121
3.5.1	Structures prolongeables. . . . .	121
3.5.2	Familles de structures de préférence . . . . .	124
3.5.3	Caractérisation des ordres totaux liés aux représentations matricielles . . . . .	133
3.6	Familles de type mixte . . . . .	137
<b>4</b>	<b>Familles de structures de préf. emboîtées</b>	<b>139</b>
4.1	Introduction . . . . .	139
4.2	Que deviennent les résultats du chapitre 3? . . . . .	140
4.2.1	Les types de familles . . . . .	140
4.2.2	Conditions sémantico-numériques . . . . .	141
4.2.3	Conditions relationnelles . . . . .	142
4.2.4	Conditions matricielles . . . . .	142
4.3	Remarques en vrac . . . . .	144
4.3.1	Pourquoi <b>M-</b> , et pas <b>E</b> ? . . . . .	144
4.3.2	“Structures emboîtées” n’implique pas “famille homogène”	145
4.3.3	Toute famille de préordres totaux emboîtés est homogène .	146
4.4	Un mode de questionnement très général . . . . .	146
4.4.1	Introduction . . . . .	146
4.4.2	Théorèmes de représentation . . . . .	147
4.4.3	Intérêt pratique . . . . .	149
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>151</b>

<b>A Représ. numérique avec un seuil constant...</b>	<b>153</b>
A.1 Présentation du problème . . . . .	153
A.2 Préliminaires . . . . .	154
A.3 Algorithme . . . . .	154
A.4 Démonstration . . . . .	155
A.5 Exemple . . . . .	156
<b>B Reformulation des résultats ...</b>	<b>159</b>
B.1 Reformulation de la déf. 14 (p. 57) . . . . .	159
B.2 Reformulation de la prop. 25 (p. 58) . . . . .	159
<b>Bibliographie</b>	<b>161</b>



“There is nothing more practical than a good theory”

(repris par J. Barzilăi,  
Ecole internationale d'été en AMCD, Montréal, mai 2003).



# Chapitre 1

## Introduction, ou il était une fois une recherche...

Tout a commencé avec Shakespeare... et ceux qui s'en sont inspirés.

Grâce aux professeurs Jean-Claude Vansnick et Carlos Bana e Costa, le grand poète-dramaturge anglais a connu une jeunesse nouvelle. Suivant l'effet de mode, l'été dernier, même la célèbre organisation belge "Tour des Sites" a présenté Macbeth dans le cadre prestigieux des ruines de l'abbaye de Villers-la-Ville!

Trêve de plaisanterie : aujourd'hui, Macbeth n'est plus seulement un roi d'Ecosse, une pièce de théâtre dramatique ou un opéra de Verdi. Dans la bouche des praticiens en aide multicritère à la décision, ce nom fait référence à une philosophie d'approche de problèmes multicritères permettant de faire réfléchir un décideur à la situation problématique qu'il rencontre, référence à un mode de questionnement simple permettant de recueillir du décideur de l'information préférentielle qui fait sens pour lui, référence encore à un logiciel (M-MACBETH, développé par le docteur Jean-Marie De Corte - voir [De 02]) mettant en oeuvre ce qui précède, vérifiant la consistance des informations et proposant des outils visuels et numériques permettant notamment l'agrégation des données, l'élaboration de suggestions et une analyse de robustesse (pour plus d'informations au sujet de MACBETH, se référer à [BVD03]).

Les relations binaires issues du mode de questionnement MACBETH (*"Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation TecHnique"*) ont été le point de départ de ce travail. Ce questionnement se présente comme suit. Pour chaque paire d'alternatives  $\{x, y\}$  du problème, on demande au décideur :

1. *L'une des deux alternatives vous semble-t-elle plus attractive que l'autre ?*

Trois réponses possibles :

- oui (noté  $xPy$  si  $x$  est plus attractif que  $y$ )
  - non (noté  $xC_0y$  et  $yC_0x$ )
  - je ne sais pas ( $xJy$  et  $yJx$ ).
2. Si  $xPy$ , comment qualifieriez-vous la différence d'attractivité que vous ressentez entre  $x$  et  $y$ ? Six réponses possibles :
- très faible (noté  $xC_1y$ )
  - faible (noté  $xC_2y$ )
  - modérée (noté  $xC_3y$ )
  - forte (noté  $xC_4y$ )
  - très forte (noté  $xC_5y$ )
  - extrême (noté  $xC_6y$ ).

C'est sur ces "collections" de relations  $\mathcal{C} = (C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, J)$  (nous les appellerons plus généralement *familles*) que nous avons commencé à travailler dans le cadre de notre recherche doctorale. Ce qui rend l'étude des familles  $\mathcal{C}$  à la fois nouvelle, difficile mais également intéressante est directement lié au fait que le décideur a le droit de répondre "Je ne sais pas" à la question 1, et donc à la présence d'une relation  $J$  d'incomparabilité dans  $\mathcal{C}$ . De plus en plus aujourd'hui, dans les démarches d'aide à la décision, on souhaite pouvoir traiter de l'information préférentielle où subsiste de l'incomparabilité entre certaines alternatives. Dans [RB93], on retrouve l'idée suivante.

Certains ont tendance à contester l'intérêt de l'incomparabilité en faisant valoir qu'elle est nécessairement évacuée par toute décision. Cette contestation repose sur un malentendu : il importe de ne pas perdre de vue que l'affirmation "a et b sont incomparables" traduit un refus de prendre position **au niveau de la modélisation des préférences** sur la comparaison des valeurs respectives de a et b.

Ce refus de prendre position peut s'expliquer notamment par le fait que lorsqu'il se trouve au début du processus de réflexion, le décideur peut manquer d'information sur son problème et les alternatives dont il dispose, ou tout simplement ne pas avoir une vision claire de la situation parce qu'il n'y a pas encore bien réfléchi. Il est important de pouvoir aller aussi loin que possible avec l'information disponible, aussi incomplète soit-elle.

Dans un premier temps, nous avons, au cours d'une recherche menée avec Jean-Claude Vansnick, démontré des théorèmes de représentation de ces familles  $\mathcal{C}$  se rapportant directement au contexte requis dans l'approche MACBETH. Ces théorèmes déterminent quand l'information préférentielle qui induit  $\mathcal{C}$  est de type "précardinale" (voir à ce sujet [Mou02]), c'est-à-dire quand il existe une fonction  $f$

à valeurs réelles sur l'ensemble  $X$  des alternatives qui satisfait aux trois conditions suivantes :  $\forall x, y, z, w \in X$ ,

1.  $(x, y) \in C_0 \Rightarrow f(x) = f(y)$
2.  $\forall i, j \in \{0, 1, \dots, 6\}$  :  
 $[(x, y) \in C_i, (z, w) \in C_j \text{ et } i > j] \Rightarrow f(x) - f(y) > f(z) - f(w)$ .

L'approche MACBETH nécessite, pour pouvoir être menée à terme, que ces conditions soient vérifiées, ce qui impose évidemment une certaine rationalité au décideur. Cependant, rien n'est prévu dans MACBETH lorsque les conditions ci-dessus ne sont pas vérifiées et que le décideur n'accepte pas de modifier ses jugements. Même si les outils proposés dans MACBETH permettent très souvent d'éviter cette situation en pratique, sur le plan théorique cette situation pose des problèmes intéressants tels que ceux de la caractérisation de la "richesse" de l'information disponible. C'est sur ce problème que nous avons travaillé dans un deuxième temps. Nous nous sommes proposé de relaxer progressivement les contraintes (1) et (2) imposées par le modèle MACBETH, et d'établir des théorèmes de représentation se rapportant à ces nouveaux cadres plus souples. Nous avons ainsi été amenée à définir différents types de familles  $\mathcal{C}$ . Nous avons caractérisé ces types, et les avons structurés les uns par rapport aux autres.

La troisième phase de nos recherches est née de l'observation suivante : chaque structure  $\mathcal{C} = (C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, J)$  correspond à une famille de structures de préférence non complètes<sup>1</sup>. Cette correspondance s'établit comme suit :  $\forall k \in \{1, 2, \dots, 6\}$ , on pose

- $P_k = C_k \cup C_{k+1} \cup \dots \cup C_6$
- $I_k = C_0 \cup C_1 \cup C_1^- \cup \dots \cup C_{k-1} \cup C_{k-1}^-$ <sup>2</sup>
- $J_k = J$ .

$[(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2), \dots, (P_6, I_6, J_6)]$  est une famille de structures de préférence non complètes ayant la particularité d'être emboîtées :  $P_6 \subseteq P_5 \subseteq \dots \subseteq P_1$  et  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_6$  ; de plus, la relation d'incomparabilité est commune à toutes les structures de la famille. Il nous a semblé intéressant, sur le plan théorique, de vérifier si nos résultats (concernant les familles comme  $\mathcal{C}$ ) étaient toujours d'application dans le cas des familles de structures de préférence quelconques. Nous avons donc reformulé et généralisé nos théorèmes, ce qui nous a conduite à adopter une présentation nouvelle, plus claire, unificatrice.

<sup>1</sup>où l'expression "structure de préférence" doit être comprise au sens de [RV85] (voir aussi définition 5, page 38), et où l'expression "non complètes" doit être comprise comme "non nécessairement complètes"

<sup>2</sup>où  $C_i^- = \{(x, y) \in X : (y, x) \in C_i\}$

Voilà la véritable histoire de cette recherche doctorale. Pour la beauté du manuscrit que vous êtes en train de lire, nous l’avons réinventée, de façon à vous la conter sous une forme plus cohérente et plus logique.

Le chapitre 2, intitulé “Notions de base”, reprend toutes les informations préliminaires nécessaires à la compréhension du problème traité. On y retrouve les notions de relation binaire, d’ordre d’intervalles, de semi-ordre et de préordre. La dernière partie du chapitre parle de familles de structures de préférence complètes. Nous y reprenons et illustrons les résultats de [DMRV86] qui seront généralisés aux chapitres 3 et 4. Nous y ajoutons également quelques résultats liés aux familles de préordres totaux.

Dans le chapitre 3, nous présentons les différents types de familles de structures de préférence non complètes étudiés, puis nous les caractérisons selon trois aspects : selon une vision “sémantico-numérique” (qui n’est pas sans rappeler le monde du mesurage), selon une vision “relationnelle” et enfin selon une vision “matricielle”. Nous verrons que les résultats obtenus mènent à des moyens pratiques permettant de définir avec précision le type d’une famille donnée, et ouvrent donc la porte à de futures applications. A travers tout ce chapitre 3, de nombreux exemples illustrent les notions étudiées.

Nous n’abordons le point de départ de notre recherche, à savoir les familles de structures de préférence non complètes et emboîtées (et où la relation d’incomparabilité est commune à toutes les structures de la famille), qu’au chapitre 4. Nous y montrons comment adapter les résultats du chapitre précédent à ce cas particulier. Le lecteur y trouvera également différents modes de questionnement donnant naissance à ce type de famille.

Une conclusion clôture cette dissertation doctorale. Nous y dressons le bilan de notre travail, nous y relevons les points qui restent en suspens, et nous y proposons différentes pistes de recherche.

# Chapitre 2

## Notions de base

### 2.1 Aide à la décision

Tranche de vie...

- “Que fais-tu comme métier ?”

- “Je suis assistante.”

- “Dans un cabinet de dentiste ?”

- “Non, à l’université. Mon boulot consiste à donner aux étudiants des travaux pratiques en maths et maths appliquées, et aussi à faire une thèse.”

- “Ah, donc tu fais de la recherche en maths ! Mais qu’est-ce qu’on peut encore bien avoir à chercher en maths ?”

Alors, celle-là, je m’y attendais. Un grand classique ! Bon, je prends mon courage à deux mains...

- “Tu sais, contrairement à ce que l’on croit, les mathématiques sont un domaine en perpétuelle évolution, il y a encore plein de choses à découvrir ! Tiens, par exemple, l’aide multicritère à la décision, le domaine général dans lequel se situe ma recherche, est née il y a à peine 40 ans...”

- “Hein, l’aide quoi ? Qu’est-ce que c’est ça ?”

Quand un mathématicien déclare qu’il fait de la recherche en algèbre géométrique ou en analyse numérique, en général son public ne cherche pas à en savoir davantage, de peur de voir le scientifique passionné se lancer dans de longues explications pseudo-vulgarisatrices qui risqueraient de saper l’ambiance de la soirée. Mais les termes “aide à la décision”, “modélisation des préférences” et “mathématiques appliquées” suscitent inmanquablement la curiosité. Les gens y voient comme un espoir d’éclairage nouveau, qui donnerait enfin du sens aux

longues heures de mathématiques de leur jeunesse, subies péniblement par certains, ludiques mais peu concrètes pour d'autres.

Partagée entre l'envie de ne pas répondre par peur de devoir me dépatouiller dans mes explications, au risque de frustrer la personne qui pensait qu'elle allait enfin comprendre, et ma fibre d'enseignante et de scientifique qui profite spontanément de chaque occasion pour instruire, surtout face à un public demandeur, je décide de me jeter à l'eau. Est-ce que je tente une approche historique ? Est-ce que je me lance dans le traditionnel exemple de l'achat d'une voiture, avec tous les points de vue à prendre en compte, et le côté non objectif de la "solution" ? Est-ce que je lui parle de problèmes écologiques, où peuvent entrer en jeu des critères non quantifiables et des estimations hypothétiques futuristes ? Ou bien je le laisse se débrouiller avec la réponse un peu simpliste mais tellement pratique : "C'est aider les gens à prendre des décisions dans le cas où ils sont confrontés à des problèmes où plusieurs critères entrent en jeu dans la décision" ? Quoique, je pourrais éventuellement aussi lui parler de la "decision conferencing", nouveau sujet à la mode... De toute façon, une chose est certaine, quoi que je tente, j'aurai droit à "Et que viennent faire tes maths dans tout ça ?".

Selon nous, l'aide à la décision est un processus difficile à présenter, car changeant selon les cas envisagés. On peut, de manière générale, y retrouver les étapes suivantes.

- Définition du problème.
- Détermination des acteurs (personnes impliquées dans le processus de décision : experts, "stakeholders", ...) et parmi eux, du ou des décideurs (personne(s) qui prendra(ont) la décision) ; consultation de chacun, et/ou rassemblement de certains d'entre eux, par rapport à celles parmi les phases suivantes qui les concernent.
- Définition des critères à prendre en compte dans la décision.
- Détermination des actions potentielles.
- Choix d'une méthodologie pour la résolution du problème. Pour cela, il faut notamment tenir compte des données dont on dispose, et de celles que l'on pourrait obtenir.
- Récolte des données nécessaires à l'utilisation de la méthodologie d'aide choisie (par exemple évaluation des actions sur chaque point de vue, paramètres du modèle, ...).
- Application de la procédure d'agrégation choisie ; examen des solutions proposées, et discussion de celles-ci.
- Validation d'une décision ; application de celle-ci.

Ce processus est loin d'être linéaire. Des étapes peuvent se révéler superflues,

des retours en arrière peuvent s'avérer nécessaires.

Il semble évident aujourd'hui qu'un des éléments centraux qui découlent de ce type de processus est le fait qu'il permet au décideur de structurer son problème, d'y réfléchir, de le clarifier. Parfois même le recours à un processus d'agrégation n'est pas nécessaire. Admis par tous aussi, le fait que la méthode utilisée émet des suggestions, et pas une vérité absolue à mettre en oeuvre à tout prix. Le consultant et la méthode utilisée ne décident pas à la place du décideur. Le fait qu'un décideur ne valide pas une solution proposée n'est pas un échec : il a maintenant une autre connaissance de son problème, qu'il n'avait pas avant, et qui lui permet de la rejeter. Enfin, n'oublions pas le côté subjectif de la décision : contrairement aux autres branches de la recherche opérationnelle, l'AMCD (aide multicritère à la décision) intègre, au cours de la plupart de ses processus, les choix, les valeurs, les priorités du décideur ; par conséquent, l'idée d'optimalité de la solution disparaît.

Mais alors, finalement, pourquoi essayer de construire proprement les modèles d'agrégation, pourquoi vouloir des mathématiques sous-jacentes aussi "belles" et efficaces que possible ? Pourquoi ne pas mettre toutes les alternatives dans un chapeau, en tirer une au sort, et se demander si elle convient ou pas ?

Un modèle est une représentation de la réalité. Cela implique inévitablement des simplifications. Cependant, le processus d'agrégation, qui tente lui aussi de modéliser un hypothétique processus qui se produirait dans la tête du décideur, ainsi que les résultats qui en découlent sont censés représenter au mieux les préférences du décideur. Il s'agit donc de rester extrêmement prudent dans les manipulations effectuées, en évitant notamment d'ajouter ou de perdre de l'information au cours du processus.

La modélisation des préférences est une discipline qui est constituée de deux grandes voies (voir par exemple à ce sujet [Vin01]). La première part d'une information préférentielle, elle étudie les structures de préférence fournies par le décideur, et tente notamment de les représenter numériquement au mieux. L'autre volet de la modélisation des préférences part de nombres associés aux éléments, et en déduit des relations de préférence ; nous n'aborderons pas ce thème dans ce travail. Dans beaucoup de modèles d'agrégation, les évaluations (numériques) des actions sur chaque point de vue constituent le point de départ du processus d'agrégation. Il est donc important que les nombres fournis reflètent au mieux les idées du décideur, l'attractivité ressentie par rapport à chaque alternative, la satisfaction engendrée par chaque alternative, ... Le travail de recherche présenté ici s'inscrit dans cette optique.

Qui dit modélisation des préférences, dit forcément relation binaire. Les pages

qui suivent permettront au lecteur d'en apprendre davantage à ce sujet.

## 2.2 Tout ce qu'il faut savoir sur les relations binaires

### 2.2.1 Définitions

Nous travaillerons toujours sur un ensemble  $X$  fini. Les éléments de  $X$  seront notés  $x, y, z, \dots$  ou encore  $a, b, c, \dots$

Une *relation binaire*  $R$  sur  $X$  est un sous-ensemble du produit cartésien  $X \times X$  (noté aussi  $X^2$ ). C'est donc un ensemble de couples d'éléments de  $X$ . Pour indiquer qu'un couple  $(x, y)$  est dans  $R$ , nous utiliserons indifféremment  $(x, y) \in R$  ou  $xRy$ . Si  $(x, y)$  n'est pas dans  $R$ , on notera  $(x, y) \notin R$ , ou  $x \neg Ry$ . On désignera par :

- $R^- = \{(x, y) : yRx\}$ , le *contraire* de  $R$ ;
- $R^c = \{(x, y) : x \neg Ry\}$ , le *complémentaire* de  $R$ ;
- $R^d = (R^-)^c = \{(x, y) : y \neg Rx\}$ , le *dual* de  $R$ .

Nous utiliserons abondamment le contraire dans tout ce travail. En outre, nous aurons l'occasion de voir un peu plus loin (§2.2.6) l'intérêt du dual, à première vue peu intuitif.

Le *produit* de deux relations binaires  $R$  et  $S$  sur un ensemble  $X$  est la relation  $RS = \{(x, y) : \exists z \in X [xRz \text{ et } zSy]\}$ .

Les relations ensemblistes suivantes sont définies de façon tout à fait classique :

- $(x, y) \in R \cap S \Leftrightarrow [(x, y) \in R \text{ et } (x, y) \in S]$ ;
- $(x, y) \in R \cup S \Leftrightarrow [(x, y) \in R \text{ ou } (x, y) \in S]$ ;
- $R \subseteq S \Leftrightarrow [(x, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in S]$ .

Dans ce travail, nous n'envisagerons que des relations binaires. Par conséquent, le terme "relation" signifiera toujours "relation binaire" par défaut.

Les symboles  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{N}$  désigneront respectivement l'ensemble des nombres réels et l'ensemble des nombres naturels (c'est-à-dire les entiers non négatifs).  $\mathbb{R}^+$  représentera l'ensemble des réels non négatifs.

### 2.2.2 Propriétés

Une relation binaire  $R$  sur un ensemble  $X$  est

- *réflexive* ssi  $\forall x \in X : xRx$ ;
- *irréflexive* ssi  $\forall x \in X : x \neg Rx$ ;

- *symétrique* ssi  $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$  ;
- *asymétrique* ssi  $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow y \neg Rx$  ;
- *antisymétrique* ssi  $\forall x, y \in X : xRy$  et  $x \neq y \Rightarrow y \neg Rx$  ;
- *complète* ssi  $\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow xRy$  ou  $yRx$  ;
- *fortement complète* ssi  $\forall x, y \in X : xRy$  ou  $yRx$  ;
- *transitive* ssi  $\forall x, y, z \in X : xRy$  et  $yRz \Rightarrow xRz$  ;
- *négativement transitive* ssi  $\forall x, y, z \in X : x \neg Ry$  et  $y \neg Rz \Rightarrow x \neg Rz$  ;
- *semi-transitive* ssi  $\forall x, y, z \in X : xRy$  et  $yRz \Rightarrow \forall w \in X : xRw$  ou  $wRz$  ;
- *de Ferrers* ssi  $\forall x, y, z, w \in X : xRy$  et  $zRw \Rightarrow xRw$  ou  $zRy$  ;
- *acyclique* ssi  $\forall n \in \mathcal{N}$  et  $\forall x_0, x_1, \dots, x_n \in X : [x_0Rx_1$  et  $x_1Rx_2$  et ... et  $x_{n-1}Rx_n \Rightarrow x_n \neg Rx_0]$ .

Il existe de nombreux liens entre ces propriétés. Voici quelques implications que nous manipulerons régulièrement dans ce travail, et qui mettent en jeu des propriétés de transitivité.

- $R$  transitive et complète  $\Rightarrow R$  négativement transitive ;
- $R$  acyclique et complète  $\Rightarrow R$  négativement transitive ;
- $R$  transitive et fortement complète  $\Rightarrow R$  semi-transitive et de Ferrers ;
- $R$  asymétrique et négativement transitive  $\Rightarrow R$  transitive, semi-transitive, et de Ferrers ;
- $R$  semi-transitive et réflexive  $\Rightarrow R$  fortement complète ;
- $R$  de Ferrers et réflexive  $\Rightarrow R$  fortement complète ;
- $R$  semi-transitive et irreflexive  $\Rightarrow R$  asymétrique et transitive ;
- $R$  de Ferrers et irreflexive  $\Rightarrow R$  asymétrique et transitive ;
- $R$  asymétrique et transitive  $\Rightarrow R$  acyclique.

La démonstration de ces implications ne présente pas de grosse difficulté ; elle est donc laissée au bon plaisir du lecteur.

### 2.2.3 Représentation graphique

Une relation binaire  $R$  sur un ensemble  $X$  (fini) peut se représenter par un graphe, souvent noté  $G(X, R)$  (voir par exemple [Roy69]). Les sommets de ce graphe correspondent aux éléments de  $X$ . Le fait que  $(x, y) \in R$  est symbolisé par un arc (une flèche) de  $x$  à  $y$  ; une boucle au sommet  $x$  représente  $(x, x) \in R$ . Si  $(x, y) \in R$  et  $(y, x) \in R$ , nous choisissons de tracer une arête (trait non orienté) entre  $x$  et  $y$  plutôt que deux flèches de sens opposés.

**Exemple 1** Soit  $X = \{a, b, c, d\}$ , soit  $R = \{(a, b), (b, b), (a, c), (c, a)\}$  une relation binaire sur  $X$ . Avec les conventions ci-dessus, la représentation graphique de  $R$  est telle que dans la Figure 2.1.

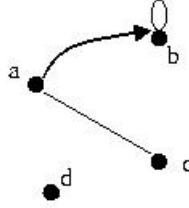


FIG. 2.1 – Représentation graphique de  $R$  (exemple 1).

Un *circuit* dans un graphe  $G(X, R)$  est un ensemble d’arcs (et d’arêtes)  $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, x_0)$ . Une relation est acyclique ssi son graphe ne contient pas de circuit. Par abus de langage, nous dirons aussi que  $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, x_0)$  est un circuit *de*  $R$ .

Il est intéressant d’avoir à l’esprit une visualisation graphique des autres propriétés des relations binaires. Ainsi (pour une relation  $R \neq \emptyset$ ),

- une relation *réflexive* est représentée par un graphe ayant une boucle en chaque sommet (une relation *irréflexive* correspond à l’absence totale de boucles dans le graphe) ;
- un graphe *symétrique* est un ensemble d’arêtes (entre des paires de sommets) et/ou de boucles ; l’*asymétrie* est marquée par l’absence totale d’arêtes et de boucles (l’*antisymétrie* admet les boucles) ;
- dans le graphe d’une relation *complète*, il y a toujours une flèche (ou une arête) entre deux sommets ; si la relation est *fortement complète*, il y aura en plus une boucle en tout sommet ;
- la *transitivité* est caractérisée par l’absence de situation comme dans la Figure 2.2 (“configuration interdite”) (une flèche en pointillé correspond à une absence de flèche à cet endroit) ;

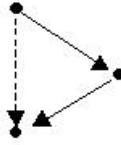


FIG. 2.2 – Configuration interdite pour la transitivité.

- la configuration interdite pour une relation *négativement transitive* est représentée dans la Fig. 2.3 ;

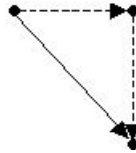


FIG. 2.3 – Configuration interdite pour la transitivité négative.

- le graphe d'une relation *semi-transitive* n'admet jamais la configuration de la Fig. 2.4

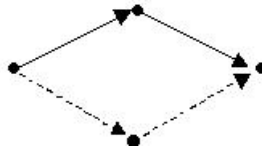


FIG. 2.4 – Configuration interdite pour la semi-transitivité.

- enfin, la configuration interdite pour le graphe d'une relation jouissant de la *propriété de Ferrers* est représentée dans la Fig. 2.5.

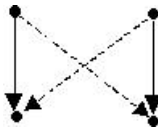


FIG. 2.5 – Configuration interdite pour la propriété de Ferrers.

### 2.2.4 Représentation matricielle

Une autre manière de représenter une relation binaire  $R$  sur  $X$  est d'utiliser une notation matricielle. Soit  $V$  et  $H$  deux ordres totaux<sup>1</sup> sur  $X$ . Le triplet  $(R, V, H)$  désigne une matrice (un tableau) où les lignes et les colonnes sont étiquetées par les éléments de  $X$  selon les ordres  $V$  et  $H$ , et où la “case”  $[x, y]$  (i.e. l'élément de la matrice situé “ligne  $x$ ” et “colonne  $y$ ”) contient un 1 (resp. un 0) si  $xRy$  (resp. si  $x\neg Ry$ ).

Sur l'exemple précédent (exemple 1, page 19), si l'on prend  $aVbVcVd$  et  $aHbHcHd$  :

	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	0	1	1	0
$b$	0	1	0	0
$c$	1	0	0	0
$d$	0	0	0	0

Lorsque  $V = H$ , la relation est symétrique ssi la matrice qui la représente l'est. Le caractère réflexif (resp. irreflexif) de  $R$  est marqué par le fait que la diagonale de  $(R, V, V)$  ne contient que des 1 (resp. que des 0). Les propriétés de transitivité sont moins faciles à vérifier matriciellement.

### 2.2.5 Parties symétrique et asymétrique

Toute relation binaire  $R$  se décompose en deux relations binaires disjointes  $P$  et  $I$ , où  $P$  est la partie asymétrique de  $R$  et  $I$  sa partie symétrique :

$$P = \{(x, y) : xRy \text{ et } y\neg Rx\}$$

$$I = \{(x, y) : xRy \text{ et } yRx\}.$$

On a  $R = P \cup I$ .

Outre ses parties symétrique et asymétrique, une relation binaire donne naissance à une relation  $J$  définie comme suit :

$$J = \{(x, y) : x\neg Ry \text{ et } y\neg Rx\}.$$

$J$  est une relation binaire symétrique.

On peut constater que  $P \cup I \cup J$  est une relation fortement complète, et que  $P \cup P^- \cup I \cup J = X^2$ .

---

<sup>1</sup>Comme nous le verrons au §2.2.7, un ordre total est une relation transitive, antisymétrique et fortement complète. Un ordre total sur un ensemble  $X$  correspond à un rangement (sans ex aequo) des éléments de  $X$ .

### 2.2.6 Relation duale

Pour rappel, si  $R$  est une relation binaire sur un ensemble  $X$ , la relation duale de  $R$  est notée  $R^d$  et définie par :

$$R^d = (R^-)^c = \{(x, y) : y \neg R x\}.$$

Il est intéressant de remarquer que certaines des propriétés définies plus haut se correspondent par dualité. Par exemple,

$R$	$R^d$
réflexive	irréflexive
fortement complète	asymétrique
antisymétrique	complète
transitive	négativement transitive

D'autre part, certaines propriétés sont ipsoduales (duales d'elles-mêmes) :

$R$	$R^d$
symétrique	symétrique
semi-transitive de Ferrers	semi-transitive de Ferrers

Par conséquent, la dualité permettra une agréable classification de certaines relations particulières, que nous définissons dans la section suivante.

### 2.2.7 Relations particulières

Les mathématiciens ont donné des noms particuliers aux relations binaires qui satisfont simultanément à plusieurs des propriétés présentées plus haut. Il n'existe pas de véritable consensus sur le vocabulaire à utiliser ; cette section permet de fixer les termes qui seront adoptés dans ce travail.

Le tableau suivant présente des relations qui se correspondent par dualité. Ce

sont aussi les plus couramment rencontrées.

	$R(= R^{dd})$	$R^d$	
ordre total	$\left\{ \begin{array}{l} \text{transitive} \\ \text{antisymétrique} \\ \text{fort. complète} \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} \text{nég. transitive} \\ \text{complète} \\ \text{asymétrique} \end{array} \right\}$	ordre strict total
préordre total	$\left\{ \begin{array}{l} \text{transitive} \\ \text{fort. complète} \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} \text{nég. transitive} \\ \text{asymétrique} \end{array} \right\}$	ordre strict fort
semi-ordre	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ferrers} \\ \text{semi-transitive} \\ \text{réflexive} \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} \text{Ferrers} \\ \text{semi-transitive} \\ \text{irréflexive} \end{array} \right\}$	semi-ordre strict
ordre d'intervalles	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ferrers} \\ \text{réflexive} \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} \text{Ferrers} \\ \text{irréflexive} \end{array} \right\}$	ordre d'intervalles strict

Plutôt que de semi-ordre, l'école française préfère parler de *quasi-ordre*. S'il est vrai qu'historiquement c'est ce terme qui est apparu le premier, nous privilégierons cependant le mot semi-ordre dans un souci de cohérence avec le vocabulaire anglais ("semiorder").

Les relations de semi-ordre et d'ordre d'intervalles ont aussi la propriété d'être fortement complètes (voir les implications de la section 2.2.2); parfois "fortement complète" remplace "réflexive" dans leur définition.

Chacune des deux colonnes du tableau précédent présente des ensembles de relations qui ne sont pas disjoints, mais bien emboîtés :

- $R$  ordre total  $\Rightarrow R$  préordre total  $\Rightarrow R$  semi-ordre  $\Rightarrow R$  ordre d'intervalles
- $R$  ordre strict total  $\Rightarrow R$  ordre strict fort  $\Rightarrow R$  semi-ordre strict  $\Rightarrow R$  ordre d'intervalles strict.

La preuve de ces implications découle directement des implications de la section 2.2.2.

Remarquons que, par la définition de  $P$ ,  $I$  et  $J$ , si  $R = P \cup I$ , alors  $R^d = P \cup J$ . Ainsi, les relations de la colonne  $R^d$  correspondent aux parties asymétriques des relations de la colonne  $R$  (qui, puisqu'elles sont complètes, sont telles que  $J = \emptyset$ ). Par exemple, si  $R$  est un semi-ordre, sa partie asymétrique  $P (= R^d)$  est un semi-ordre strict; en outre, tout semi-ordre strict est la partie asymétrique d'exactly un semi-ordre, à savoir son semi-ordre dual.

Dans le cas des relations complètes, la dualité permet donc de passer de  $P$  à  $P \cup I$  et inversement; connaître  $P$ , c'est connaître  $P \cup I$ . Pour des relations non complètes, ce n'est plus le cas ( $(P \cup I)^d = P \cup J$ ). Cette réflexion nous amène à

considérer les relations binaires sous un angle quelque peu différent : c'est l'objet du paragraphe suivant.

A titre d'information, citons encore quelques relations particulières.

- $R$  est une *relation d'équivalence* ssi  $R$  est réflexive, symétrique et transitive.
- $R$  est un *ordre partiel* ssi  $R$  est réflexive, antisymétrique et transitive.
- $R$  est un *préordre partiel* ssi  $R$  est réflexive et transitive.
- $R$  est un *ordre strict partiel* ssi  $R$  est asymétrique et transitive.

Tout semi-ordre strict est un ordre strict partiel (se référer aux implications de la section 2.2.2).

### 2.2.8 Structure relationnelle de préférence

**Définition 1** *En accord avec [RV85], nous appelons structure (relationnelle) de préférence sur un ensemble  $X$ , tout triplet  $(P, I, J)$  de relations binaires sur  $X$  telles que*

- $P$  est asymétrique,
- $I$  est symétrique et réflexive,
- $J$  est symétrique et irreflexive,
- $P \cup I \cup J$  est fortement complète.

On note  $I_0 = \{(x, x) : x \in X\}$ .

Nous préconisons l'usage de ces structures de préférence, car elles permettent de parler indifféremment d'une relation  $R = P \cup I$  ou de sa partie asymétrique  $P$ , qu'on soit dans le cas d'une structure  $(P, I, J)$  complète ou pas. En effet, dans le cas où  $J$  est non vide, la connaissance de  $P$  n'induit plus la connaissance de  $I$  par le biais de la dualité : il est donc indispensable d'avoir une énumération exhaustive de  $P$  et d'au moins une des deux relations  $I$  et  $J$ .

Nous dirons que  $(P, I, J)$  a une structure :

- d'*ordre total* ssi  $P \cup I$  est un ordre total
- de *préordre total* ssi  $P \cup I$  est un préordre total
- de *semi-ordre* ssi  $P \cup I$  est un semi-ordre
- d'*ordre d'intervalles* ssi  $P \cup I$  est un ordre d'intervalles.

Lorsque  $J = \emptyset$  (comme dans les quatre cas précédents), on se permet de noter  $(P, I)$  à la place de  $(P, I, J)$ . Les structures de ce type ont été déjà largement étudiées. Cette thèse s'intéressera principalement à des structures (et des familles de structures) où  $J$  est non vide.

Une structure d'ordre total correspond à l'idée de rangement sans ex aequo. Ce fait est bien visible dans le résultat suivant (voir par exemple [RV85], p.16).

**Proposition 1**  $(P, I)$  a une structure d'ordre total sur  $X$  ssi il existe une fonction injective  $f$  à valeurs réelles sur  $X$  telle que  $xPy \Leftrightarrow f(x) > f(y)$ .

□

De la même manière, une structure de préordre total correspond à l'idée de rangement avec possibilité d'ex aequo. En effet, (voir par exemple [RV85], p.19)

**Proposition 2**  $(P, I)$  a une structure de préordre total sur  $X$  ssi il existe une fonction  $f$  à valeurs réelles sur  $X$  telle que

- $xPy \Leftrightarrow f(x) > f(y)$
- $xIy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ .

□

Notre recherche réserve une attention toute particulière aux structures de semi-ordre et d'ordre d'intervalles : nous leur consacrerons donc plus de place dans la prochaine section.

Pourquoi ce terme de “structure de préférence” ? Supposons un instant que  $X$  soit un ensemble d'objets, d'alternatives, ... sur lesquels une personne (un décideur) doit exprimer ses préférences. Face à chaque paire d'objets  $\{x, y\}$ , on peut lui proposer d'utiliser l'une des trois sentences suivantes (correspondant à trois situations fondamentales de préférence) :

- “Je préfère  $x$  à  $y$ ” (ou  $y$  à  $x$ ), qui est noté  $xPy$ ;
- “ $x$  et  $y$  sont indifférents à mes yeux”, noté  $xIy$  et  $yIx$ ;
- “ $x$  et  $y$  sont incomparables pour moi”, noté  $xJy$  et  $yJx$ .

Pour une question de cohérence avec la sémantique associée aux relations  $P$ ,  $I$  et  $J$ , on imposera que

- $P$  soit asymétrique,
- $I$  soit symétrique et réflexive,
- $J$  soit symétrique et irreflexive,
- $P \cup I \cup J$  soit fortement complète.

Dans ces conditions, le triple  $(P, I, J)$  issu du questionnement précédent est bien une structure relationnelle de préférence. Cet objet a donc une place très importante en pratique, puisqu'il correspond à ce qu'un décideur pourrait fournir comme information préférentielle. Il s'agit de pouvoir en faire quelque chose ! D'où l'intérêt de l'étude des (familles de) structures relationnelles de préférence, qui est l'objet principal de ce travail.

### Représentation graphique

Pour représenter graphiquement une structure de préférence, nous adopterons les conventions suivantes : dans un graphe avec autant de sommets que d'éléments de  $X$ ,

- un arc de  $x$  vers  $y$  représentera le fait que  $xPy$
- une arête entre  $z$  et  $w$  signifiera que  $zIw$  et  $wIz$
- les boucles  $xIx$  (c'est-à-dire les éléments de  $I_0$ ) pourront être omises.

### Représentation matricielle

Au niveau de la représentation matricielle, quand aucune équivoque n'est possible,  $(P, V, H)$  désignera le tableau correspondant à une structure  $(P, I, J)$  (la notation  $((P, I, J), V, H)$  est plus correcte, mais aussi beaucoup plus lourde). A l'intérieur de la matrice, au lieu d'utiliser des 0 et des 1 comme dans la section 2.2.4, nous choisirons de nommer explicitement les relations  $P$ ,  $I$  et  $J$  de la structure (notons qu'un "blanc" dans une case  $[x, y]$  correspondra au fait que  $yPx$ ). En outre, nous représenterons la relation  $I_0$  (c'est-à-dire tous les couples de type  $(x, x)$ ) par des  $\bullet$ ; en effet, cette présentation s'avère plus claire car elle met en évidence les couples non triviaux de  $I$  (i.e. ceux qui ne sont pas dans  $I_0$ ) et permet de distinguer du premier coup d'oeil si  $V = H$  (dans ce cas, les  $\bullet$  sont sur la diagonale de la matrice).

## 2.3 Ordre d'intervalles et semi-ordre

Il peut paraître étrange que les mathématiciens se plaisent à définir les relations binaires particulières en termes des propriétés qu'elles satisfont. Il faut en effet beaucoup d'imagination à une personne non initiée pour réaliser qu'en dessous d'une relation fortement complète, transitive et antisymétrique se cache l'idée de rangement sans ex-aequo! Il en va de même pour la structure de semi-ordre. Si les propriétés de Ferrers et de semi-transitivité ne semblent pas très intuitives a priori, le célèbre exemple de la tasse de thé (proposé par Luce, cf. [Luc56]) met immédiatement en lumière l'intérêt de ce type de structure.

Si l'on vous présente deux tasses de thé, contenant respectivement 10 et 12 grammes de sucre, vous serez probablement incapable de les distinguer. Cependant, vous avez certainement une préférence entre un thé avec ou sans sucre... Il faut donc admettre que, bien que vous soyez une fine bouche, votre perception a

des limites, comme d'ailleurs la plupart des outils de mesure. Ceux-ci, comme vos papilles gustatives, ont un *seuil* (de précision) en dessous duquel aucune différence n'est perçue. La structure de semi-ordre permet de modéliser ce concept de seuil.

### 2.3.1 Semi-ordre

Comme nous l'avons déjà dit plus haut,

**Définition 2**  $(P, I)$  a une structure de semi-ordre (sur un ensemble  $X$ ) si et seulement si  $P \cup I$  est de Ferrers, semi-transitive et fortement complète.

On peut en outre montrer que

**Proposition 3** (Théorème de Scott et Suppes, 1958)  $(P, I)$  a une structure de semi-ordre (sur un ensemble  $X$ ) si et seulement si il existe une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et un nombre réel positif  $s$  tels que  $\forall x, y \in X$  :

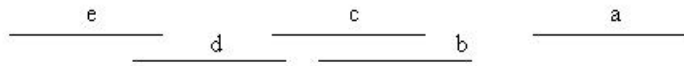
- $(x, y) \in P \iff f(x) > f(y) + s$
- $(x, y) \in I \iff f(x) \leq f(y) + s \text{ et } f(y) \leq f(x) + s.$

□

Pour une démonstration, voir notamment [RV85], p.37.

Intuitivement, un élément sera préféré strictement à un autre si la “distance” qui les sépare est “suffisamment grande”, cette dernière notion étant concrétisée par la valeur de  $s$ . On peut également envisager cette représentation d'un semi-ordre comme une association, à chaque  $x$ , d'un intervalle réel de longueur constante, dont l'extrémité gauche est  $f(x)$  et l'extrémité droite,  $f(x) + s$ . L'élément  $x$  est préféré à l'élément  $y$  ssi l'extrémité gauche de l'intervalle associé à  $x$  est située strictement à droite de l'extrémité droite de l'intervalle associé  $y$ .

**Exemple 2** Soit  $X = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $P = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, e)\}$  et  $I = I_0 \cup \{(b, c), (c, b), (c, d), (d, c), (d, e), (e, d)\}$ .  $(P, I)$  a une structure de semi-ordre : la Fig. 2.6 en montre une représentation possible (chaque élément de  $X$  est représenté par un intervalle de longueur constante).

FIG. 2.6 – Représentation du semi-ordre  $(P, I)$  de l'exemple 2.

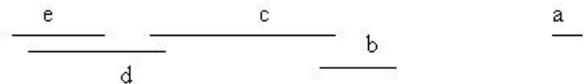
Voici une autre caractérisation d'une structure de semi-ordre.

**Proposition 4**  $(P, I)$  a une structure de semi-ordre (sur un ensemble  $X$ ) si et seulement si il existe une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et une fonction  $\sigma : f(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que  $\forall x, y \in X$  :

- $(x, y) \in P \Leftrightarrow f(x) > f(y) + \sigma(f(y))$
- $(x, y) \in I \Leftrightarrow f(x) \leq f(y) + \sigma(f(y))$  et  $f(y) \leq f(x) + \sigma(f(x))$
- $f(x) \leq f(y) \Leftrightarrow f(x) + \sigma(f(x)) \leq f(y) + \sigma(f(y))$   
(condition de cohérence, notée *Coh*).

La condition de cohérence *Coh* correspond à l'idée que les deux ordres totaux induits sur  $X$  par les extrémités gauches (les  $f(x)$ ) et droites (les  $f(x) + \sigma(f(x))$ ) des intervalles (associés aux éléments de  $X$ ) sont les mêmes. Ou encore, les relations de départ permettent d'obtenir une représentation de chaque élément de  $X$  par un intervalle, où aucun intervalle n'est inclus dans un autre (ce ne sera plus le cas pour les ordres d'intervalles - cf. section 2.3.2).

La Fig. 2.7 propose une autre représentation du semi-ordre de l'exemple 2, par des intervalles de longueur variable.

FIG. 2.7 – Autre représentation du semi-ordre  $(P, I)$  de l'exemple 2.

Dans certaines définitions de semi-ordre, on trouve une condition de cohérence légèrement différente, plus large :

$$f(x) < f(y) \Rightarrow f(x) + \sigma(f(x)) \leq f(y) + \sigma(f(y)) \quad (2.1)$$

Il est évident que des fonctions  $f$  et  $\sigma$  vérifiant *Coh* satisfont à la condition (2.1). Montrons que le contraire est vrai aussi.

Supposons qu'il existe  $f$  et  $\sigma$  satisfaisant (2.1) et pas la condition de cohérence *Coh*. Cela veut dire que :

- soit  $\exists x, y \in X$  tels que  $f(x) < f(y)$  et  $f(x) + \sigma(f(x)) = f(y) + \sigma(f(y))$ ,
- soit  $\exists x, y \in X$  tels que  $f(x) = f(y)$  et  $f(x) + \sigma(f(x)) < f(y) + \sigma(f(y))$ , ce qui est évidemment impossible.

On peut alors construire de nouvelles fonctions  $f'$  et  $\sigma'$  satisfaisant *Coh* :

- si  $f(x) < f(y)$  et  $f(x) + \sigma(f(x)) = f(y) + \sigma(f(y))$ , on définit  $\sigma'(f(y)) = \sigma(f(y)) + 1$  si il n'existe pas de  $z \in X$  tel que  $zPy$ ; sinon,  $\sigma'(f(y)) = \sigma(f(y)) + 0,5 \cdot [l - f(y) - \sigma(f(y))]$  où  $l = \min\{f(t) | tPy\}$ .
- Pour le reste,  $f' = f$  et  $\sigma' = \sigma$ .

Nous préférons *Coh* à (2.1) car elle nous a semblé plus facile à manipuler.

Plusieurs autres définitions équivalentes de semi-ordre ont été présentées dans la littérature (voir notamment [PV97]). Dans la perspective des résultats de notre recherche, pointons les équivalences suivantes :

**Proposition 5**  $(P, I)$  est un semi-ordre ssi  $[P \cup I$  est fortement complète et tout circuit de  $G(X, P \cup I)$  contient plus de  $I$  que de  $P]$  ssi  $[il$  existe un ordre total  $T$  tel que  $TPT \subseteq P]$ .

(pour plus de détails, voir par exemple [PV97], [RV85], [Mon78], ou encore [DMRV86].)

La condition  $TPT \subseteq P$  peut s'interpréter comme suit : dans le tableau  $((P, I), T, T)$  correspondant à la structure  $(P, I)$ , au-dessus et à droite de tout  $P$ , il y a un  $P$  (voir Fig. 2.8).

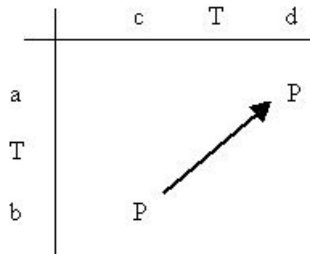


FIG. 2.8 -  $aTbPcTd$  implique  $aPd$ .

Les  $P$  sont donc regroupés en un bloc compact (situé au-dessus de la diagonale, puisque  $P$  est asymétrique), qu'on pourrait délimiter par une ligne imaginaire en

forme d'escalier. On dit parfois que la matrice  $((P, I), T, T)$  est “*en escalier*” (ou *step type* en anglais).

Sur notre exemple 2 : si on prend l'ordre total  $T$  correspondant au rangement  $a, b, c, d, e$ , voici le tableau  $((P, I), T, T)$  :

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$a$	•	$P$	$P$	$P$	$P$
$b$		•	$I$	$P$	$P$
$c$		$I$	•	$I$	$P$
$d$			$I$	•	$I$
$e$				$I$	•

Il convient de donner quelques précisions quand à la relation  $T$  apparaissant dans la caractérisation matricielle d'un semi-ordre. On peut déjà comprendre que  $xPy \Rightarrow xTy$ ; sinon, on aurait  $yTxPyTy$ , ce qui impliquerait  $yPy$ . Comme dans [DMRV86] (p. 438 et p. 448), définissons

- *trace gauche* de  $P$ , la relation  $T^l(P) = \{(x, y) \in X^2 : \{z \in X : zPx\} \subseteq \{z \in X : zPy\}\}$
- *trace droite* de  $P$ , la relation  $T^r(P) = \{(x, y) \in X^2 : \{z \in X : xPz\} \supseteq \{z \in X : yPz\}\}$
- *trace* de  $P$ , la relation  $T(P) = T^l(P) \cap T^r(P)$ .

Les ordres totaux  $T$  vérifiant la proposition 5 sont exactement ceux qui sont inclus dans  $T(P)$  (voir à nouveau [Mon78] et [DMRV86]).

On a pris l'habitude arbitraire de représenter numériquement un semi-ordre par une fonction  $f$  et des seuils à droite. Il est important pour la suite de noter que la définition de semi-ordre est équivalente à ce qui suit.

**Proposition 6** *Une structure  $(P, I)$  est un semi-ordre si et seulement si il existe une fonction  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  et un nombre réel positif  $s$  tels que  $\forall x, y \in X$  :*

- $(x, y) \in P \Leftrightarrow g(x) - s > g(y)$
- $(x, y) \in I \Leftrightarrow g(x) - s \leq g(y)$  et  $g(y) - s \leq g(x)$

*si et seulement si il existe une fonction  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  et une fonction  $\tau : g(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que  $\forall x, y \in X$  :*

- $(x, y) \in P \Leftrightarrow g(x) - \tau(g(x)) > g(y)$
- $(x, y) \in I \Leftrightarrow g(x) - \tau(g(x)) \leq g(y)$  et  $g(y) - \tau(g(y)) \leq g(x)$

- $g(x) \leq g(y) \iff g(x) - \tau(g(x)) \leq g(y) - \tau(g(y))$  (autre forme de la condition de cohérence, notée Coh’).

□

Lorsque l’on dispose d’une représentation d’un semi-ordre par une fonction  $f$  et des seuils “à droite”  $\sigma$ , il suffit de poser  $\forall x \in X : g(x) = f(x) + \sigma(f(x))$  et  $\tau(g(x)) = \sigma(f(x))$  pour avoir une représentation comme dans la proposition précédente. Dans le cas d’une représentation à seuils constants, la valeur du seuil est conservée.

### Semi-ordre partiel

A notre connaissance, il n’existe pas de consensus sur la définition de semi-ordre partiel. A titre d’information, nous en présentons deux. Notons que la définition de Doignon et al. implique celle de Roubens et Vincke, mais pas le contraire.

- Selon [RV85],  $(P, I, J)$  est un semi-ordre partiel ssi  $PP \subseteq P$  (c’est-à-dire  $P$  transitive) et tout circuit de  $P \cup I$  contient plus d’arcs  $I$  que d’arcs  $P$ .
- Selon [DDF87],  $(P, I, J)$  est un semi-ordre partiel (de type 1) ssi ( $I$  est réflexive et symétrique et) il existe des semi-ordres  $(P_k, I_k)$  tels que  $P = \bigcap_k P_k$  et  $I \subseteq I_k \forall k$ .

Ceci est équivalent à ( $I$  est réflexive et symétrique,) tout circuit de  $P \cup I$  contient plus d’arcs  $I$  que d’arcs  $P$ , et  $P \nabla I \subseteq P$ ;

notons que  $P \nabla I$  est la relation formée par toutes les paires  $\{x, y\}$  pour lesquelles il existe  $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$ , avec  $(x, x_0), (x_0, x_1), \dots, (x_n, y) \in P \cup I$ , tels que le nombre de couples pris dans  $P$  est strictement plus grand que le nombre de couples pris dans  $I$ .

Dans les chapitres 3 et 4, nous serons amenée à travailler avec des relations aux propriétés encore un peu plus faible que celles de Roubens et Vincke : on n’imposera plus au départ la transitivité de  $P$ .

### 2.3.2 Ordre d’intervalles

**Définition 3**  $(P, I)$  a une structure d’ordre d’intervalles si et seulement si  $P$  est irréflexive et de Ferrers.

**Proposition 7**  $(P, I)$  a une structure d'ordre d'intervalle ssi il existe une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et une fonction  $\sigma : f(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que  $\forall x, y \in X$  :

- $(x, y) \in P \Leftrightarrow f(x) > f(y) + \sigma(f(y))$
- $(x, y) \in I \Leftrightarrow f(x) \leq f(y) + \sigma(f(y))$  et  $f(y) \leq f(x) + \sigma(f(x))$ .

□

En d'autres termes, si, à chaque élément de  $X$ , on peut associer un intervalle (de longueur variable) de telle sorte que

- $xPy$  ssi l'intervalle représentant  $x$  est strictement à droite de celui qui représente  $y$
  - $xIy$  ssi les intervalles représentant  $x$  et  $y$  ont une intersection non vide,
- alors  $(P, I)$  est un ordre d'intervalles (et réciproquement).

Tout semi-ordre est donc un ordre d'intervalles.

Comme pour les semi-ordres, il existe différentes caractérisations de la notion d'ordre d'intervalles, outre celle en termes de représentation numérique. Relevons-en deux, sur lesquelles nous reviendrons par la suite.

**Proposition 8**  $(P, I)$  est un ordre d'intervalles ssi  $[P \cup I$  est fortement complète et tout circuit de  $P \cup I$  contient au moins deux  $I$  consécutifs] ssi [il existe deux ordres totaux  $V$  et  $H$  sur  $X$  tels que  $VPH \subseteq P$ ].

□

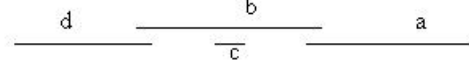
(Voir notamment [Mon78] et [DMRV86].)

En outre, les ordres totaux  $V$  et  $H$  vérifiant la proposition 8 sont exactement ceux inclus respectivement dans  $T^r(P)$  et  $T^l(P)$  (voir à nouveau [Mon78] et [DMRV86]).

**Exemple 3** Soit  $X = \{a, b, c, d\}$ , soit la structure de préférence  $(P, I)$  définie par la matrice suivante :

	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	•	$I$	$P$	$P$
$c$		$I$	•	$P$
$b$	$I$	•	$I$	$I$
$d$		$I$		•

On constate que cette matrice  $\left((P, I), V, H\right)$  est "en escalier" ( $VPH \subseteq P$ ) :  $(P, I)$  est un ordre d'intervalles; en voici une représentation par des intervalles (cf. Fig 2.9).

FIG. 2.9 – Représentation de l'ordre d'intervalle  $(P, I)$  de l'exemple 3.

Une représentation numérique possible de cet ordre d'intervalles :

$x$	$f(x)$	$f(x) + \sigma(f(x))$
$a$	6	8
$b$	2	7
$c$	4	5
$d$	1	3

Tout comme pour les semi-ordres, le fait de représenter les ordres d'intervalles avec des seuils “à droite” est purement conventionnel. En effet,

**Proposition 9** *Une structure  $(P, I)$  est un ordre d'intervalles si et seulement si il existe une fonction  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  et une fonction  $\tau : g(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que  $\forall x, y \in X$  :*

- $(x, y) \in P \iff g(x) - \tau(g(x)) > g(y)$
- $(x, y) \in I \iff g(x) - \tau(g(x)) \leq g(y)$  et  $g(y) - \tau(g(y)) \leq g(x)$ .

Comme dans le cas des semi-ordres, on passe sans peine d'une représentation “à droite” à une représentation “à gauche” (et vice-versa).

Dans certains ouvrages, les auteurs privilégient ce qui va suivre comme définition d'ordre d'intervalle, plus large :

**Proposition 10**  *$(P, I)$  a une structure d'ordre d'intervalles ssi il existe une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et une fonction  $\sigma : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que  $\forall x, y \in X$  :*

- $(x, y) \in P \iff f(x) > f(y) + \sigma(y)$
- $(x, y) \in I \iff f(x) \leq f(y) + \sigma(y)$  et  $f(y) \leq f(x) + \sigma(x)$ .

La différence avec ce qui a été introduit précédemment dans ce travail se situe au niveau des seuils, qui dépendent ici directement des objets  $x \in X$ , et non plus de la représentation numérique  $f(x)$  de ces objets. Il se peut donc que  $f(x) = f(y)$ , mais que  $f(x) + \sigma(x) < f(z)$  alors que  $f(y) + \sigma(y) \geq f(z)$ . Notre choix s'est porté sur la formulation de la proposition 7 qui semblait le mieux

correspondre avec la réalité pratique : en effet, dans le cas où le couple  $(P, I)$  correspond à une structure de préférence, il semble peu explicable de donner la même évaluation à deux objets, alors qu'on les compare de manière différente à un troisième... On peut cependant montrer que les formulations présentes dans les propositions 7 et 10 sont équivalentes.

En effet, il est évident que 7 implique 10. De plus, dans l'autre sens, ce qui pourrait poser problème serait une situation comme suit :  $a, b \in X$ ,  $a \neq b$ ,  $f(a) = f(b)$  et  $\sigma(a) < \sigma(b)$ . Dans ce cas, on peut définir une nouvelle fonction  $f'$  qui vérifie (1) :  $f'(a) = f(a) - e$  où  $e > 0$ ,  $f'(a) > \max\{f(t) + \sigma(t) | aPt\}$ . Notons qu'on peut utiliser ce genre d'argument car on est dans le cas d'un ensemble  $X$  fini.

### Ordre d'intervalles partiel

A nouveau, il n'existe pas de consensus sur la définition d'ordre d'intervalles partiel. En voici deux, à titre d'information.

- Selon [RV85],  $(P, I, J)$  est un ordre d'intervalles partiel ssi  $PP \subseteq P$  ( $P$  transitive) et la relation  $PI$  est acyclique.
- Selon [DDF87],  $(P, I, J)$  est un ordre d'intervalles partiel (de type 1) ssi ( $I$  est symétrique et réflexive et) il existe des ordres d'intervalles  $(P_k, I_k)$  tels que  $P = \bigcap_k P_k$  et  $I \subseteq I_k \forall k$ .

Ceci est équivalent à ( $I$  est réflexive et symétrique,)  $P \cap I = \emptyset$  et  $PIP \in P$ .

Dans les structures que nous envisagerons, nous n'imposerons pas la transitivité de  $P$  a priori.

### 2.3.3 Note sur les biordres

**Définition 4** Une relation  $R$  sur  $X$  est un biordre ssi  $R$  possède la propriété de Ferrers.

**Proposition 11** Une relation  $R$  sur  $X$  est un biordre ssi il existe deux fonctions  $f$  et  $g$  à valeurs réelles sur  $X$  telles que  $\forall x, y \in X$  :

$$xRy \Leftrightarrow f(x) > g(y) .$$

Si  $(P, I)$  a une structure d'ordre d'intervalle, la relation  $P$  est donc un biordre irréflexif, et  $P \cup I$  est un biordre réflexif. Comme [DMRV86], nous aurions pu nous intéresser à ce type de structure, plus général. Cependant, notre recherche

ayant un point de départ essentiellement pratique, les objets que nous avons à traiter sont toujours (ir)réflexifs, de par la nature même des relations  $P$  et  $I$  des structures de préférence. Nous renvoyons donc le lecteur intéressé à [DDF84], [DMRV86] ou encore [DDF87].

Nous reprenons néanmoins ici un résultat de [DMRV86] qui nous sera utile plus tard.

**Proposition 12** *Soit un biordre  $R$ .*

1. *Les préordres totaux  $C$  (resp.  $D$ ) vérifiant  $RC \subseteq R$  (resp.  $DR \subseteq R$ ) sont ceux inclus dans  $T^l(R)$  (resp.  $T^r(R)$ ).*
2. *De plus, ils coïncident avec les relations  $C^g$  (resp.  $D^f$ ) construites comme suit à partir des fonctions  $g$  (resp.  $f$ ) de la proposition 11 :*

$$yC^g y' \Leftrightarrow g(y) \geq g(y')$$

$$\text{(resp. } xD^f x' \Leftrightarrow f(x) \geq f(x')\text{)}.$$

3. *En particulier, les ordres totaux  $C$  (resp.  $D$ ) vérifiant  $RC \subseteq R$  (resp.  $DR \subseteq R$ ) coïncident avec les ordres totaux  $H$  (resp.  $V$ ) pour lesquels il existe un tableau “en escalier”  $(R, V, H)$ .*

Lorsque l'on dispose d'une représentation numérique d'un ordre d'intervalles (et donc aussi d'un semi-ordre), en trouver une représentation matricielle “en escalier” n'est donc pas difficile : il suffit de construire des ordres totaux  $V$  et  $H$  qui prolongent les préordres totaux  $D^f$  et  $C^g$  comme dans la proposition 12. Remarquons que dans le cas d'un semi-ordre, les seuils constants (ou la condition de cohérence, selon la définition utilisée) assurent que  $D^f = C^g$ .

Inversement, lorsque l'on dispose d'une représentation matricielle “en escalier”  $(P, V, H)$  d'un ordre d'intervalle, on pourra représenter chaque élément de  $X$  par  $n$  intervalles dont les extrémités gauches et droites respectent les ordres totaux  $V$  et  $H$ , respectivement.

## 2.4 Préordre total

Comme nous l'avons vu au §2.2.7,  $(P, I)$  a une structure de préordre total ssi  $P \cup I$  est un préordre total, c'est-à-dire  $P \cup I$  est fortement complète et transitive. La relation  $P$  est un ordre strict fort (asymétrique et négativement transitive). Le préordre total correspond à l'idée de rangement avec possibilité d'ex aequo (voir proposition 2, p. 26). Autres caractérisations (voir [RV85]) :



Dans [De 02], on trouve une expression mathématique de cette propriété (nous en modifions ici quelque peu la forme) :

**Proposition 14** *Soit  $(P, I)$  une structure de préférence sur  $X$ .  $(P, I)$  a une structure de préordre total si et seulement si il existe un ordre total  $T$  sur  $X$  tel que*

- $TPT \subseteq P$
- $xPy \Rightarrow$  il existe  $z \neq y$  tel que  $xTzTy$  et  $zPz_+$ .

(Nous notons  $z_+$ , le successeur de  $z$  dans l'ordre total  $T$  :  $zTz_+$  et il n'existe pas de  $v$  dans  $X \setminus \{z, z_+\}$  tel que  $zTvTz_+$ ).

La première partie de cette caractérisation matricielle montre que tout préordre total est un semi-ordre, et donc aussi un ordre d'intervalle. C'est la raison pour laquelle nous serons amenée à envisager ce type de structure.

Notons que  $xPy \Rightarrow xTy$ . En effet, si  $xPy$  et  $yTx$ , on a  $yTxPyTy$ , d'où  $yPy$ , ce qui est impossible. Puisque  $P \subseteq T \subseteq P \cup I$ , on dit que l'ordre total  $T$  est compatible avec le préordre total  $(P, I)$ .

## 2.5 Famille de structures de préf. complètes

**Définition 5** *Nous appelons famille de structures de préférence, toute collection finie  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2), \dots, (P_n, I_n, J_n)]$  de structures relationnelles de préférence. Si au moins une des relations  $J_k$  est non vide, on parle de famille de structures de préférence non complètes. Sinon, on dit que  $\mathcal{P}$  est une famille de structures complètes.*

[DMRV86] étudie des familles  $\mathcal{P}$  de structures de préférence complètes (où  $J_k = \emptyset \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ). Nous reprenons au paragraphe 2.5.1 les résultats qui nous seront utiles dans notre propre recherche au cours des chapitres suivants.

Dans la section 2.5.2, nous introduisons notre vision de ce qu'est une famille de préordres totaux, parlons des cas particuliers des familles homogènes puis emboîtées, et présentons quelques nouveaux résultats.

Un schéma récapitulatif (§ 2.5.3) permet de visualiser les liens existant entre les différentes sortes de familles présentées.

La section 2.5.4 traite rapidement du cas particulier des familles de structures de préférence complètes et emboîtées. Nous en dirons davantage à ce sujet au chapitre 4.

Pour alléger quelque peu l'écriture, nous conviendrons une fois pour toutes que “ $\forall k$ ” sera utilisé en lieu et place de “ $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ” ( $n$  correspondant au nombre de structures d'une famille).

### 2.5.1 Résultats antérieurs

Le vocabulaire et les résultats présentés dans cette section sont extraits de [DMRV86], et constituent la base essentielle sur laquelle s'appuie le chapitre 3, partie majeure de notre recherche.

#### Familles d'ordres d'intervalles

Nous ne nous attardons pas sur les familles (quelconques)  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$  d'ordres d'intervalles, qui sont des collections d'ordres d'intervalles pouvant ne rien avoir en commun, et donc a priori sans autre propriété que celles de chacune des structures de la famille (voir à ce sujet la section 2.3.2).

#### Familles de semi-ordres

De même, les familles de semi-ordres sont des collections d'ordres d'intervalles dont chacun vérifie la condition de cohérence *Coh* introduite précédemment. Cela donne :

**Définition 6**  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$  est une famille de semi-ordres si et seulement si il existe  $n$  fonctions  $f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $n$  fonctions  $\sigma_k : f_k(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) telles que  $\forall k, \forall x, y \in X$  :

- $(x, y) \in P_k \Leftrightarrow f_k(x) > f_k(y) + \sigma_k(f_k(y))$
- $(x, y) \in I_k \Leftrightarrow f_k(x) \leq f_k(y) + \sigma_k(f_k(y))$  et  $f_k(y) \leq f_k(x) + \sigma_k(f_k(x))$
- $f_k(x) \leq f_k(y) \Leftrightarrow f_k(x) + \sigma_k(f_k(x)) \leq f_k(y) + \sigma_k(f_k(y))$   
(cohérence de type 1, notée *Coh1*).

La condition de cohérence *Coh1* est une réécriture de *Coh* pour le cas des familles de structures ; c'est une condition intrastructurelle.

#### Familles homogènes à droite d'ordres d'intervalles

**Définition 7**  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$  est une famille homogène à droite d'ordres d'intervalles si et seulement si il existe une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $n$  fonctions  $\sigma_k : f(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) telles que  $\forall k, \forall x, y \in X$  :

- $(x, y) \in P_k \Leftrightarrow f(x) > f(y) + \sigma_k(f(y))$
- $(x, y) \in I_k \Leftrightarrow f(x) \leq f(y) + \sigma_k(f(y))$  et  $f(y) \leq f(x) + \sigma_k(f(x))$ .

**Proposition 15** Soit  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$  une famille de structures de préférence sur  $X$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.

1.  $\mathcal{P}$  est une famille homogène à droite d'ordres d'intervalles.
2. Il existe des ordres totaux  $V, H_1, H_2, \dots, H_n$  sur  $X$  tels que  $(P_k, V, H_k)$  est une matrice en escalier pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
3.  $\bigcup_{k=1}^n (P_k P_k \cup P_k I_k)$  est asymétrique.
4. Il existe des fonctions  $F_1, F_2, \dots, F_n$  de  $X$  dans l'ensemble des intervalles réels fermés telles que pour chaque  $x$  fixé,  $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$  ont la même extrémité inférieure et

$$xP_k y \Leftrightarrow F_k(x) > F_k(y)^2$$

$$xI_k y \Leftrightarrow F_k(x) \cap F_k(y) \neq \emptyset.$$

□

**Exemple 5** Soit  $X = \{a, b, c, d\}$ , soit  $P_1 = \{(a, b), (a, d), (b, d), (c, d)\}$ ,  $P_2 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c)\}$  et  $P_3 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d)\}$ . Pour  $k \in \{1, 2, 3\}$ , posons  $I_k = (P_k \cup P_k^-)^c$ . Chacune des  $(P_k, I_k)$  est une structure d'ordre d'intervalles. On peut les représenter graphiquement comme dans la Figure 2.11.

---

<sup>2</sup>Si  $A$  et  $B$  sont deux intervalles réels fermés, on dira que  $A > B$  ssi  $\forall a \in A, \forall b \in B, a > b$ .

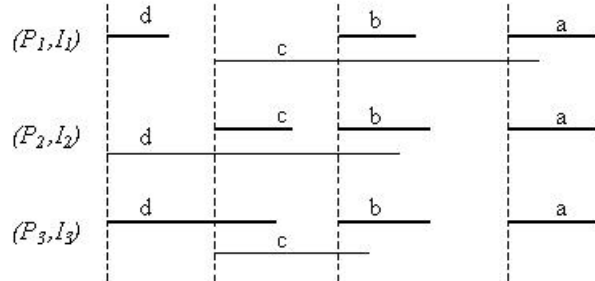


FIG. 2.11 – Représentation des ordres d’intervalles  $(P_1, I_1)$ ,  $(P_2, I_2)$  et  $(P_3, I_3)$  de l’ex. 5 : ils constituent une famille homogène à droite d’ordres d’intervalles.

En projetant les extrémités des intervalles introduits dans la Fig. 2.11 sur un axe horizontal (représentant l’ensemble des nombres réels) muni d’une origine et d’une unité, on obtient une représentation numérique par des intervalles réels fermés satisfaisant à la condition 4 de la proposition précédente.  $[(P_1, I_1), (P_2, I_2), (P_3, I_3)]$  est donc une famille homogène à droite d’ordres d’intervalles. Matriciellement, les trois structures de la famille peuvent s’encoder dans des tableaux en escalier, avec un ordre total  $V$  commun (cf. condition (2) de la proposition 15).

$(P_1, I_1)$	$a$	$c$	$b$	$d$
$a$	$\bullet$	$I$	$P$	$P$
$b$		$I$	$\bullet$	$P$
$c$	$I$	$\bullet$	$I$	$P$
$d$				$\bullet$
$(P_2, I_2)$	$a$	$b$	$d$	$c$
$a$	$\bullet$	$P$	$P$	$P$
$b$		$\bullet$	$I$	$P$
$c$			$I$	$\bullet$
$d$		$I$	$\bullet$	$I$
$(P_3, I_3)$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$\bullet$	$P$	$P$	$P$
$b$		$\bullet$	$I$	$P$
$c$		$I$	$\bullet$	$I$
$d$			$I$	$\bullet$

Dans la Figure 2.12, on peut voir une représentation graphique de chacune des structures  $(P_k, I_k)$  ( $k = 1, 2, 3$ ), ainsi que des relations  $P_k P_k \cup P_k I_k$  et  $P_k P_k \cup I_k P_k$  qui leur correspondent ; on constate que la réunion des relations  $P_k P_k \cup P_k I_k$  est bien asymétrique (contrairement à la réunion des  $P_k P_k \cup I_k P_k$  - nous y reviendrons au paragraphe suivant).

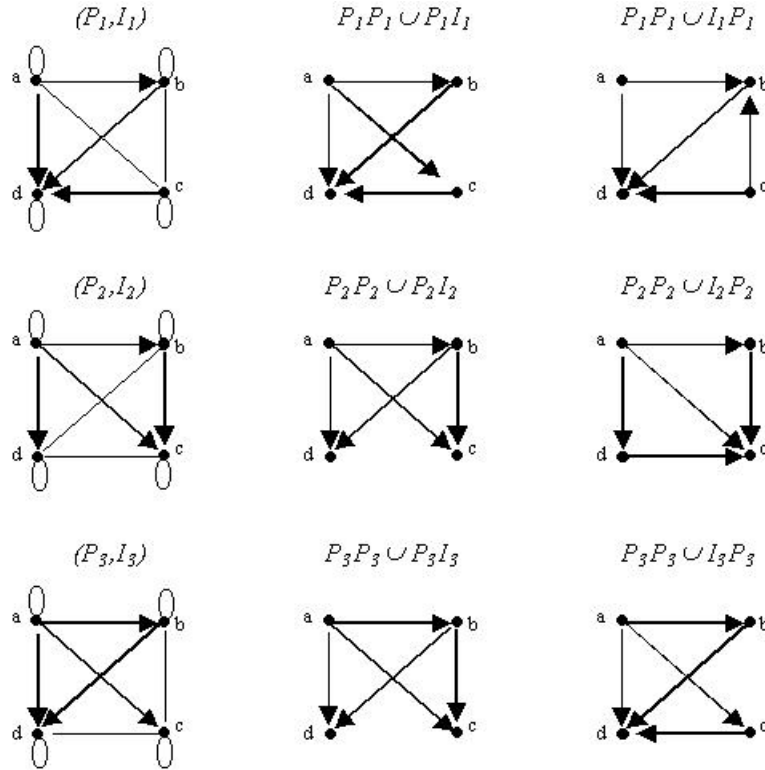


FIG. 2.12 – Représentations graphiques liées à la famille homogène à droite d’ordres d’intervalles (exemple 5).

Le terme “homogène à droite” qui apparaît dans la dénomination d’un tel type de famille pourrait à première vue paraître mal choisi, puisque c’est bien entre les côtés gauches des intervalles représentant un même élément  $x$  qu’il existe une homogénéité. Ce n’est pas là qu’il faut trouver l’explication du choix de ce vocabulaire, mais bien dans ce qui suit (voir [DMRV86]). Comme nous l’avons vu au paragraphe 2.3.1, si  $R$  est une relation sur  $X$ , on appelle *trace gauche de  $R$*  la

relation  $T^l(R)$  définie par

$$xT^l(R)y \Leftrightarrow \{z \in X \mid zRx\} \subseteq \{z \in X \mid zRy\},$$

et *trace droite* de  $R$  la relation  $T^r(R)$  définie par

$$xT^r(R)y \Leftrightarrow \{z \in X \mid xRz\} \supseteq \{z \in X \mid yRz\}.$$

Dans le cas d'une famille homogène à **droite** d'ordres d'intervalles, l'intersection des traces **droites** des relations  $P_k$  de la famille,  $T^r = \bigcap_{k=1}^n T^r(P_k)$  est une relation complète (et même fortement complète). Par ailleurs,  $(P_k, V, H_k)$  est en escalier pour tout  $k$  ssi  $V \subseteq T^r$  et  $H_k \subseteq T^l(P_k)$ .

Notons que nous n'insistons pas énormément sur cette notion de trace car elle n'est pas généralisable au cas des familles de structures de préférence non complètes, qui constituent l'objet principal de ce travail.

Dans l'exemple précédent (ex. 5), on peut voir que :

- $T^r(P_1) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, b), (c, d)\} \cup I_0$
- $T^r(P_2) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d), (d, c)\} \cup I_0$
- $T^r(P_3) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d), (d, c)\} \cup I_0$

d'où  $T^r = \bigcap_{k=1}^3 T^r(P_k) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\} \cup I_0$ .  $T^r$  est bien une relation complète, c'est même un ordre total.

Par contre, si l'on considère

- $T^l(P_1) = \{(a, c), (a, b), (a, d), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d)\} \cup I_0$ ,
- $T^l(P_3) = \{(a, b), (a, d), (a, c), (b, d), (b, c), (d, b), (d, c)\} \cup I_0$ ,
- $T^l(P_3) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, b), (c, d)\} \cup I_0$ ,

on constate que  $T^l = \bigcap_{k=1}^3 T^l(P_k) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d)\} \cup I_0$  :  $T^l$  n'est pas une relation complète,  $[(P_1, I_1), (P_2, I_2), (P_3, I_3)]$  n'est pas une famille homogène à gauche d'ordres d'intervalles (voir section suivante).

Mentionnons encore un résultat de [DMRV86] (p.443), qui généralise la proposition 12 et permet d'établir le lien entre représentation numérique et représentation matricielle. Nous l'adaptions ici à nos propres notations.

**Proposition 16** *Soit  $\mathcal{P}$  une famille de structures de préférence sur  $X$ , soit  $D$  un préordre total sur  $X$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. Il existe une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $n$  fonctions  $\sigma_k : f(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) telles que  $\forall k, \forall x, y \in X$  :
  - $(x, y) \in P_k \Leftrightarrow f(x) > f(y) + \sigma_k(f(y))$
  - $(x, y) \in I_k \Leftrightarrow f(x) \leq f(y) + \sigma_k(f(y))$  et  $f(y) \leq f(x) + \sigma_k(f(x))$
  - $xDy \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$ .
2.  $DP_k \subseteq P_k$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
3.  $D \subseteq T^r$ .

De plus, quand  $D$  est un ordre total, ces conditions sont équivalentes à la suivante :

il existe des ordres totaux  $H_1, H_2, \dots, H_n$  sur  $X$  tels que les matrices  $(P_k, D, H_k)$  soient en escalier (c'est-à-dire  $DP_k H_k \subseteq P_k$ ).

□

Lorsque l'on dispose d'une représentation numérique d'une famille homogène à droite d'ordres d'intervalles, en trouver une représentation matricielle "en escalier" n'est donc pas difficile : il suffit de construire des ordres totaux  $V$  et  $H_k$  qui prolongent les préordres totaux  $D$  et  $C_k$  suivants :

- $xDy \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$
- $xC_k y \Leftrightarrow f(x) + \sigma_k(f(x)) \geq f(y) + \sigma_k(f(y))$ .

Inversement, lorsque l'on dispose d'une représentation matricielle "en escalier", on pourra facilement représenter chaque élément de  $X$  par  $n$  intervalles dont les extrémités gauches sont communes aux  $n$  représentations et respectent l'ordre total  $V$ , et les extrémités droites respectent les ordres  $H_i$  qui les concernent.

Des théorèmes similaires à la proposition 16 peuvent bien entendu être établis pour les autres types de familles qui vont suivre ; nous n'énoncerons cependant plus ces résultats. Nous tâcherons de garder toujours en mémoire ce lien entre représentation matricielle et représentation numérique.

### Familles homogènes à gauche d'ordres d'intervalles

On définit de manière symétrique *famille homogène à gauche d'ordres d'intervalles*. En termes de représentation numérique :

**Définition 8**  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$  est une famille homogène à gauche d'ordres d'intervalles si et seulement si il existe une fonction  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $n$  fonctions  $\tau_k : g(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) telles que  $\forall k, \forall x, y \in X$  :

- $(x, y) \in P_k \Leftrightarrow g(x) - \tau_k(g(x)) > g(y)$

$$- (x, y) \in I_k \Leftrightarrow g(x) - \tau_k(g(x)) \leq g(y) \text{ et } g(y) - \tau_k(g(y)) \leq g(x).$$

**Proposition 17** Soit  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$  une famille de structures de préférence sur  $X$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.

1.  $\mathcal{P}$  est une famille homogène à gauche d'ordres d'intervalles.
2. Il existe des ordres totaux  $V_1, V_2, \dots, V_n, H$  sur  $X$  tels que  $(P_k, V_k, H)$  est une matrice en escalier pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
3.  $\bigcup_{k=1}^n (P_k P_k \cup I_k P_k)$  est asymétrique.
4. Il existe des fonctions  $G_1, G_2, \dots, G_n$  de  $X$  dans l'ensemble des intervalles réels fermés telles que pour chaque  $x$  fixé,  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_n(x)$  ont la même extrémité supérieure et

$$\begin{aligned} x P_k y &\Leftrightarrow G_k(x) > G_k(y) \\ x I_k y &\Leftrightarrow G_k(x) \cap G_k(y) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

□

Remarquons qu'une famille homogène à droite d'ordres d'intervalles n'est pas forcément homogène à gauche (et réciproquement). C'est d'ailleurs le cas de l'exemple 5 présenté dans le paragraphe précédent, où le point (3) de la proposition 17 n'est pas satisfait (voir Fig. 2.12) :  $\bigcup_{k=1}^3 P_k P_k \cup I_k P_k$  n'est pas asymétrique (observer les paires  $\{b, c\}$  et  $\{c, d\}$ ).

### Familles homogènes d'ordres d'intervalles

**Définition 9**  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$  est une famille homogène d'ordres d'intervalles si et seulement si il existe une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $n$  fonctions  $\sigma_k : f(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) telles que  $\forall k, \forall x, y \in X$  :

- $(x, y) \in P_k \Leftrightarrow f(x) > f(y) + \sigma_k(f(y))$
- $(x, y) \in I_k \Leftrightarrow f(x) \leq f(y) + \sigma_k(f(y))$  et  $f(y) \leq f(x) + \sigma_k(f(x))$
- $\forall i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  :  
 $f(x) + \sigma_i(f(x)) \leq f(y) + \sigma_i(f(y)) \Leftrightarrow f(x) + \sigma_k(f(x)) \leq f(y) + \sigma_k(f(y))$   
(cohérence de type 2, notée Coh2).

Dans une telle représentation numérique, *Coh2* impose une cohérence supplémentaire entre les différentes structures de la famille : les extrémités droites des intervalles (les “ $f(x) + \sigma_k(f(x))$ ”) induisent sur  $X$  le même ordre total pour tout  $k$  (c’est-à-dire pour toutes les relations de la famille).

**Proposition 18** *Soit  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$  une famille de structures de préférence sur  $X$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1.  $\mathcal{P}$  est une famille homogène d’ordres d’intervalles.
2.  $\mathcal{P}$  est une famille d’ordres d’intervalles à la fois homogène à gauche et à droite.
3. Il existe deux ordres totaux  $V$  et  $H$  sur  $X$  tels que  $(P_k, V, H)$  est une matrice en escalier pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
4.  $\bigcup_{k=1}^n (P_k P_k \cup P_k I_k)$  et  $\bigcup_{k=1}^n (P_k P_k \cup I_k P_k)$  sont asymétriques.

□

**Exemple 6** Soit  $X = \{a, b, c, d, e\}$ , soit la famille de deux structures de préférence  $[(P_1, I_1), (P_2, I_2)]$  définie par les matrices suivantes (remarquer les ordres totaux  $V$  et  $H$ ) :

$(P_1, I_1)$	$a$	$b$	$d$	$c$	$e$
$a$	•	$I$	$P$	$P$	$P$
$b$	$I$	•	$I$	$I$	$P$
$c$		$I$	$I$	•	$P$
$d$		$I$	•	$I$	$P$
$e$					•

$(P_2, I_2)$	$a$	$b$	$d$	$c$	$e$
$a$	•	$P$	$P$	$P$	$P$
$b$		•	$I$	$P$	$P$
$c$			$I$	•	$P$
$d$		$I$	•	$I$	$I$
$e$			$I$		•

$[(P_1, I_1), (P_2, I_2)]$  est une famille homogène d’ordres d’intervalles. La Fig. 2.13 en donne une représentation.

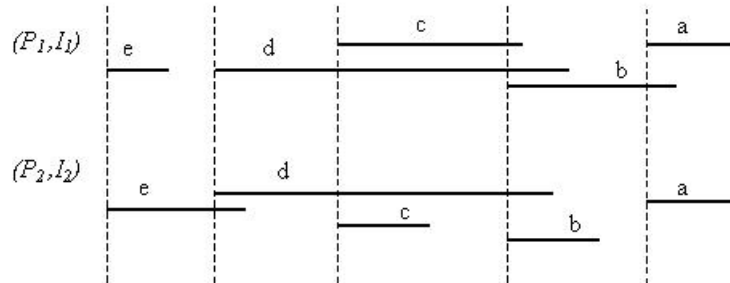


FIG. 2.13 – Représentation de la famille homogène d’ordres d’intervalles de l’exemple 6.

Sur ce dessin, on peut voir apparaître la condition de cohérence *Coh2* : l’ordre induit sur  $X$  par les extrémités droites des intervalles est le même pour  $(P_1, I_1)$  et  $(P_2, I_2)$ , en l’occurrence  $a, b, d, c, e$ . Ce phénomène est mis en évidence dans la Fig. 2.14.

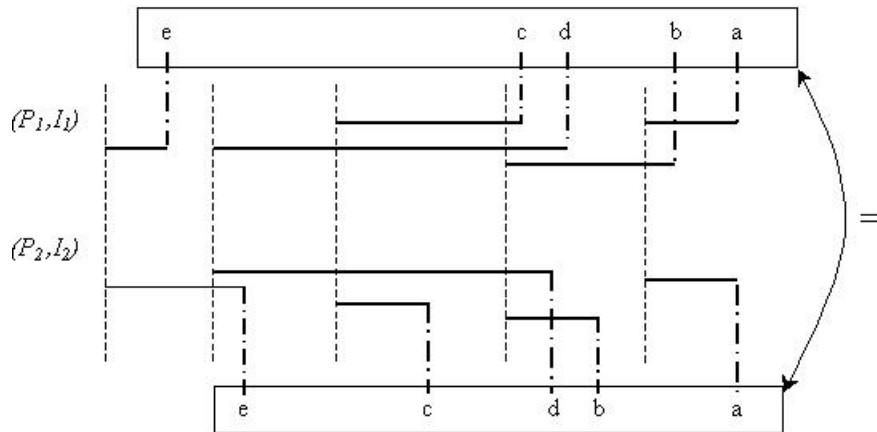


FIG. 2.14 – Condition de cohérence *Coh2*.

La figure 2.15 propose une représentation graphique des structures  $(P_k, I_k)$ , des relations  $P_k P_k \cup P_k I_k$  (dont la réunion est asymétrique) et  $P_k P_k \cup I_k P_k$  (dont la réunion est asymétrique). Remarquer que  $\bigcup_{k=1}^n P_k P_k \cup P_k I_k \cup I_k P_k$  n’est pas asymétrique (cf. paire  $\{c, d\}$ ), donc  $[(P_1, I_1), (P_2, I_2)]$  n’est pas une famille ho-

mogène de semi-ordres (voir paragraphe suivant).

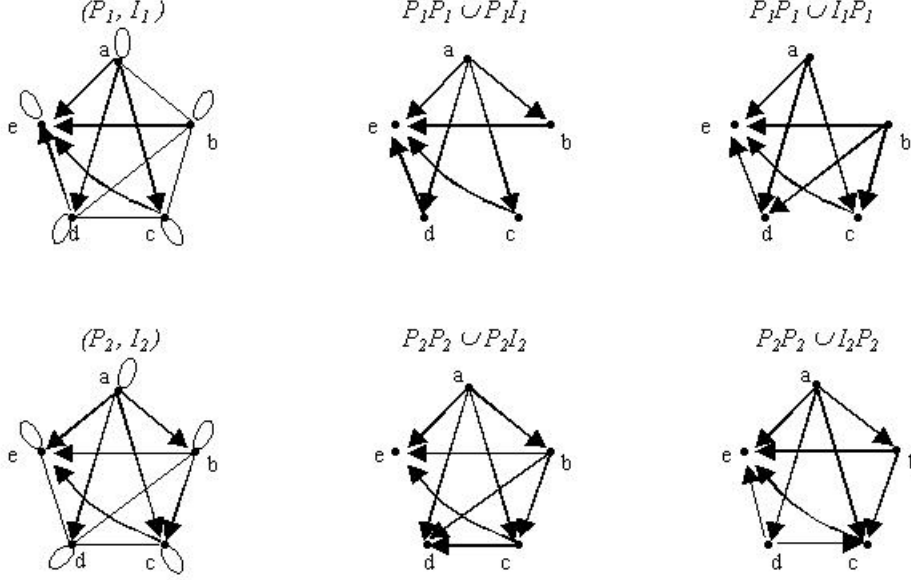


FIG. 2.15 – Représentations graphiques liées à l'exemple 6 (famille homogène d'ordres d'intervalles).

Notons qu'on peut donner une définition équivalente de famille homogène d'ordres d'intervalles en terme de représentation  $g$  et de seuils "à gauche"  $\tau$ , avec le même type de condition de cohérence que *Coh2* :

**Proposition 19**  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$  est une famille homogène d'ordres d'intervalles si et seulement si il existe une fonction  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $n$  fonctions  $\tau_k : g(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) telles que  $\forall k, \forall x, y \in X$  :

- $(x, y) \in P_k \Leftrightarrow g(x) - \tau_k(g(x)) > g(y)$
- $(x, y) \in I_k \Leftrightarrow g(x) - \tau_k(g(x)) \leq g(y)$  et  $g(y) - \tau_k(g(y)) \leq g(x)$
- $\forall i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  :  
 $g(x) - \tau_i(g(x)) \leq g(y) - \tau_i(g(y)) \Leftrightarrow g(x) - \tau_k(g(x)) \leq g(y) - \tau_k(g(y))$   
 (autre forme d'une cohérence de type 2, notée *Coh'2*).

**Démonstration** La preuve de la proposition 19 est directement liée à la proposition 12, et à sa généralisation dans le cas de familles de relations, i.e. à la proposition

16. L'élément clé est le lien entre les ordres  $V$  et  $H$  et les ordres induits par les extrémités des intervalles des représentations numériques. D'une part, puisque la famille est homogène, chaque élément de  $X$  est représenté par  $n$  intervalles ayant la même extrémité gauche (cf. 9), donc  $\forall k$  l'ordre induit sur  $X$  par les extrémités gauches des intervalles (permettant de représenter  $(P_k, I_k)$ ) ne change pas ; cet ordre correspondra à  $V$ . D'autre part, *Coh2* introduit une cohérence entre les ordres induits sur  $X$  par les extrémités droites des intervalles ; ce second ordre correspondra à  $H$ . Ces mêmes  $V$  et  $H$  sont induits par les extrémités gauches et droites des intervalles de la représentation de la proposition 19.

□

La Fig. 2.16 propose une représentation “à gauche” de l'exemple précédent (ex. 6).

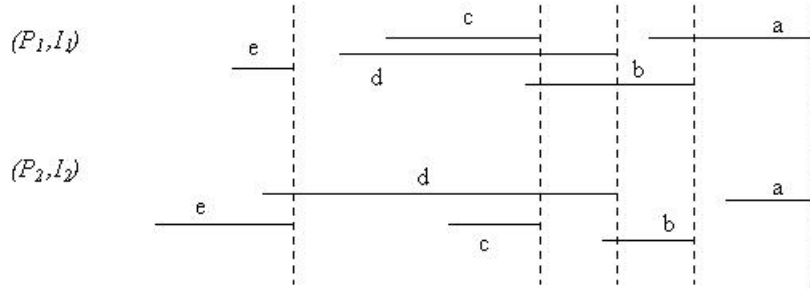


FIG. 2.16 – Une représentation “à gauche” de la famille homogène d'ordres d'intervalles de l'exemple 6.

On voit que l'ordre induit par les extrémités gauches des intervalles est le même pour  $(P_1, I_1)$  et  $(P_2, I_2)$ , en l'occurrence  $a, b, c, d, e$  (de droite à gauche).

### Familles homogènes de semi-ordres

**Définition 10**  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$  est une famille homogène de semi-ordres si et seulement si il existe une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $n$  fonctions  $\sigma_k : f(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) telles que  $\forall k, \forall x, y \in X$  :

- $(x, y) \in P_k \Leftrightarrow f(x) > f(y) + \sigma_k(f(y))$
- $(x, y) \in I_k \Leftrightarrow f(x) \leq f(y) + \sigma_k(f(y))$  et  $f(y) \leq f(x) + \sigma_k(f(x))$

$$- f(x) \leq f(y) \Leftrightarrow f(x) + \sigma_k(f(x)) \leq f(y) + \sigma_k(f(y))$$

(cohérence de type 1-2, notée Coh1-2).

La condition *Coh1-2* rassemble les idées contenues dans *Coh1* et *Coh2* : c'est une cohérence à la fois intrastructurelle et interstructurelle, exprimant le fait que les ordres induits par la représentation numérique sur les côtés gauches et droits des intervalles sont tous les mêmes ( $\forall k$ ).

**Proposition 20** Soit  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$  une famille de structures de préférence sur  $X$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.

1.  $\mathcal{P}$  est une famille homogène de semi-ordres.
2. Il existe un ordre total  $T$  sur  $X$  tels que  $(P_k, T, T)$  est une matrice en escalier pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
3.  $\bigcup_{k=1}^n (P_k P_k \cup P_k I_k \cup I_k P_k)$  est asymétrique.

□

**Exemple 7** Soit  $X = \{a, b, c, d\}$ , et soit la famille  $[(P_1, I_1), (P_2, I_2)]$  définie par les matrices suivantes.

$(P_1, I_1)$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	•	$I$	$P$	$P$
$b$	$I$	•	$I$	$I$
$c$		$I$	•	$I$
$d$		$I$	$I$	•

$(P_2, I_2)$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	•	$I$	$I$	$P$
$b$	$I$	•	$I$	$P$
$c$	$I$	$I$	•	$I$
$d$			$I$	•

$[(P_1, I_1), (P_2, I_2)]$  est une famille homogène de semi-ordres. La Figure 2.17 en propose une représentation.

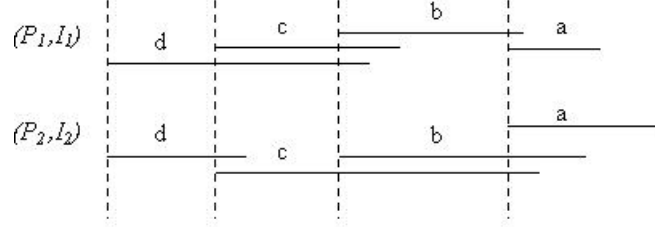


FIG. 2.17 – Une représentation de la famille homogène de semi-ordres de l'exemple 7.

La condition de cohérence *Coh1-2* se traduit par le fait que l'ordre induit sur  $X$  par les extrémités gauches des intervalles de cette représentation (à savoir  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ) est le même que celui induit par les extrémités droites des intervalles des représentations des deux relations de la famille.

En outre, le lecteur vérifiera facilement par un petit dessin que  $P_1P_1 \cup P_2P_2 \cup P_1I_1 \cup P_2I_2 \cup I_1P_1 \cup I_2P_2$  est asymétrique.

Comme pour les familles homogènes d'ordres d'intervalles, on peut donner une définition équivalente à la définition 10 en termes de fonction  $g$  et de seuils "à gauche"  $\tau_k$ , avec une condition de cohérence adaptée à ces notations.

**Proposition 21**  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$  est une famille homogène de semi-ordres si et seulement si il existe une fonction  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $n$  fonctions  $\tau_k : g(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) telles que  $\forall k, \forall x, y \in X$  :

- $(x, y) \in P_k \Leftrightarrow g(x) - \tau_k(g(x)) > g(y)$
- $(x, y) \in I_k \Leftrightarrow g(x) - \tau_k(g(x)) \leq g(y)$  et  $g(y) - \tau_k(g(y)) \leq g(x)$
- $g(x) \leq g(y) \Leftrightarrow g(x) - \tau_k(g(x)) \leq g(y) - \tau_k(g(y))$ .

□

Lorsqu'on a une représentation par une fonction  $f$  et des seuils "à droite"  $\sigma_k$ , on peut en trouver une autre avec la même fonction  $f$  et des seuils "à gauche"  $\tau_k$ . C'est une conséquence de la condition *Coh1-2*.

Dans le cas d'une seule structure de préférence  $(P, I)$ , être un ordre d'intervalles qui satisfait à la condition de cohérence *Coh1* est équivalent à être un ordre d'intervalles à seuil constant. Ce n'est plus vrai pour les familles de structures de préférence. Pour notre exemple 7, s'il était possible de trouver des seuils constants  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , alors cela impliquerait des inégalités contradictoires :

- d’une part,  $bI_1d$  et  $aP_1c \Rightarrow f(b) - f(d) \leq \sigma_1 < f(a) - f(c)$ , d’où  $f(b) - f(d) < f(a) - f(c)$ ,
- et d’autre part,  $bP_2d$  et  $aI_2c \Rightarrow f(b) - f(d) > \sigma_2 \geq f(a) - f(c)$ , d’où  $f(b) - f(d) > f(a) - f(c)$ .

On peut cependant montrer que si  $\mathcal{P}$  est une famille homogène de semi-ordres, alors pour tout  $k$  fixé dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ , il existe une représentation de  $\mathcal{P}$  comme dans la définition 10 où  $\sigma_k$  est une fonction constante (de valeur strictement positive au choix). Ce fait est déjà évoqué dans [DMRV86]. Nous en proposons une preuve constructive en annexe A de ce travail.

### Familles homogènes de semi-ordres à seuils constants

**Définition 11**  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$  est une famille homogène de semi-ordres à seuils constants si et seulement si il existe une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $n$  réels positifs  $s_1, s_2, \dots, s_n$  tels que  $\forall k, \forall x, y \in X$  :

- $(x, y) \in P_k \Leftrightarrow f(x) > f(y) + s_k$
- $(x, y) \in I_k \Leftrightarrow f(x) \leq f(y) + s_k$  et  $f(y) \leq f(x) + s_k$

Ces familles ont été caractérisées dans [Doi87]. La présentation de ces résultats nécessite l’introduction d’un peu de vocabulaire.

Soit  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$  une famille de  $n$  relations binaires sur le même ensemble fini  $X$ . Une *représentation à seuils constants* de  $\mathbf{P}$  consiste en une application  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  et en des nombres réels  $s_1, s_2, \dots, s_n$  tels que  $\forall x, y \in X, \forall k$  :

$$xP_ky \Leftrightarrow f(x) > f(y) + s_k^3$$

Un *circuit* de  $\mathbf{P}$  est une suite de couples de la forme  $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{m-1}, x_m), (x_m, x_1)$ , couples appartenant à  $P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n \cup P_1^d \cup P_2^d \cup \dots \cup P_n^d$ , mais pas tous dans  $P_1^d \cup P_2^d \cup \dots \cup P_n^d$ . Un *k-cyclone* est une union non vide d’au plus  $k$  circuits de  $\mathbf{P}$ . Pour un  $k$ -cyclone donné, désignons respectivement par  $p_i$  et  $p_i^d$ , le nombre de ses couples appartenant à  $P_i$  et  $P_i^d$  (n’oublions pas que puisque les  $P_i$  sont asymétriques,  $P_i^d = P_i \cup I_i$ ). Le  $k$ -cyclone est *balancé* ssi  $p_i = p_i^d$ .

**Théorème 1** (Doignon, 1987) Soit  $n \geq 2$ . La famille  $\mathbf{P}$  admet une représentation à seuils constants si et seulement si aucun  $n$ -cyclone de  $\mathbf{P}$  n’est balancé.

□

---

<sup>3</sup>Notons que dans une famille qui admet une représentation à seuils constants, les  $P_k$  sont asymétriques.

La présence d'un cyclone balancé n'est pas facile à déterminer "à la main". Ainsi, dans le petit exemple 7 du paragraphe précédent, on trouve le 2-cyclone  $(a, c) (c, a) (b, d) (d, b)$ , qui est bien balancé car  $(a, c) \in P_1$ ,  $(c, a) \in P_2^d$ ,  $(b, d) \in P_1^d$  et  $(d, b) \in P_2$ . Par conséquent,  $[(P_1, I_1), (P_2, I_2)]$  est une famille homogène de semi-ordres mais pas à seuils constants.

Remarquons qu'une famille homogène de semi-ordres à seuils constants est toujours une famille de structures emboîtées (envisagées, dans un cas non complet particulier, au chapitre 4). En effet, à chaque structure  $(P_k, I_k)$  de la famille, on peut associer un seuil constant  $s_k$ . Supposons que l'on renumérote les relations de la famille de manière à ce que  $i > j$  ssi  $s_i \geq s_j$ . Dans ce cas,  $xP_iy$  et  $i > j$  impliquent  $f(x) > f(y) + s_i \geq f(y) + s_j$ , d'où  $xP_jy$ , et donc  $P_n \subseteq P_{n-1} \subseteq \dots \subseteq P_1$ .

### 2.5.2 Familles de préordres totaux

Dans [RV85], on parle très peu de familles de préordres totaux (p.83), et en des termes qui ne nous satisfont pas ([DMRV86] ne traite pas du tout ce cas). Nous réintroduisons donc une terminologie qui nous est propre.

**Définition 12** Soit  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$ , une famille de structures de préférence sur  $X$ .  $\mathcal{P}$  est une famille de préordres totaux sur  $X$  ssi chacune des  $(P_k, I_k)$  a une structure de préordre total sur  $X$ .

Les propriétés d'une telle famille correspondent simplement à la collection des propriétés des structures de la famille (voir les propositions 2, 13 et 14).

**Exemple 8** Soit  $X = \{a, b, c, d\}$ . La famille  $[(P_1, I_1), (P_2, I_2)]$ , définie par les matrices suivantes, est une famille de préordre totaux sur  $X$ .

$(P_1, I_1)$	$b$	$d$	$a$	$c$
$b$	•	$I$	$P$	$P$
$d$	$I$	•	$P$	$P$
$a$			•	$P$
$c$				•
$(P_2, I_2)$	$c$	$d$	$a$	$b$
$c$	•	$P$	$P$	$P$
$d$		•	$I$	$I$
$a$		$I$	•	$I$
$b$		$I$	$I$	•

### Familles homogènes de préordres totaux

**Définition 13** Soit  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$ , une famille de structures de préférence sur  $X$ .  $\mathcal{P}$  est une famille homogène de préordres totaux ssi il existe  $n$  fonctions  $f_1, f_2, \dots, f_n$  à valeurs réelles sur  $X$  telles que  $\forall k, \forall x, y \in X$  :

$$- xP_k y \Leftrightarrow f_k(x) > f_k(y)$$

$$- xI_k y \Leftrightarrow f_k(x) = f_k(y)$$

et

$$- \forall k : [f_k(x) < f_k(y)] \Rightarrow [\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : f_i(x) \leq f_i(y)]$$

(cohérence de type 3, notée Coh3).

**Proposition 22** Soit  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$ , une famille de structures de préférence sur  $X$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes.

1.  $\mathcal{P}$  est une famille homogène de préordres totaux.
2. Pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , il n'existe pas de circuit de  $P_k \cup I_k$  qui contienne un  $P_k$  et  $\forall (x, y) \in X^2, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : xP_i y \Rightarrow [\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : x(P_j \cup I_j)y]$ .
3. Il existe un ordre total  $T$  sur  $X$  tel que
  - $\forall k : TP_k T \subseteq P_k$
  - $\forall k : [xP_k y \Rightarrow \text{il existe } z \neq y \text{ tel que } xTzTy \text{ et } zP_k z_+]$ .

### Démonstration

(1)  $\Rightarrow$  (3). Soient  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , des fonctions comme dans la définition 13. Pour chaque paire  $\{x, y\} \subset X$ , on est dans un et un seul des cas suivants :

- soit  $\exists k$  tel que  $f_k(x) > f_k(y)$  : dans ce cas, posons  $x\mathbf{P}y$  ;
- soit  $\exists k$  tel que  $f_k(y) > f_k(x)$  : dans ce cas, posons  $y\mathbf{P}x$  ;
- soit  $\forall k$  tel que  $f_k(x) = f_k(y)$  : dans ce cas, posons  $x\mathbf{I}y$  et  $y\mathbf{I}x$ .

La structure  $(\mathbf{P}, \mathbf{I})$  est un préordre total (car  $\mathbf{P} \cup \mathbf{I}$  fortement complète et transitive) ; considérons  $T$ , un ordre total compatible avec ce préordre. Vérifions que  $T$  satisfait (3).

- Supposons que  $\exists k$  et  $\exists x, y, z, t \in X$  tels que  $xTyP_k zTt$  et  $(x, t) \notin P_k$ . Puisque  $T \subseteq P_k \cup I_k$ , la relation  $P_k \cup I_k$  contient un circuit avec (au moins) un  $P_k$  :  $x(P_k \cup I_k)yP_k z(P_k \cup I_k)t(P_k \cup I_k)x$ , ce qui contredit le fait que  $(P_k, I_k)$  a une structure de préordre total.
- Supposons que  $\exists k$  et  $\exists x, y \in X$  tels que  $xP_k y$  et  $\left[ \forall z \neq y : [xTzTy \text{ et } (z, z_+) \notin P_k] \right]$  ; dans ces conditions, on a  $z_+I_k z \forall z \neq y$  tel que  $xTzTy$ . Par

conséquent,  $(x, y)$ ,  $(y, \underbrace{x_+ \dots +}_t)$ , ...,  $(x_{++}, x_+)$ ,  $(x_+, x)$  (où  $t$  est le nombre

d'éléments de  $X$  strictement compris entre  $x$  et  $y$  pour l'ordre  $T$ ) est un circuit de  $P_k \cup I_k$  qui contient (au moins) un  $P_k$ , ce qui contredit le fait que  $(P_k, I_k)$  a une structure de préordre total.

(3)  $\Rightarrow$  (2). La première partie de (2) est évidente, puisque (3) et la proposition 14 (p. 38) impliquent que  $\mathcal{P}$  est une famille de préordres totaux. Supposons qu'il existe  $(x, y) \in X^2$  et  $i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  tels que  $xP_iy$  et  $x\neg(P_k \cup I_k)y$ . Comme  $(P_k, I_k)$  est un préordre total, on a donc  $yP_kx$ . Le fait d'avoir à la fois  $xP_iy$  et  $yP_kx$  est contradictoire avec (3), car cela implique  $xTy$  et  $yTx^4$ , ce qui n'est possible, dans le cas d'un ordre total, que si  $x = y$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1). La première partie de (2) nous permet d'affirmer que  $\mathcal{P}$  est une famille de préordres totaux. Par conséquent, on sait que pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , il existe une fonction  $f_k$  à valeurs réelles sur  $X$  telle que

- $xP_ky \Leftrightarrow f_k(x) > f_k(y)$
- $xI_ky \Leftrightarrow f_k(x) = f_k(y)$ .

Supposons maintenant qu'il existe  $(x, y) \in X^2$  et  $i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  tels que  $f_i(x) > f_i(y)$  et  $f_k(x) < f_k(y)$  : cela impliquerait  $xP_iy$  et  $yP_kx$ , en contradiction avec (2).

□

Voici un autre résultat permettant de caractériser une famille homogène de préordres totaux. Nous ne présentons sa démonstration qu'au chapitre 3 (cf. page 116), car celle-ci nécessite l'emploi du théorème de l'alternative (théorème 2) qui sera abondamment utilisé dans la section 3.4.

**Proposition 23** *Soit  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$ , une famille de structures de préférence complètes sur  $X$ .  $\mathcal{P}$  est une famille homogène de préordres totaux ssi  $\forall k$ , il n'existe pas de circuit de  $I_k \cup \bigcup_{i=1}^n P_i$  qui contienne un  $P_k$ .*

□

Notons aussi l'implication que voici.

<sup>4</sup>Pour rappel, si  $yTx$  et  $xP_iy$ , alors  $TP_iT \subseteq P_i$  implique que  $yP_iy$ , ce qui est impossible.

**Proposition 24** Si  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$  est une famille homogène de préordres totaux sur  $X$ , alors  $(\bigcup_k P_k, \bigcap_k I_k)$  a une structure de pré-ordre total sur  $X$ .

**Démonstration**  $\bigcup_k P_k$  est asymétrique (sans quoi il n'existerait pas d'ordre total  $T$  comme dans (3), car  $xP_k y \Rightarrow xTy$ ) et négativement transitive (car chacune des relations  $P_k$  l'est). Donc,  $\bigcup_k P_k$  est un ordre strict fort. De plus, on vérifie assez facilement que  $\bigcap_k I_k = X^2 \setminus (\bigcup_k (P_k \cup P_k^-))$ .

□

**Exemple 9** Voici une famille homogène de préordres totaux  $[(P_1, I_1), (P_2, I_2)]$  sur  $X = \{a, b, c, d\}$ , représentés sous forme matricielle. Chacune des matrices  $((P_1, I_1), T, T)$  et  $((P_2, I_2), T, T)$  est en escalier, dont chaque marche s'appuie sur la diagonale.

$(P_1, I_1)$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	•	$P$	$P$	$P$
$b$		•	$I$	$P$
$c$		$I$	•	$P$
$d$				•
$(P_2, I_2)$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	•	$I$	$P$	$P$
$b$	$I$	•	$P$	$P$
$c$			•	$I$
$d$			$I$	•

La Fig.2.18 présente une représentation graphique de ces relations (pour une meilleure lisibilité, les boucles ont été omises).

Une représentation numérique possible en est :

$x$	$a$	$b$	$c$	$d$
$f_1(x)$	10	4	4	1
$f_2(x)$	7	7	6	6

On voit qu'elle satisfait bien à la condition (3) de la proposition 22.

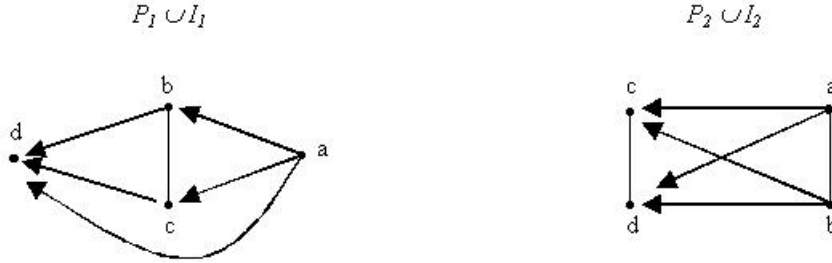


FIG. 2.18 – Représentation graphique des relations de la famille de préordres totaux de l'exemple 9.

Enfin, voici la structure  $(P_1 \cup P_2, I_1 \cap I_2)$ . C'est effectivement un préordre total (et même un ordre total dans ce cas-ci).

$(P, I)$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	•	$P$	$P$	$P$
$b$		•	$P$	$P$
$c$			•	$P$
$d$				•

### Familles homogènes de préordres totaux emboîtés

Un cas particulier des familles homogènes de préordres totaux est celui où ces préordres sont emboîtés.

**Définition 14** Soit  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$ , une famille de structures de préférence complètes sur  $X$ .  $\mathcal{P}$  est une famille homogène de préordres totaux emboîtés ssi il existe  $n$  fonctions  $f_1, f_2, \dots, f_n$  à valeurs réelles sur  $X$  telles que  $\forall k, \forall x, y \in X$  :

$$- xP_k y \Leftrightarrow f_k(x) > f_k(y)$$

$$- xI_k y \Leftrightarrow f_k(x) = f_k(y)$$

et

$$- f_k(x) < f_k(y) \Rightarrow \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : f_i(x) < f_i(y) \\ \forall i \in \{k+1, k+2, \dots, n\} : f_i(x) \leq f_i(y) \end{cases}$$

(cohérence de type 3+, notée Coh3+).

Comme définie ci-dessus, une famille homogène de préordres totaux emboîtés est une famille de préordres qui sont tels que  $P_1 \supseteq P_2 \supseteq \dots \supseteq P_n$  et  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n$ . Pour être tout à fait rigoureux, il faudrait tenir compte du fait que les structures d'une famille peuvent être emboîtées sans pour autant que cet emboîtement ne respecte l'ordre des indices des structures. Cela impliquerait de faire précéder la condition *Coh3+* d'une affirmation du style "il existe une permutation  $\pi$  sur l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  telle que...", et de modifier les conditions en conséquence. Ce faisant, nous alourdirions fortement la présentation. Nous préférons donc nous priver d'un peu de rigueur et faire appel au bon sens du lecteur, afin de gagner en clarté de l'écriture. En annexe B de ce document, nous présentons une formulation plus rigoureuse de la définition 14 et de la proposition 25 qui suit.

Tout comme la proposition 23, la proposition suivante découle des résultats qui seront démontrés au chapitre 3 concernant ce que nous appellerons le type **EHWF** (voir les propositions 36 et 37, pages 116 et 124).

**Proposition 25** *Soit  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$ , une famille de structures de préférence complètes sur  $X$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes.*

1.  $\mathcal{P}$  est une famille homogène de préordres totaux emboîtés.
2.  $\forall k$ , il n'existe pas de circuit de  $\bigcup_{i=1}^k I_i \cup \bigcup_{i=1}^n P_i$  qui contienne un élément de  $\bigcup_{i=k}^n P_i$ .
3. Il existe un ordre total  $T$  sur  $X$  tel que  $\forall k, \forall x, y \in X$ ,
  - $TP_kT \subseteq P_k$
  - $xP_ky \Rightarrow$  [il existe  $z \neq y$  tel que  $xTzTy$  et tel que  $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : zP_iz_+$ ].

□

Dans la troisième affirmation de la proposition 25, le fait qu'à chaque relation  $P_k$ , on puisse associer au moins un élément  $z$  tel que  $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : zP_iz_+$  nous permet d'affirmer que si  $X$  contient  $m$  éléments, il ne peut y avoir plus de  $m - 1$  structures distinctes dans une famille homogène de préordres totaux emboîtés.

L'intérêt de considérer ces familles homogènes de préordres emboîtés apparaît dans ce qui suit.

**Proposition 26** *Toute famille  $\mathcal{P}$  de préordres totaux emboîtés est une famille de semi-ordres à seuils constants.*

Ce résultat est esthétiquement intéressant : les familles de préordres totaux emboîtés sont donc des cas particuliers de toutes les autres sortes de familles envisagées plus haut.

**Démonstration** Soit  $\mathcal{P}$ , une famille de préordres totaux emboîtés. Essayons de définir une fonction  $f$  à valeurs réelles sur  $X$  et  $n$  nombres réels positifs  $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$  tels que :

- $(x, y) \in P_k \Rightarrow f(x) > f(y) + s_k$
- $(x, y) \in I_k \Rightarrow f(x) \leq f(y) + s_k$  et  $f(y) \leq f(x) + s_k$

(comme les structures de la famille sont complètes, les implications réciproques (de droite à gauche) en découleront tout naturellement).

Nous appelons  $\tilde{X} = X/I_1$ , le quotient de  $X$  par la relation  $I_1$  (qui est une relation d'équivalence puisque  $(P_1, I_1)$  est un préordre total - cf. proposition 13). La fonction  $f$  que nous allons construire attribuera la même valeur à des éléments d'une même classe d'équivalence de  $I_1$ .

Soit  $T$ , un ordre total comme dans la proposition 25, compatible avec chacun des préordres de la famille (rappelons que  $P \subseteq T \subseteq P \cup I$ ). Renommons les éléments de  $\tilde{X}$  en  $x_1, x_2, \dots, x_m$  de telle sorte que  $x_i T x_j \Leftrightarrow i \leq j$ .

Posons  $s_1 = 0$ . Pour  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ , la définition de  $s_i$  nécessite davantage d'explications. La condition de cohérence *Coh3+* implique que si  $x I_k y$ , alors  $x I_i y \forall i \in \{k+1, k+2, \dots, n\}$ . Par conséquent, si  $x$  et  $y$  appartiennent à une même classe d'équivalence de  $I_k$ , alors ils appartiendront encore à une même classe d'équivalence de  $I_{k+1}, \dots, I_n$ . Pour chaque structure  $(P_k, I_k)$ , les classes d'équivalence de la relation  $I_k$  sont donc un regroupement de une ou plusieurs classes d'équivalences de la relation  $I_{k-1}$ . Considérons une classe d'équivalence de  $I_i$ . Cette classe est un regroupement de  $t$  ( $\geq 1$ ) classes d'équivalence de  $I_{i-1}$ . Dans la représentation de la structure  $(P_{i-1}, I_{i-1})$  par une fonction  $f$  et des seuils constants, ces  $t$  classes doivent être "séparées deux à deux par un écart plus grand que  $s_{i-1}$ " (nous allons travailler avec  $s_{i-1} + 1$ ), et dans chaque classe les éléments doivent être "étalés sur un espace de taille au plus  $s_{i-1}$ ". Pour regrouper ces  $t$  classes de  $I_{i-1}$  (et reformer notre nouvelle classe de  $I_i$ ), on va imposer que  $s_i$  soit au moins aussi grand que  $\tau = t \cdot s_{i-1} + (t-1) \cdot (s_{i-1} + 1)$ , et ce, pour toutes les classes de  $I_i$ <sup>5</sup>. Le seuil  $s_i$  est le maximum des nombres  $\tau$  sur l'ensemble des classes d'équivalence de  $I_i$ . Notons qu'on a bien  $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$ .

<sup>5</sup>Si  $t = 1$  pour toutes les classes de  $I_i$ , alors  $(P_i, I_i) = (P_{i-1}, I_{i-1})$ ,  $\tau = s_{i-1}$  pour toutes les classes, et  $s_i = s_{i-1}$ .



$(P_3, I_3)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
$x_1$	•	$I$	$I$	$P$	$P$	$P$	$P$	$P$
$x_2$	$I$	•	$I$	$P$	$P$	$P$	$P$	$P$
$x_3$	$I$	$I$	•	$P$	$P$	$P$	$P$	$P$
$x_4$				•	$I$	$P$	$P$	$P$
$x_5$				$I$	•	$P$	$P$	$P$
$x_6$						•	$I$	$P$
$x_7$						$I$	•	$P$
$x_8$								•

$(P_4, I_4)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
$x_1$	•	$I$	$I$	$I$	$I$	$P$	$P$	$P$
$x_2$	$I$	•	$I$	$I$	$I$	$P$	$P$	$P$
$x_3$	$I$	$I$	•	$I$	$I$	$P$	$P$	$P$
$x_4$	$I$	$I$	$I$	•	$I$	$P$	$P$	$P$
$x_5$	$I$	$I$	$I$	$I$	•	$P$	$P$	$P$
$x_6$						•	$I$	$I$
$x_7$						$I$	•	$I$
$x_8$						$I$	$I$	•

La Figure 2.19 montre une représentation de  $\mathcal{P}$ , où l'on voit que les 4 structures sont emboîtées.

Construisons à présent une représentation de  $\mathcal{P}$  avec une fonction  $f$  et des seuils constants comme dans la preuve de la proposition 26. Les seuils :

- $s_1 = 0$
- $s_2 = 2.0 + 1.(0 + 1) = 1$
- $s_3 = 3.1 + 2.(1 + 1) = 7$
- $s_4 = 2.7 + 1.(7 + 1) = 22.$

Définissons  $f$  :

$$f(x_8) = 0$$

$$f(x_7) = ?$$

- Remarquons que  $(x_7, x_8) \notin P_4$ ;
- $\min\{k : x_7 I_k x_8\} = 4$
- donc  $f(x_7) = f(x_8) + s_3 + 1 = 0 + 7 + 1 = 8.$

$$f(x_6) = ?$$

- Remarquons que  $(x_6, x_7) \notin P_4$ ;
- $\min\{k : x_6 I_k x_7\} = 2$

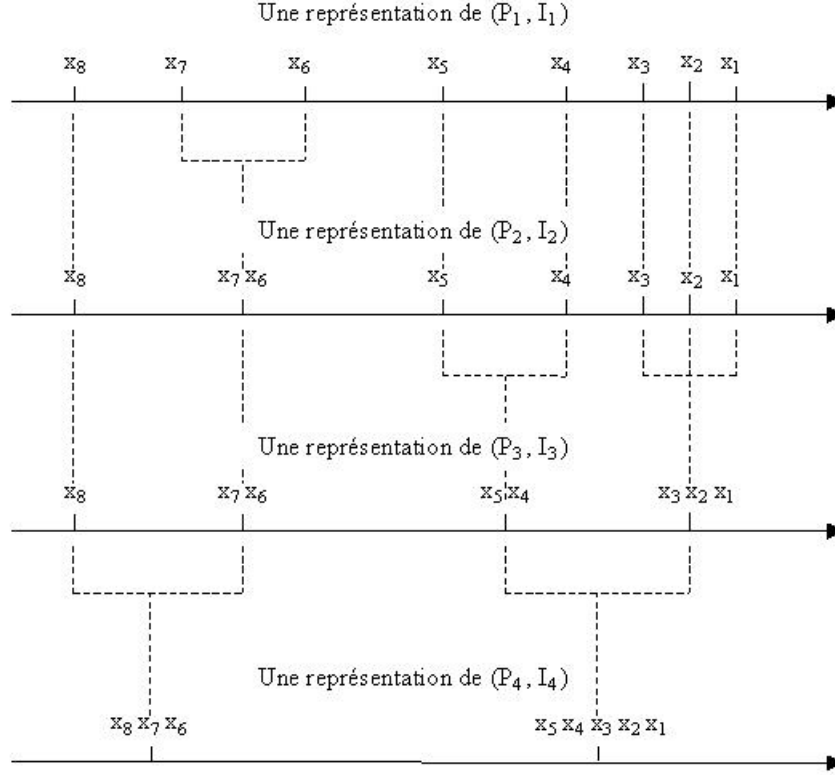


FIG. 2.19 – Famille homogène de préordres emboîtés (exemple 10).

– donc  $f(x_6) = f(x_7) + s_1 + 1 = 8 + 0 + 1 = 9$ .

$f(x_5) = ?$

– Remarquons que  $x_5 P_4 x_6$ .

– donc  $f(x_5) = f(x_6) + s_4 + 1 = 9 + 22 + 1 = 32$ .

$f(x_4) = ?$

– Remarquons que  $(x_4, x_5) \notin P_4$ ;

–  $\min\{k : x_4 I_k x_5\} = 3$

– donc  $f(x_4) = f(x_5) + s_2 + 1 = 32 + 1 + 1 = 34$ .

$f(x_3) = ?$

– Remarquons que  $(x_3, x_4) \notin P_4$ ;

–  $\min\{k : x_3 I_k x_4\} = 4$

– donc  $f(x_3) = f(x_4) + s_3 + 1 = 34 + 7 + 1 = 42$ .

$$f(x_2) = ?$$

- Remarquons que  $(x_2, x_3) \notin P_4$ ;
- $\min\{k : x_2 I_k x_3\} = 3$
- Donc  $f(x_2) = f(x_3) + s_2 + 1 = 42 + 1 + 1 = 44$ .

$$f(x_1) = ?$$

- Remarquons que  $(x_1, x_2) \notin P_4$ ;
- $\min\{k : x_1 I_k x_2\} = 3$
- donc  $f(x_1) = f(x_2) + s_2 + 1 = 44 + 1 + 1 = 46$ .

On vérifie que ceci est bien une représentation de  $\mathcal{P}$  par une seule fonction  $f$  et  $n$  seuils constants.

### 2.5.3 Schéma récapitulatif

Le schéma suivant (Fig. 2.20) reprend les différentes familles rencontrées dans la section 2.5. Une flèche de l'ensemble des familles de type  $A$  vers celui des familles de type  $B$  signifie que toute famille de type  $A$  est aussi une famille de type  $B$ . En d'autres termes, l'ensemble des familles de type  $B$  contient celui des familles de type  $A$ .

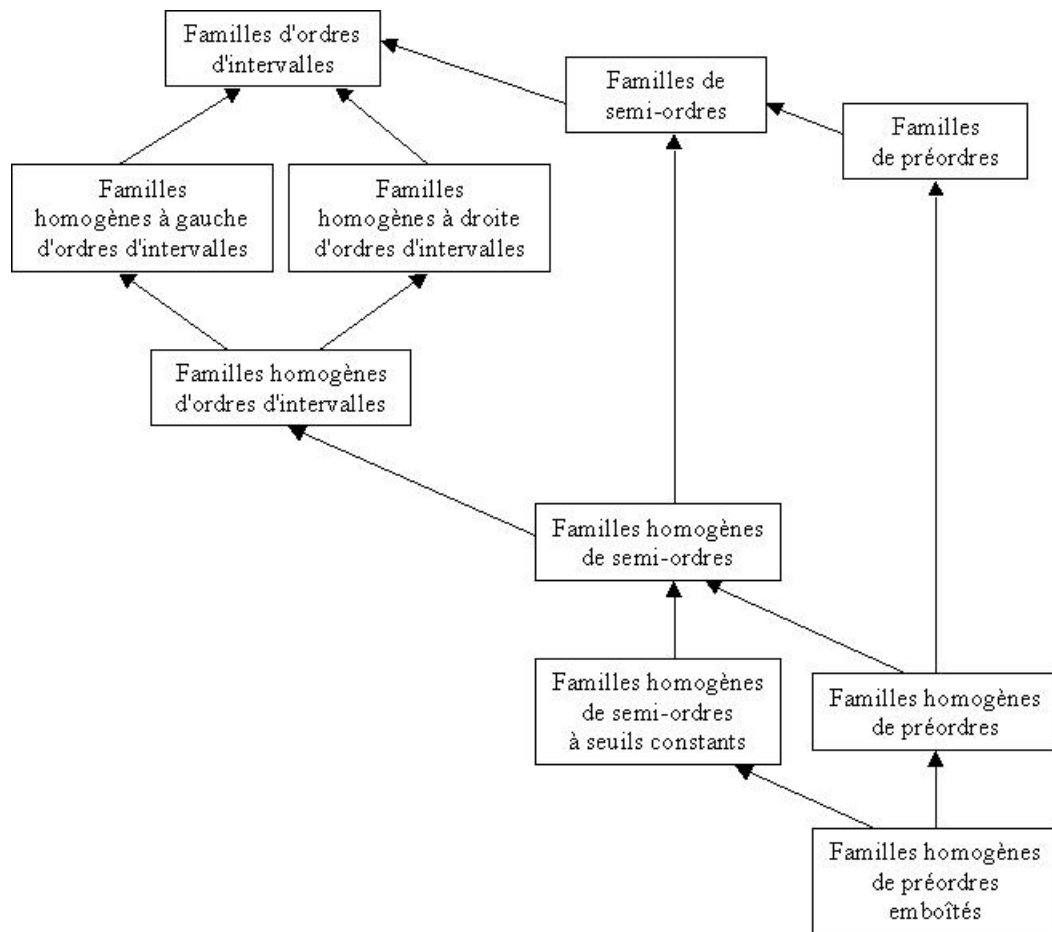


FIG. 2.20 – Familles de relations complètes.

### 2.5.4 Note sur les familles de structures de préférence emboîtées

Considérons une famille  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$  où les structures de préférence sont emboîtées :  $P_n \subseteq P_{n-1} \subseteq \dots \subseteq P_1$  et  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n$ . (Le questionnement MACBETH présenté dans l'introduction, page 11, est un exemple de démarche pouvant induire ce type d'objet.)

Si l'on pose

- $C_0 = I_1$  (NB :  $I_0 \subseteq C_0$ )
- $C_k = P_k \setminus P_{k+1} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$
- $C_n = P_n$ ,

alors  $\mathcal{C} = [C_0, C_1, C_2, \dots, C_n]$  correspond de manière univoque à la famille  $\mathcal{P}$ . Dans le cas d'une famille de structures emboîtées, nous travaillerons avec  $\mathcal{C}$  plutôt qu'avec  $\mathcal{P}$ . Nous dirons que  $\mathcal{C} = [C_0, C_1, C_2, \dots, C_n]$  est une *famille de classes*. Nous assimilerons une famille de classes et la famille de structures de préférence emboîtées à laquelle elle correspond.

Un avantage des classes  $C_k$  ( $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ) est qu'elles permettent de représenter toutes les structures de la famille dans une seule matrice, que nous conviendrons d'appeler *matrice des classes* et que nous désignerons par  $(\cup C_k, V, H)$ . Par exemple, sur  $X = \{a, b, c\}$ , la matrice

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	0	2	1
<i>b</i>		0	1
<i>c</i>			0

(où pour tout  $k \in \{0, 1, 2\}$ ,  $k$  est mis pour  $C_k$ ) permet de représenter les deux relations  $(P_1, I_1)$  et  $(P_2, I_2)$  suivantes :

$(P_1, I_1)$	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	•	<i>P</i>	<i>P</i>
<i>b</i>		•	<i>P</i>
<i>c</i>			•
$(P_2, I_2)$	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>a</i>	•	<i>I</i>	<i>P</i>
<i>b</i>	<i>I</i>	<i>I</i>	•
<i>c</i>		•	<i>I</i>

Comme on peut le voir notamment au niveau de la représentation matricielle,  $[(P_1, I_1), (P_2, I_2)]$  est une famille homogène à droite d'ordres d'intervalles. On pouvait déjà le remarquer directement dans la matrice des classes. En effet,

**Proposition 27**  $\mathcal{C} = [C_0, C_1, \dots, C_n]$  est une famille homogène à droite d'ordres d'intervalles emboîtés si et seulement si il existe un ordre total  $V$  tel que  $[xVy$  et  $yC_kz] \Rightarrow xP_kz$ ; en d'autres termes, ssi la matrice des classes  $(\cup C_k, V, \star)$  (l'ordre des colonnes n'a pas d'importance) est telle que les éléments d'une colonne sont non décroissants de bas en haut.

**Démonstration** Soit  $\mathcal{C} = [C_0, C_1, \dots, C_n]$ , une famille homogène à droite d'ordres d'intervalles emboîtés. Par la proposition 15, on sait qu'il existe des ordres totaux  $V$  et  $H_1, H_2, \dots, H_n$  tels que les matrices  $(P_k, V, H_k)$  soient en escalier. Considérons la matrice des classes  $(\cup C_k, V, \star)$ . S'il existe  $x, y, z \in X$  et  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  tels que  $xVy, xC_i z, yC_j z$  et  $i < j$ , alors la matrice  $(P_j, V, H_j)$  n'est pas en escalier (visuellement, il y a un " $I_j$ " au-dessus d'un " $P_j$ " dans l'une des colonnes de cette matrice). Par conséquent, dans une colonne de la matrice  $(\cup C_k, V, \star)$ , les éléments sont non décroissants de bas en haut.

Réciproquement, supposons que la matrice des classes  $(\cup C_i, T, T)$  (où  $T$  est un ordre total sur  $X$ ) d'une famille  $\mathcal{C} = [C_0, C_1, \dots, C_n]$  soit telle que les éléments d'une colonne sont non décroissants de bas en haut. Posons  $V = T$ ; renommons  $x_1, x_2, \dots, x_m$  les éléments de  $X$  de telle sorte que  $x_i V x_j \Leftrightarrow i < j$ .

Soit  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Posons

$$- B_1(k) = \{z \in X \mid (x_1, z) \notin C_k \cup C_{k+1} \cup \dots \cup C_n\}$$

$$- B_2(k) = \{z \in X \mid (x_2, z) \notin C_k \cup C_{k+1} \cup \dots \cup C_n\}$$

- ...

$$- B_m(k) = \{z \in X \mid (x_m, z) \notin C_k \cup C_{k+1} \cup \dots \cup C_n\}.$$

L'hypothèse que les éléments d'une colonne sont non décroissants de bas en haut nous permet de dire que si  $i \leq j$  et  $(x_j, z) \in P_k$ , alors  $(x_i, z) \in P_k$ . Par conséquent, si  $(x_i, z) \notin P_k$  et  $i \leq j$  alors  $(x_j, z) \notin P_k$ . D'où si  $i \leq j$  alors  $B_i(k) \subseteq B_j(k)$ . On a donc  $B_1(k) \subseteq B_2(k) \subseteq \dots \subseteq B_m(k)$ .

Construisons encore les ensembles suivants :

$$- A_1(k) = B_1(k)$$

$$- A_2(k) = B_2(k) \setminus B_1(k)$$

- ...

$$- A_m(k) = B_m(k) \setminus B_{m-1}(k).$$

Les ensembles  $A_i(k)$  ( $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ) forment une partition de  $X$ .

La relation  $R_k = \{(x, y) | x \in A_i(k), y \in A_j(k), i \leq j\}$  est un préordre total sur  $X$ . Tout ordre total  $H_k$  qui étend  $R_k$  ( $H_k \subseteq R_k$ ) est tel que  $(P_k, V, H_k)$  est en escalier :  $VP_k H_k \subseteq P_k$  (on savait déjà que  $VP_k \subseteq P_k$ , nous allons montrer que  $P_k H_k \subseteq P_k$ ).

On voudrait prouver que  $(x, y) \in P_k$  et  $(y, z) \in H_k(\subseteq R_k)$ , alors  $(x, z) \in P_k$ . Cela revient à démontrer que si  $(x, z) \notin P_k$ , alors  $(x, y) \notin P_k$  ou  $(y, z) \notin H_k(\subseteq R_k)$ ; ceci est encore équivalent à montrer que si  $(y, z) \in H_k(\subseteq R_k)$  et  $(x, z) \notin P_k$ , alors  $(x, y) \notin P_k$ .

Supposons que  $(y, z) \in H_k(\subseteq R_k)$ , et soit  $x_j \in X$ . Si  $(x_j, z) \notin P_k$ , alors  $z \in B_j(k)$ ; puisque  $y R_k z$ , cela veut dire que  $y \in B_i(k)$  pour au moins un  $i \leq j$ . Par conséquent,  $y \in B_j(k)$ , et donc  $(x_j, y) \notin P_k$  (ce que nous voulions démontrer).

Donc, tout ordre total  $H_k$  qui étend  $R_k$  est tel que  $(P_k, V, H_k)$  est en escalier :  $VP_k H_k \subseteq P_k$ .

□

**Exemple 11** Illustrons la deuxième partie de la démonstration qui précède.

Soit  $X = \{a, b, c, d, e\}$ , et soit la matrice des classes suivante :

	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	5	4	0	5	3
<i>b</i>	0	3		5	1
<i>c</i>		3		2	0
<i>d</i>		0		2	
<i>e</i>				0	

Les colonnes de cette matrice des classes sont bien non décroissantes de bas en haut. On peut donc poser  $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c, x_4 = d, x_5 = e$ .

Prenons  $k = 3$  et essayons de construire  $H_3$ . On a :

- $B_1(3) = \{z \in X | (a, z) \notin C_3 \cup C_4 \cup C_5\} = \{a\}$
- $B_2(3) = \{z \in X | (b, z) \notin C_3 \cup C_4 \cup C_5\} = \{b, a, c\}$
- $B_3(3) = \{z \in X | (c, z) \notin C_3 \cup C_4 \cup C_5\} = \{b, a, e, c\}$
- $B_4(3) = \{z \in X | (d, z) \notin C_3 \cup C_4 \cup C_5\} = \{b, d, a, e, c\}$
- $B_5(3) = \{z \in X | (e, z) \notin C_3 \cup C_4 \cup C_5\} = \{b, d, a, e, c\}$ .

Par conséquent,  $A_1(3) = \{a\}, A_2(3) = \{b, c\}, A_3(3) = \{e\}, A_4(3) = \{d\}$  et  $A_5(3) = \emptyset$ . On peut prendre pour  $H_3$  l'ordre total suivant :  $aH_3cH_3bH_3eH_3d$ . Réorganisée de cette manière, la matrice des classes devient :

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	0	3	5	5	4
<i>b</i>		1	0	5	3
<i>c</i>		0		2	3
<i>d</i>				2	0
<i>e</i>				0	

En terme de  $(P_3, I_3)$ , cela donne :

$(P_3, I_3)$	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	•	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>P</i>
<i>b</i>		<i>I</i>	•	<i>P</i>	<i>P</i>
<i>c</i>		•	<i>I</i>	<i>I</i>	<i>P</i>
<i>d</i>				<i>I</i>	•
<i>e</i>		<i>I</i>		•	<i>I</i>

Des résultats analogues peuvent être obtenus pour les familles homogènes à gauche d'ordres d'intervalles (lignes non décroissantes de gauche à droite). Pour les familles homogènes d'ordres d'intervalles, deux ordres totaux  $V$  et  $H$  peuvent être trouvés, tels que la matrice des classes  $(\cup C_k, V, H)$  a ses lignes non décroissantes de gauche à droite et ses colonnes non décroissantes de bas en haut.  $V = H$  ssi on est en présence d'une famille homogène de semi-ordres.

On retrouve des considérations proches de la proposition 27 dans [DMRV86] (p.461 et suivantes), sous la notion de *tableau V-monotone*.

Une famille de structures emboîtées peut être induite à partir d'une relation valuée et de ses "coupes" : voir à ce sujet [DMRV86]. De même, partant d'une famille de structures de préférence emboîtées, on peut facilement créer une relation valuée dont les coupes correspondent exactement aux relations de la famille. Ainsi, les résultats de [DMRV86] sur les relations valuées s'appliquent aux familles de structures emboîtées. Nous ne les reprendrons pas ici, car ils constituent principalement une réécriture (avec d'autres notations) des résultats présentés précédemment dans ce chapitre.

Dans le chapitre 4, nous étudierons des familles de classes  $[C_0, C_1, \dots, C_n, J]$  donnant naissance à une famille de structures de préférence emboîtées, non complètes, et qui ont la même relation d'incomparabilité.

# Chapitre 3

## Familles de structures de préférence non complètes

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons des familles de structures de préférence non complètes du type  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2), \dots, (P_n, I_n, J_n)]$  (où, pour rappel, les  $P_k$  peuvent être vues comme des relations de préférence,  $I_k$  d'indifférence, et  $J_k$  d'incomparabilité - cf. §2.2.8). Nous proposons différentes représentations numériques de ces familles, et nous les caractérisons. Les conditions qui apparaissent dans les théorèmes de représentation s'expriment en termes de ce que nous appellerons des conditions sémantico-numériques, en termes d'acyclicité de certaines relations, et de propriétés des représentations matricielles des différents types de familles.

Les types de familles étudiés sont tels que leurs extensions complètes correspondent à des structures présentées dans [DMRV86] (et réintroduites dans le paragraphe 2.5.1) : ces extensions sont principalement des familles (homogènes) d'ordres d'intervalles et de semi-ordres, mais aussi des familles de préordres totaux. Notons que les résultats présentés dans ce chapitre sont aussi valables pour les familles de structures de préférence complètes (où  $J_k = \emptyset \forall k$ ). Une grande surprise au cours de cette recherche a été de découvrir que, dans le cas non complet, deux nouveaux types de familles apparaissent (les types “familles homogènes d'ordres d'intervalles” et “familles homogènes de semi-ordre” du cas complet se scindent chacun en deux sous-groupes).

Ce chapitre est structuré comme suit. Dans le deuxième paragraphe, nous

définissons les différents types de familles envisagés, et nous en présentons des exemples ; un schéma permet de faire des liens entre eux. Les parties 3, 4 et 5 proposent des caractérisations de ces types selon divers points de vue : une vision “sémantico-numérique”, une vision “relationnelle” et une vision “matricielle”. Dans une sixième partie, nous évoquons les familles de type mixte, composées de sous-familles de types distincts.

Remarque préliminaire : tout comme au chapitre précédent, afin d’alléger quelque peu l’écriture, nous conviendrons que “ $\forall k$ ” sera utilisé en lieu et place de “ $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ” ( $n$  correspondant au nombre de structures d’une famille).

## 3.2 Les types de familles

Nous choisissons de définir les différents types de familles étudiés en termes de représentation numérique, comme c’était le cas au §2.5.1 pour les familles de structures complètes.

### 3.2.1 Structure prolongeable en un ordre d’intervalles

Introduisons d’abord une nouvelle définition portant sur le concept de structure de préférence.

**Définition 15** *Une structure  $(P, I, J)$  est prolongeable en un ordre d’intervalles si et seulement si il existe une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et une fonction  $\sigma : f(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que  $\forall x, y \in X$  :*

- $(x, y) \in P \Rightarrow f(x) > f(y) + \sigma(f(y))$
- $(x, y) \in I \Rightarrow f(x) \leq f(y) + \sigma(f(y))$  et  $f(y) \leq f(x) + \sigma(f(x))$ .

La seule différence avec un ordre d’intervalles se situe dans le fait que dans la définition 15 apparaissent des implications, et pas des équivalences (cf. proposition 7 page 33). En effet, du fait que l’on dispose d’une information préférentielle incomplète, il se pourrait par exemple que  $f(x) > f(y) + \sigma(f(y))$  sans pour autant que  $xPy$ . Cependant, cette représentation numérique pourra induire une extension complète de  $(P, I, J)$  en un ordre d’intervalles  $(P^*, I^*)$ , tel que  $P \subseteq P^*$  et  $I \subseteq I^*$  ( $P^* \cup I^*$  fortement complète).

Lorsqu’on peut représenter chaque élément de  $X$  par un intervalle de manière que

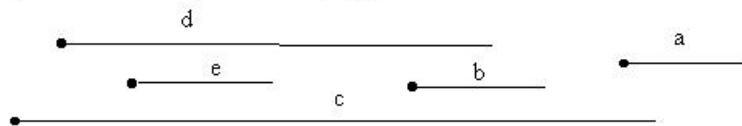
- $xPy \Rightarrow$  l'intervalle qui représente  $x$  est situé strictement à droite de celui qui représente  $y$
- $xIy \Rightarrow$  les intervalles qui représentent  $x$  et  $y$  ont une intersection non vide,

on dit que l'on dispose d'une *représentation compatible avec*  $(P, I, J)$ . La structure induite sur  $X$  par cette représentation est un ordre d'intervalle  $(P^*, I^*)$  qui prolonge  $(P, I, J)$ .

Si l'on dispose d'un couple de fonctions  $f$  et  $\sigma$  comme dans la définition 15, on a aussi immédiatement une représentation compatible avec  $(P, I, J)$  ; inversement, partant d'une représentation des éléments de  $X$  par des intervalles, on construit facilement  $f$  et  $\sigma$  en projetant les extrémités des intervalles sur un axe gradué. Quand on veut insister sur le fait que  $f(x)$  et  $f(x) + \sigma(f(x))$  correspondent respectivement aux extrémités gauche et droite de l'intervalle représentant  $x$ , on parle de *représentation "à droite" compatible avec*  $(P, I, J)$ .

**Exemple 12** Soit  $X = \{a, b, c, d, e\}$ , soit  $P = \{(a, b), (b, e)\}$ ,  $I = I_0 \cup \{(a, c), (c, a), (c, e), (e, c)\}$  (pour rappel,  $I_0 = \{(x, x) : x \in X\}$ ) et  $J = X^2 \setminus (P \cup P^- \cup I)$ . La structure  $(P, I, J)$  est prolongeable en un ordre d'intervalles. Voici deux représentations ("à droite") compatibles avec  $(P, I, J)$  (voir Fig. 3.1).

Une représentation compatible avec  $(P, I, J)$  :



Une autre représentation compatible avec  $(P, I, J)$  :

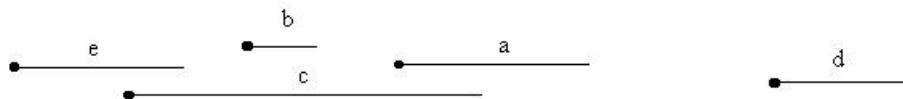


FIG. 3.1 – Deux représentations compatibles avec la structure  $(P, I, J)$  de l'ex. 12.

Partant de la première représentation, on peut construire un ordre d'intervalles qui est une extension complète de la structure de départ :

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	•	<i>I</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>P</i>
<i>b</i>		<i>I</i>	•	<i>I</i>	<i>P</i>
<i>c</i>	<i>I</i>	•	<i>I</i>	<i>I</i>	<i>I</i>
<i>d</i>		<i>I</i>	<i>I</i>	•	<i>I</i>
<i>e</i>		<i>I</i>		<i>I</i>	•

L'extension complète de  $(P, I, J)$  (en un ordre d'intervalles) induite par la seconde représentation est la suivante :

	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>e</i>
<i>d</i>	•	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>P</i>
<i>a</i>		•	<i>I</i>	<i>P</i>	<i>P</i>
<i>b</i>			<i>I</i>	•	<i>P</i>
<i>e</i>			<i>I</i>		•
<i>c</i>		<i>I</i>	•	<i>I</i>	<i>I</i>

Comme nous l'avons déjà évoqué au paragraphe 2.3.2, on a pris l'habitude arbitraire de représenter numériquement un ordre d'intervalles par une fonction  $f$  et des seuils  $\sigma$  à droite. Il est important pour la suite de noter que la définition 15 est équivalente à ce qui suit.

**Proposition 28** *Une structure  $(P, I, J)$  est prolongeable en un ordre d'intervalles si et seulement si il existe des fonctions  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\tau : g(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que  $\forall x, y \in X$  :*

- $(x, y) \in P \Rightarrow g(x) - \tau(g(x)) > g(y)$
- $(x, y) \in I \Rightarrow g(x) - \tau(g(x)) \leq g(y)$  et  $g(y) - \tau(g(y)) \leq g(x)$ .

Si l'on veut insister sur le fait que  $g(x)$  et  $g(x) - \tau(g(x))$  correspondent respectivement aux extrémités droite et gauche de l'intervalle représentant  $x$ , on parle de *représentation "à gauche" compatible avec  $(P, I, J)$* . Pour l'exemple précédent (ex. 12) : voir Fig. 3.2.

Une représentation "à gauche" compatible avec  $(P, I, J)$ :

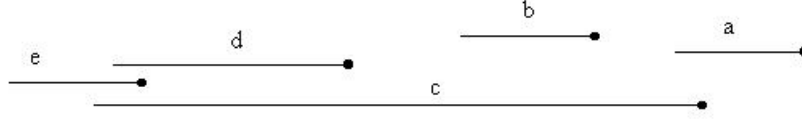


FIG. 3.2 – Une représentation “à gauche” compatible avec la structure  $(P, I, J)$  de l'exemple 12.

Si l'on dispose d'une représentation compatible avec  $(P, I, J)$ , il est facile de construire des fonctions  $g$  et  $\tau$  comme dans la définition 28. Il suffit de poser  $\forall x \in X : g(x) = f(x) + \sigma(f(x))$  et  $\tau(g(x)) = \sigma(f(x))$ .

### 3.2.2 Structure prolongeable en un semi-ordre

De la même manière, on peut s'intéresser aux structures de préférence dont l'extension complète peut être un semi-ordre. Compte tenu de tout ce qui précède, la définition suivante ne devrait présenter aucune difficulté.

**Définition 16** Une structure  $(P, I, J)$  est prolongeable en un semi-ordre si et seulement si il existe une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et une fonction  $\sigma : f(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que  $\forall x, y \in X$  :

- $(x, y) \in P \Rightarrow f(x) > f(y) + \sigma(f(y))$
- $(x, y) \in I \Rightarrow f(x) \leq f(y) + \sigma(f(y))$  et  $f(y) \leq f(x) + \sigma(f(x))$
- $f(x) \leq f(y) \Leftrightarrow f(x) + \sigma(f(x)) \leq f(y) + \sigma(f(y))$   
(condition de cohérence de type 1, notée Coh1)

**Proposition 29** Une structure  $(P, I, J)$  est prolongeable en un semi-ordre si et seulement si il existe une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et un nombre réel positif  $s$  tels que  $\forall x, y \in X$  :

- $(x, y) \in P \Rightarrow f(x) > f(y) + s$
- $(x, y) \in I \Rightarrow f(x) \leq f(y) + s$  et  $f(y) \leq f(x) + s$ .

Remarquons qu'à nouveau, on pourrait réécrire la définition et la proposition qui précèdent en termes de fonction  $g$  et de seuils “à gauche”  $\tau$  ou  $t$ .

**Exemple 13** Soit  $X = \{a, b, c, d, e\}$ , soit  $P = \{(a, b), (a, d), (a, e)\}$ ,  $I = I_0 \cup \{(c, d), (d, c)\}$ . La structure  $(P, I, J)$  est prolongeable en un semi-ordre : voici une représentation compatible avec  $(P, I, J)$ , qui correspond à un semi-ordre.

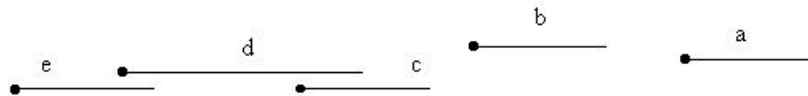


FIG. 3.3 – Une représentation compatible avec l'exemple 13 et qui est un semi-ordre.

Partant de cette représentation, on construit le semi-ordre suivant :

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	•	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>P</i>
<i>b</i>		•	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>P</i>
<i>c</i>			•	<i>I</i>	<i>P</i>
<i>d</i>			<i>I</i>	•	<i>I</i>
<i>e</i>			<i>I</i>	<i>I</i>	•

### 3.2.3 Structure prolongeable en un préordre total

**Définition 17** Une structure  $(P, I, J)$  est prolongeable en un préordre total si et seulement si il existe une fonction  $f$  à valeurs réelles sur  $X$  telle que

- $xPy \Rightarrow f(x) > f(y)$
- $xIy \Rightarrow f(x) = f(y)$ .

Remarquons qu'une structure prolongeable en un préordre total peut être vue comme une structure prolongeable en un semi-ordre qui admet une représentation avec un seuil nul.

**Exemple 14** Soit  $X = \{a, b, c, d, e\}$ , soit  $P = \{(a, e), (b, d), (c, d)\}$ , soit  $I = I_0 \cup \{(a, b), (b, a)\}$ . Voici deux représentations numériques ( $f_1$  et  $f_2$ ) des éléments de  $X$  qui satisfont à la définition 17.

<i>x</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
$f_1(x)$	2	2	2	1	0
$f_2(x)$	3	3	9	-5	-5

Les préordres totaux (prolongeant  $(P, I, J)$ ) qui sont induits par ces représentations numériques sont représentés graphiquement dans la Fig. 3.4. Dans cette figure, nous avons omis les boucles de  $I_0$ .

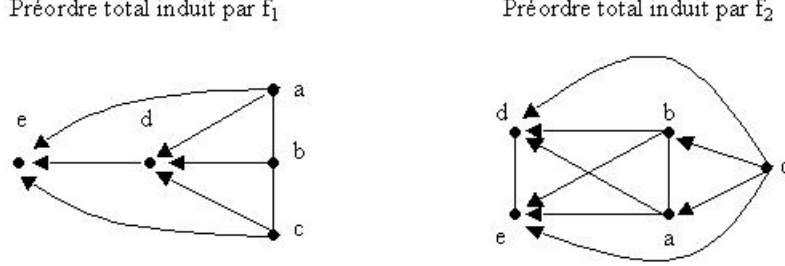


FIG. 3.4 – Deux préordres totaux qui prolongent  $(P, I, J)$  (exemple 14) .

### 3.2.4 Famille de type **IF**

Nous dirons que

**Définition 18**  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2), \dots, (P_n, I_n, J_n)]$  est une famille de structures de type **IF** ssi il existe  $n$  fonctions  $f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $n$  fonctions  $\sigma_k : f_k(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) telles que  $\forall k, \forall x, y \in X$  :

- $(x, y) \in P_k \Rightarrow f_k(x) > f_k(y) + \sigma_k(f_k(y))$
- $(x, y) \in I_k \Rightarrow f_k(x) \leq f_k(y) + \sigma_k(f_k(y))$  et  $f_k(y) \leq f_k(x) + \sigma_k(f_k(x))$ .

Une famille de type **IF** est une famille (d'où le **F**) de structures de préférence prolongeables en des ordres d'intervalles (d'où le **I**), sur un même ensemble fini  $X$ . Par conséquent, on pourrait proposer une définition équivalente avec des fonctions  $g_k$  et des seuils "à gauche"  $\tau_k$ .

**Proposition 30**  $\mathcal{P}$  est une structure de type **IF**

ssi il existe  $n$  fonctions  $g_1, g_2, \dots, g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $n$  fonctions  $\tau_k : g_k(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) telles que  $\forall k, \forall x, y \in X$  :

- $(x, y) \in P_k \Rightarrow g_k(x) - \tau_k(g_k(x)) > g_k(y)$
- $(x, y) \in I_k \Rightarrow g_k(x) - \tau_k(g_k(x)) \leq g_k(y)$  et  $g_k(y) - \tau_k(g_k(y)) \leq g_k(x)$ .

On dit que l'on dispose d'une *représentation compatible avec  $\mathcal{P}$*  lorsque l'on a une représentation compatible avec chacune des structures de la famille (en fait, ici, chaque élément de  $x$  est représenté par  $n$  intervalles). Cette représentation induit sur  $X$  une famille d'ordres d'intervalles. Les notions de représentation "à gauche" et "à droite" sont les mêmes que dans le cas d'une structure prolongeable en un ordre d'intervalle. De manière générale, lorsque les deux représentations (droite et gauche) sont possibles, notre texte privilégie celle "à droite" ( $f$  et  $\sigma$ ).

### 3.2.5 Les autres types de familles

Nous introduisons à présent les différents types de familles de structures de préférence non complètes que nous allons étudier. Tous sont des cas particuliers du type **IF**. Leurs noms sont expliqués plus bas.

**Définition 19** Soit  $\mathcal{P}$ , une famille de type **IF**. On dira que  $\mathcal{P}$  est une famille de type (1) **SF**, (2) **RIF**, (3) **LIF**, (4) **LIF&RIF**, (5) **LRIF**, (6) **HIF**, (7) **HSF**, (8) **CHSF**, (9) **WF**, (10) **HWF**, (11) **EHWF** ssi il existe des fonctions  $f_k, \sigma_k$  et  $g_k, \tau_k$  vérifiant respectivement la définition 18 et la proposition 30, et telles que :

1. (**SF**)  $\forall k, \forall x, y \in X :$

$$f_k(x) \leq f_k(y) \Leftrightarrow f_k(x) + \sigma_k(f_k(x)) \leq f_k(y) + \sigma_k(f_k(y))$$

(cohérence de type 1, notée Coh1)

ou, de manière équivalente :

- $$\forall k, \exists s_k \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \forall x \in X :$$

$$\sigma_k(f_k(x)) = s_k ;$$

ou, de manière équivalente :  $\forall k, \forall x, y \in X :$

$$g_k(x) \leq g_k(y) \Leftrightarrow g_k(x) - \tau_k(g_k(x)) \leq g_k(y) - \tau_k(g_k(y))$$

(autre forme d'une cohérence de type 1, notée Coh'1)

ou, de manière équivalente :

- $$\forall k, \exists t_k \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \forall x \in X :$$

$$\tau_k(g_k(x)) = t_k ;$$

2. (**RIF**)  $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall k, \forall x \in X :$

$$f_k(x) = f(x) ;$$

3. (**LIF**)  $\exists g : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall k, \forall x \in X :$

$$g_k(x) = g(x) ;$$

4. (**LIF&RIF**)  $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\exists g : X \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall k, \forall x \in X :$

$$f_k(x) = f(x) \text{ et } g_k(x) = g(x) ;$$

5. (**LRIF**)  $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall k, \forall x \in X :$

$$f_k(x) = f(x) = g_k(x);$$

6. (**HIF**)  $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall k, \forall x \in X :$

$$f_k(x) = f(x)$$

et  $\forall i, k \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall x, y \in X :$

$$\begin{aligned} f(x) + \sigma_i(f(x)) &\leq f(y) + \sigma_i(f(y)) \\ \Leftrightarrow f(x) + \sigma_k(f(x)) &\leq f(y) + \sigma_k(f(y)) \\ &\text{(cohérence de type 2, notée Coh2);} \end{aligned}$$

ou, de manière équivalente :

$\exists g : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall k, \forall x \in X :$

$$g_k(x) = g(x)$$

et  $\forall i, k \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall x, y \in X :$

$$\begin{aligned} g(x) - \tau_i(g(x)) &\leq g(y) - \tau_i(g(y)) \\ \Leftrightarrow g(x) - \tau_k(g(x)) &\leq g(y) - \tau_k(g(y)) \\ &\text{(autre forme d'une cohérence de type 2, notée Coh'2);} \end{aligned}$$

7. (**HSF**)  $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall k, \forall x \in X :$

$$f_k(x) = f(x) = g_k(x)$$

et  $\forall k, \forall x, y \in X :$

$$\left[ \begin{aligned} f(x) \leq f(y) &\Leftrightarrow f(x) + \sigma_k(f(x)) \leq f(y) + \sigma_k(f(y)) \\ &\text{(cohérence de type 1-2, notée Coh1-2),} \\ &\text{ou, de manière équivalente :} \\ f(x) \leq f(y) &\Leftrightarrow f(x) - \tau_k(f(x)) \leq f(y) - \tau_k(f(y)) \\ &\text{(autre forme d'une cohérence de type 1-2, notée Coh'1-2)} \end{aligned} \right];$$

8. (**CHSF**)  $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall k, \forall x \in X :$

$$f_k(x) = f(x) = g_k(x)$$

et  $\forall k, \exists s_k \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\forall x \in X :$

$$\sigma_k(f(x)) = s_k;$$

9. (**WF**)  $\forall x \in X$  et  $\forall k, \sigma_k(f_k(x)) = 0;$

10. (**HWF**)  $\forall x \in X$  et  $\forall k, f_k(x) = g_k(x), \sigma_k(f_k(x)) = 0 = \tau_k(g(x))$  et  $\forall x, y \in X, \forall k :$

$$f_k(x) < f_k(y) \Rightarrow [\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : f_i(x) \leq f_i(y)]$$

(cohérence de type 3, notée Coh3);

11. (**EHWF**)<sup>1</sup>  $\forall x \in X$  et  $\forall k$ ,  $f_k(x) = g_k(x)$ ,  $\sigma_k(f_k(x)) = 0 = \tau_k(g(x))$  et  $\forall x, y \in X, \forall k$  :

$$f_k(x) < f_k(y) \Rightarrow \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : f_i(x) < f_i(y) \\ \forall i \in \{k+1, k+2, \dots, n\} : f_i(x) \leq f_i(y) \end{cases}$$

(cohérence de type 3+, notée Coh3+).

Similairement aux familles de structures complètes rencontrées au chapitre précédent, de manière générale, on a affaire ici à des familles de structures prolongeables en des ordres d'intervalle, des semi-ordres ou des préordres totaux. Partant du type **IF**, on construit des types de familles possédant différentes caractéristiques supplémentaires. D'une part, on voit apparaître une homogénéité dans la représentation numérique (une seule représentation  $f$ , ou  $g$ , ou les deux...), à laquelle s'ajoutent des conditions de cohérence; d'autre part viennent les seuils constants, avec le cas particulier du seuil nul.

Notons que, comme dans le cas complet, la condition de cohérence de type 1 (*Coh1*) implique une cohérence à l'intérieur de chaque structure  $(P_k, I_k, J_k)$ ; *Coh2*, *Coh3* et *Coh3+* sont des conditions interstructurelles; la cohérence de type 1-2 (*Coh1-2*) est à la fois intrastructurelle et interstructurelle.

Le schéma suivant (Figure 3.5) permet de visualiser globalement les différents types de familles étudiés dans ce chapitre. Une flèche d'un type A vers un type B signifie que toute famille de type A est aussi de type B; en d'autres termes, l'ensemble des familles de type B contient celui des familles de type A. Les types différents qui coïncident dans le cas complet (c'est-à-dire quand  $J_k = \emptyset \forall k$ ) sont regroupées dans une même ellipse tracée en pointillés (voir plus de détails à ce sujet dans la proposition 35, page 115). La Fig. 3.5 est à mettre en parallèle avec son homologue du chapitre précédent, c'est-à-dire la Fig. 2.20, qui correspond aux familles de relations complètes.

---

<sup>1</sup>La remarque faite au sujet de la définition 14 page 57 s'applique ici. Pour une formulation rigoureusement correcte de cette définition, se référer à l'annexe B.

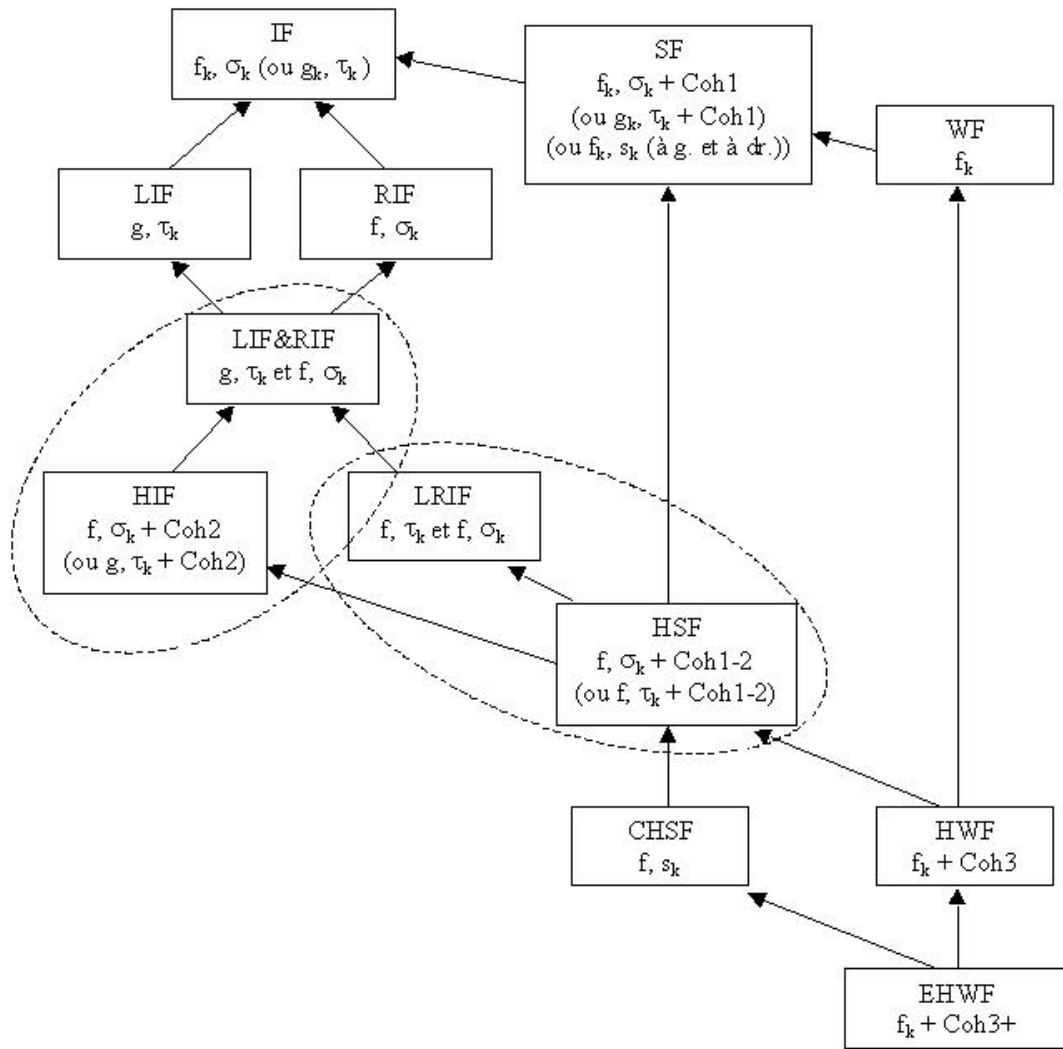


FIG. 3.5 – Les différents types de familles étudiés.

Les noms des différents types de structures évoquent la nature de leur(s) extension(s) complète(s) (selon le vocabulaire utilisé dans [DMRV86], et présenté au paragraphe 2.5.1. Ainsi,

- **F** rappelle la notion de famille de structures de préférence ;
- **I** est mis pour “ordre d’intervalles”, **S** pour “semiorder”, **W** pour “weak

- order”<sup>2</sup> (préordre total) ;
- **R** évoque une homogénéité “à droite” (“right”) entre les différentes structures de la famille, **L** “à gauche” (“left”), et **H** une homogénéité “des deux côtés” ;
- **C** précise “seuils constants” ;
- **E** est mis pour “relations emboîtées” (ou “embedded”).

Par exemple, les extensions complètes d’une famille **HSF** sont des familles homogènes de semi-ordres. Une famille de type **LIF&RIF** admet au moins deux extensions complètes : l’une étant une famille homogène à gauche d’ordres d’intervalles, l’autre, une famille homogène à droite d’ordres d’intervalles.

Les liens existant entre les différents types de familles, que l’on retrouve dans la Fig. 3.5, peuvent tous se comprendre compte tenu des représentations numériques des objets, sauf probablement le fait que [“Type **EHWF**”  $\Rightarrow$  “Type **CHSF**”] : la preuve en découle directement de la proposition 26, p. 59. Ce lien est la cause de la présence du type **EHWF** (seule famille de ce chapitre où apparaît la notion de relations emboîtées), qui permet de rassembler tous les autres types étudiés ici.

Nous dirons qu’on a une *représentation **A**-compatible* avec une famille  $\mathcal{P}$  (où **A** est l’un des types définis ci-dessus) lorsque l’on dispose d’une représentation compatible avec  $\mathcal{P}$  qui montre que  $\mathcal{P}$  est de type **A**. En d’autres termes, si on a des fonctions  $f_k, \sigma_k$  et/ou  $g_k, \tau_k$  sur  $X$  (ou une représentation de chaque élément de  $X$  par des intervalles, d’où l’on peut déduire ces fonctions) qui satisfont aux conditions liées au type **A** dans la définition 19, alors on a une représentation **A**-compatible avec  $\mathcal{P}$ .

### 3.2.6 Exemples

Montrons, par des exemples, que les différents types de familles introduits dans la définition 19 sont bien distincts. Dans ce qui va suivre, on ne prendra plus la peine d’écrire explicitement les relations  $J_k$ , en sachant qu’on a toujours  $J_k = X^2 \setminus (P_k \cup P_k^- \cup I_k)$ .

#### Exemple 15 - Type **IF**

Une famille de type **IF** est une collection de structures prolongeables en des ordres d’intervalles sur un même ensemble.

---

<sup>2</sup>Nous avons préféré utiliser le terme “weak order” plutôt que celui de “total preorder” en référence au travail de [RV85].

Soit  $X = \{a, b, c, d, e\}$ .

$P_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e)\}$  et  $I_1 = \{(c, d), (d, c)\} \cup I_0$ .

$P_2 = \{(c, e), (e, d)\}$  et  $I_2 = \{(a, c), (c, a), (a, b), (b, a)\} \cup I_0$ .

$P_3 = \emptyset$  et  $I_3 = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, e), (e, a)\} \cup I_0$ .

$[(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2), (P_3, I_3, J_3)]$  est de type **IF**. La Fig. 3.6 propose une représentation compatible avec chacune des structures de la famille.

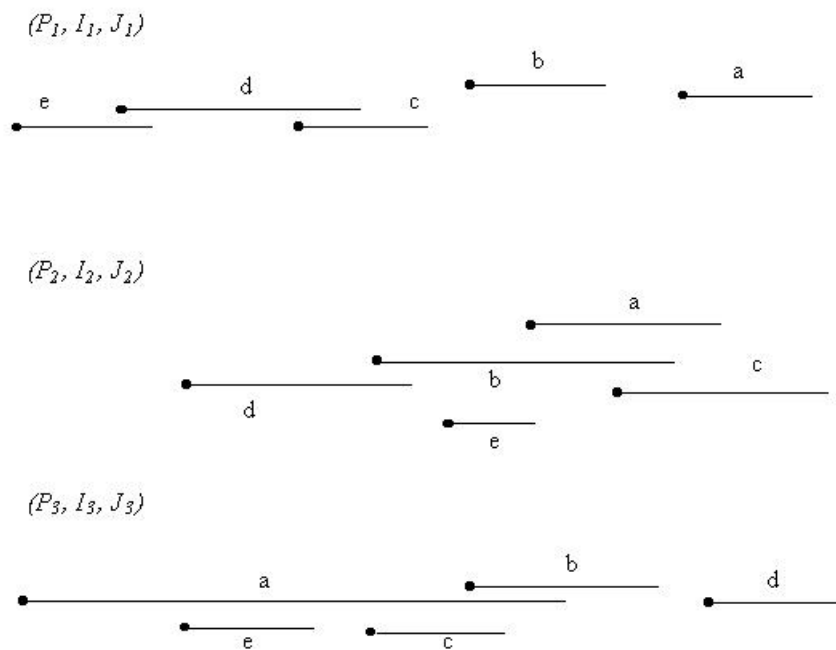


FIG. 3.6 – Une représentation compatible avec la structure  $[(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2), (P_3, I_3, J_3)]$  de l'exemple 15.

### Exemple 16 - Type SF

Tout comme pour **IF**, les familles de type **SF** sont de simples collections de structures prolongeables en des semi-ordres sur un même ensemble fini.

**Exemple 17 - Type RIF**

On peut représenter les relations d'une famille de type **RIF** par une même fonction  $f$  et différentes fonctions de seuils  $\sigma_k$ .

Soit  $X = \{a, b, c, d, e\}$ .

$P_1 = \{(b, d), (d, a)\}$  et  $I_1 = \{(c, b), (b, c), (b, e), (e, b)\} \cup I_0$ .

$P_2 = \{(e, b), (e, c), (e, d), (e, a), (c, a)\}$  et  $I_2 = I_0$ .

$P_3 = \{(c, d)\}$  et  $I_3 = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a)\} \cup I_0$ .

La Fig. 3.7 montre une représentation **RIF**-compatible avec  $[(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2), (P_3, I_3, J_3)]$ . On peut voir que les intervalles qui sont associés à un même élément  $x$  ont la même extrémité gauche (d'abscisse  $f(x)$  sur l'axe horizontal).

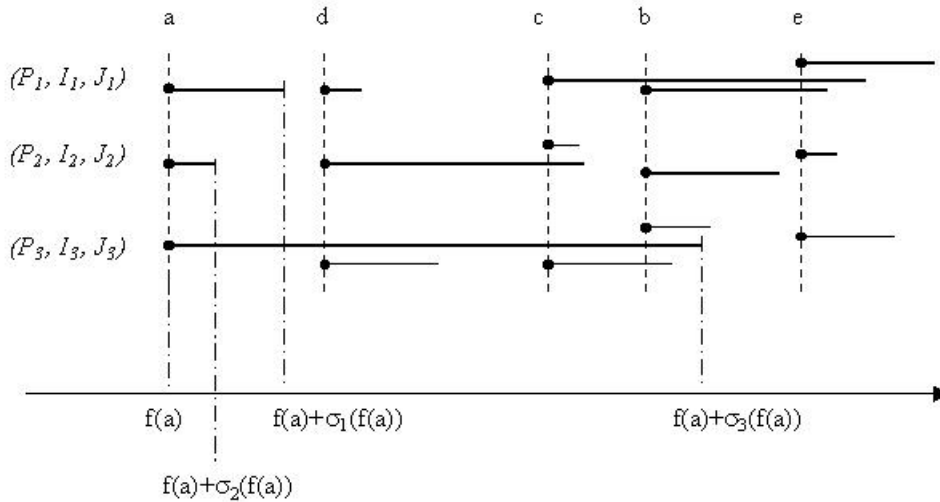


FIG. 3.7 – Une représentation **RIF**-compatible avec l'exemple 17.

En projetant les extrémités des intervalles sur un axe muni d'une origine et d'une unité, on obtient une représentation numérique de chacune des structures de la famille.

**Exemple 18 - Type LIF**

Soit  $X = \{a, b, c, d, e\}$ .

$P_1 = \{(c, b)\}$  et  $I_1 = \{(d, b), (b, d)\} \cup I_0$ .

$P_2 = \{(d, b)\}$  et  $I_2 = \{(b, c), (c, b)\} \cup I_0$ .

Voici une représentation qui montre que la famille  $[(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2)]$  est bien de type **LIF** (voir Fig. 3.8).

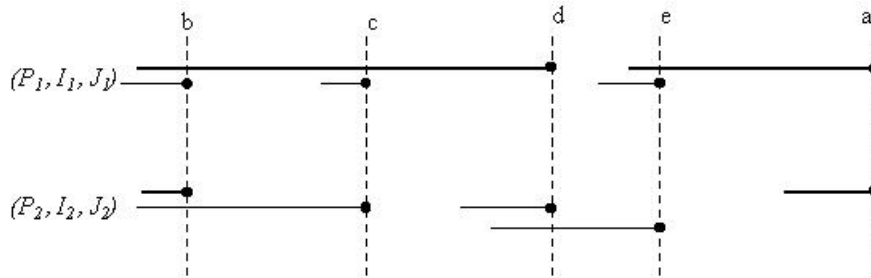


FIG. 3.8 – Une représentation **LIF**-compatible avec l'exemple 18.

En revanche, cette famille n'est pas de type **RIF**. En effet, une représentation numérique "à droite"  $f, \sigma_1, \sigma_2$  est impossible car elle impliquerait deux inégalités contradictoires :

- $cP_1bI_1d \Rightarrow f(c) > f(b) + \sigma_1(f(b)) \geq f(d)$ , d'où  $f(c) > f(b)$  ;
- $dP_2bI_2c \Rightarrow f(d) > f(b) + \sigma_2(f(b)) \geq f(c)$ , d'où  $f(b) > f(c)$ .

### Exemple 19 - Type **LIF&RIF**

Une famille de type **LIF&RIF** est à la fois de type **LIF** et de type **RIF** ; par conséquent, elle admet au moins deux représentations numériques : l'une avec une fonction  $f$  et des seuils à droite, et une autre avec une fonction  $g$  et des seuils à gauche.

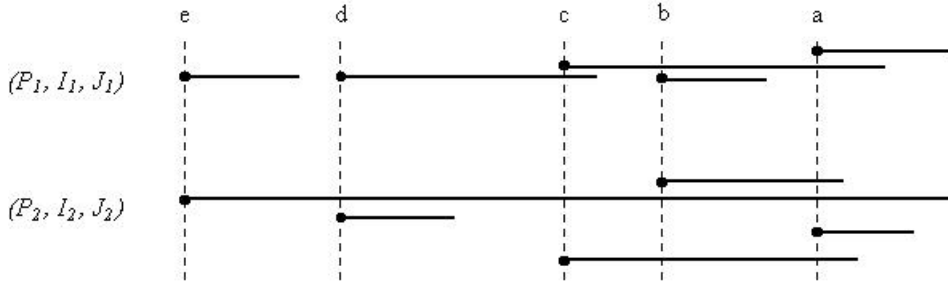
Soit  $X = \{a, b, c, d, e\}$ .

$P_1 = \{(a, b), (a, e), (b, d), (c, e), (d, e)\}$  et  $I_1 = \{(a, c), (c, a), (d, c), (c, d)\} \cup I_0$ .

$P_2 = \{(b, d)\}$  et  $I_2 = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, e), (e, a), (c, e), (e, c), (d, e), (e, d)\} \cup I_0$ .

$[(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2)]$  est de type **LIF&RIF**. En voici deux représentations : la première avec des seuils à droite, et la seconde avec des seuils à gauche (Fig. 3.9).

Représentation par une fonction  $f$  et deux fonctions seuils (à droite)  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .



Représentation par une fonction  $g$  et deux fonctions seuils (à gauche)  $\tau_1$  et  $\tau_2$ .

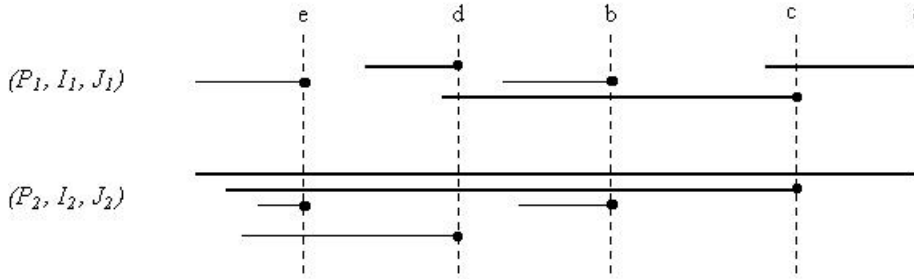


FIG. 3.9 – Une représentation **LIF&RIF**-compatible avec la structure  $[(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2)]$  de l'exemple 19.

On constate que, sur ces représentations, les ordres induits sur  $X$  par  $f$  et  $g$  sont différents. En fait, dans le cas de cet exemple, ils ne pourront jamais être les mêmes. En effet,

- $bP_1dI_1c \Rightarrow f(b) > f(d) + \sigma_1(f(d)) \geq f(c)$ , ce qui implique  $f(b) > f(c)$ ;
- d'autre part,  $cI_1aP_1b \Rightarrow g(c) \geq g(a) - \tau_1(g(a)) > g(b)$ , ce qui implique  $g(c) > g(b)$ .

**Exemple 20 - Type LRIF**

Une famille de type **LRIF** admet au moins deux représentations numériques, l'une “à gauche” et l'autre “à droite”, avec une même fonction  $f$ .

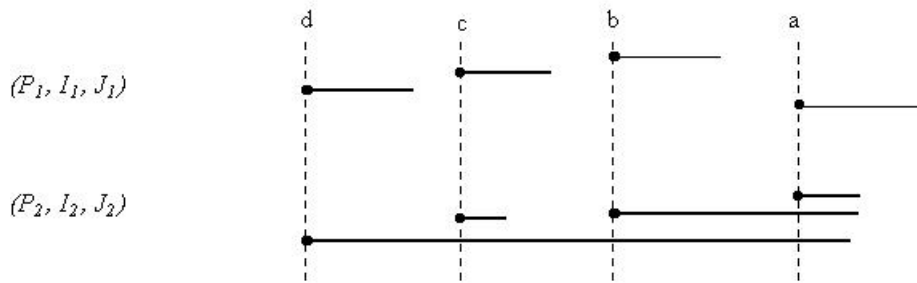
Soit  $X = \{a, b, c, d\}$ .

$P_1 = \{(a, b), (a, d), (b, c), (c, d)\}$  et  $I_1 = I_0$ .

$P_2 = \{(b, c)\}$  et  $I_2 = I_0 \cup \{(a, b), (b, a), (a, d), (d, a), (c, d), (d, c)\}$ .

La Fig. 3.10 propose une représentation **RIF**-compatible avec  $[(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2)]$ , et une autre **LIF**-compatible, ces deux représentations ayant la particularité d'engendrer des fonctions  $f$  et  $g$  qui sont telles que  $f = g$ . On dispose donc d'une représentation **LRIF**-compatible avec  $\mathcal{P}$ .

Représentation par une fonction  $f$  et deux fonctions seuils (à droite)  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .



Représentation par la même fonction  $f$  et deux fonctions seuils (à gauche)  $\tau_1$  et  $\tau_2$ .

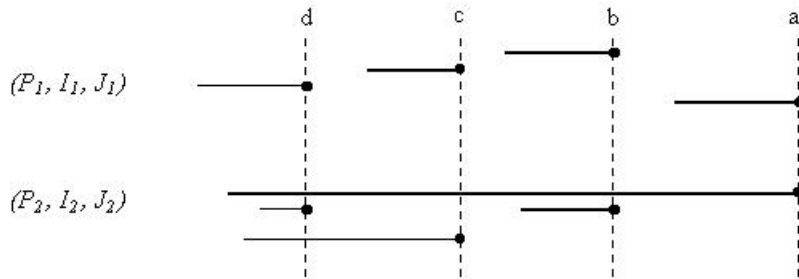


FIG. 3.10 – Représentation **LRIF**-compatible avec l'exemple 20.

La condition de cohérence *Coh2* qu'on trouve dans le type **HIF** ne pourrait être respectée par aucune représentation numérique de cette famille. En effet,

1. on a d'une part  $cP_1d$ , ce qui implique  $f(c) > f(d) + \sigma_1(f(d))$ , donc a fortiori  $f(c) + \sigma_1(f(c)) > f(d) + \sigma_1(f(d))$ ;
2. d'autre part, les inégalités qui suivent conduisent à  $f(c) + \sigma_2(f(c)) < f(d) + \sigma_2(f(d))$  :
  - $bP_2c \Rightarrow f(c) + \sigma_2(f(c)) < f(b)$

- $aP_1b \Rightarrow f(b) < f(a)$
- $aI_2d \Rightarrow f(a) \leq f(d) + \sigma_2(f(d))$ .

**Exemple 21 - Type HIF**

Soit  $X = \{a, b, c, d\}$ .

$P_1 = \{(b, a)\}$  et  $I_1 = \{(a, c), (c, a)\} \cup I_0$ .

$P_2 = \{(d, b)\}$  et  $I_2 = \{(d, c), (c, d)\} \cup I_0$ .

Voici une représentation **HIF**-compatible avec la famille  $[(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2)]$  (voir Fig. 3.11). Remarquons le respect de la condition de cohérence de type 2 (*Coh2*) : les ordres induits sur  $X$  par les côtés droits des intervalles sont identiques pour les représentations des deux structures de la famille.

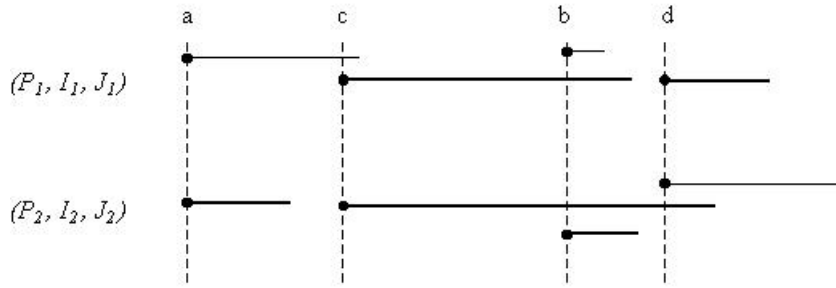


FIG. 3.11 – Une représentation **HIF**-compatible avec l'exemple 21.

La Fig. 3.12 propose une représentation “à gauche” **HIF**-compatible avec cette famille. Noter que *Coh2* est à nouveau vérifiée.

On ne pourra cependant jamais avoir  $f = g$  (pour les représentations à droite et à gauche). En effet,

- $bP_1aI_1c \Rightarrow f(b) > f(a) + \sigma(f(a)) \geq f(c)$ , ce qui entraîne  $f(b) > f(c)$ ;
- d'autre part,  $cI_2dP_2b \Rightarrow g(c) \geq g(d) - \tau(g(d)) > g(b)$ , d'où  $g(c) > g(b)$ .

La famille  $[(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2)]$  est donc également de type **LIF&RIF**, mais pas de type **LRIF**.

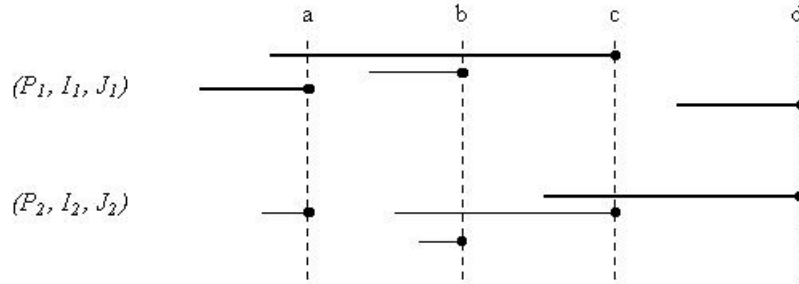


FIG. 3.12 – Une représentation “à gauche” **HIF**-compatible avec l'exemple 21.

**Exemple 22 - Type HSF**

Sur  $X = \{a, b, c, d, e\}$ , considérons la famille  $[(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2)]$  définie par les relations suivantes :

$$P_1 = \{(e, b)\} \text{ et } I_1 = \{(a, d), (d, a)\} \cup I_0$$

$$P_2 = \{(d, a)\} \text{ et } I_2 = \{(b, e), (e, b)\} \cup I_0$$

Voici (cf. Fig. 3.13) des représentations avec une fonction  $f$  et des seuils à droite, puis à gauche, qui sont **HSF**-compatibles avec cette famille. Remarquons, dans les deux cas, le respect de la condition de cohérence *Coh1-2*.

On comprend aisément que toute famille de type **HSF** est aussi de type **HIF** et de type **LRIF**.

Notons que tout comme dans le cas complet, être une famille de type **HSF** n'implique pas nécessairement admettre une représentation à seuils constants (contrairement au cas d'une seule structure de préférence). Dans le cas de l'exemple traité ici, on a

- d'une part,  $eP_1b$  et  $eI_2b$  impliquent  $\sigma_1(f(b)) < f(e) - f(b) \leq \sigma_2(f(b))$ , et par conséquent  $\sigma_1(f(b)) < \sigma_2(f(b))$  ;
- d'autre part,  $dP_2a$  et  $dI_1a$  impliquent  $\sigma_2(f(a)) < f(d) - f(a) \leq \sigma_1(f(a))$ , et par conséquent  $\sigma_2(f(a)) < \sigma_1(f(a))$  ;

donc il est impossible que  $\forall x \in X : \sigma_1(f(x)) = \sigma_2(f(x))$ .

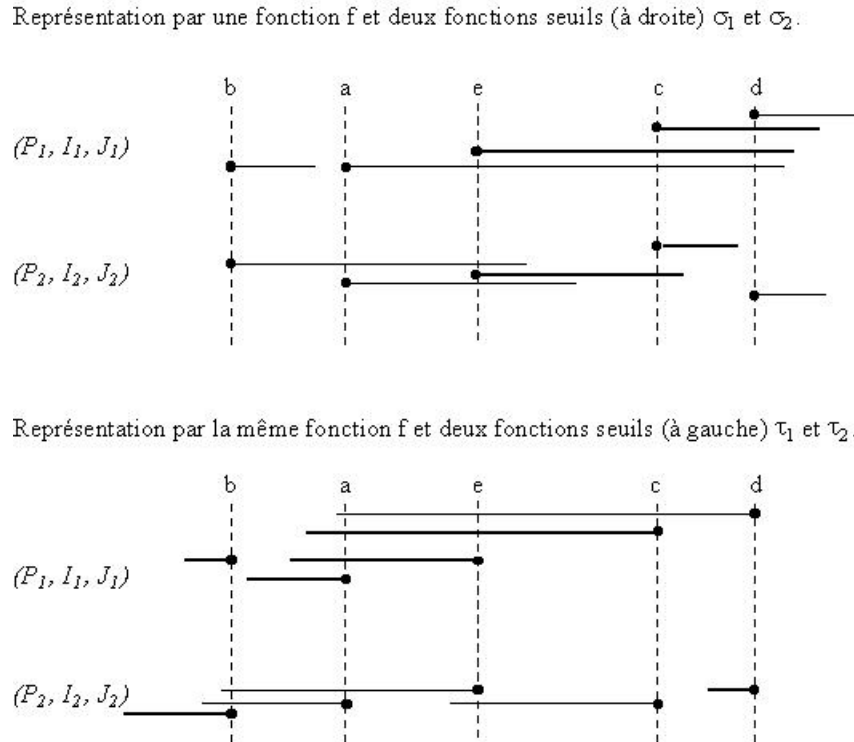


FIG. 3.13 – Deux représentations (droite et gauche) **HSF**-compatibles avec l'exemple 22.

**Exemple 23 - Type CHSF**

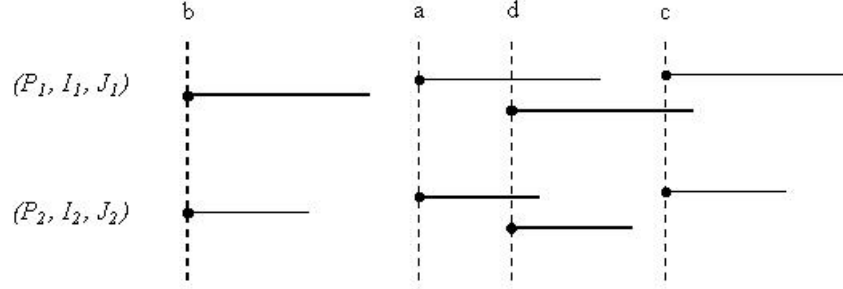
Sur  $X = \{a, b, c, d\}$ , considérons la famille  $[(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2)]$  définie par les relations suivantes :

$$P_1 = \{(c, a), (d, b)\} \text{ et } I_1 = \{(c, d), (d, c)\} \cup I_0$$

$$P_2 = \{(c, d)\} \text{ et } I_2 = \{(a, d), (d, a)\} \cup I_0$$

La Fig. 3.14 nous propose deux représentations (avec une fonction  $f$  et des seuils constants, à droite puis à gauche), qui sont **CHSF**-compatibles avec  $\mathcal{P}$ .

Représentation avec les seuils à droite :



La même représentation numérique  $f$ , avec les mêmes seuils à gauche :

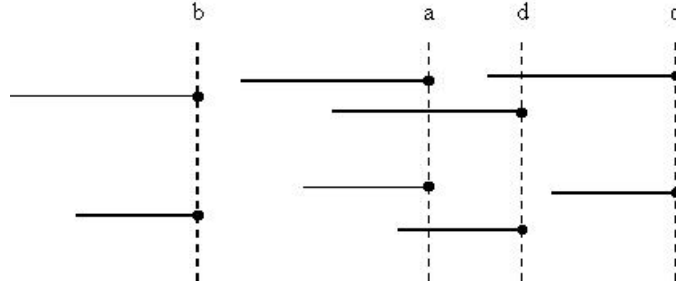


FIG. 3.14 – Deux représentations **CHSF**-compatibles avec l'exemple 23.

Remarquons que l'extension complète d'une famille de type **CHSF** est toujours une famille de relations emboîtées. En effet, soit  $[(P_1^*, I_1^*), \dots, (P_n^*, I_n^*)]$  l'extension complète d'une famille  $[(P_1, I_1, J_1), \dots, (P_n, I_n, J_n)]$ . On sait que  $\forall k$  :

- $xP_k^*y \Leftrightarrow f(x) > f(y) + s_k$
- $xI_k^*y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y) + s_k$  et  $f(y) \leq f(x) + s_k$ .

Soient  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Trois cas peuvent se présenter :

- $s_i < s_j$ . Alors,
  - $xP_j^*y \Rightarrow f(x) > f(y) + s_j$   
 $\Rightarrow f(x) > f(y) + s_i$   
 $\Rightarrow xP_i^*y$ , donc  $P_j^* \subseteq P_i^*$
  - $xI_i^*y \Rightarrow [f(x) - f(y) \leq s_i$  et  $f(y) - f(x) \leq s_i]$   
 $\Rightarrow [f(x) - f(y) \leq s_j$  et  $f(y) - f(x) \leq s_j]$   
 $\Rightarrow xI_j^*y$ , donc  $I_i^* \subseteq I_j^*$ .
- $s_i = s_j$ , auquel cas  $P_i^* = P_j^*$  et  $I_i^* = I_j^*$
- $s_i > s_j$ , auquel cas  $P_i^* \subseteq P_j^*$  et  $I_j^* \subseteq I_i^*$ .

**Exemple 24 - Type WF**

Sur  $X = \{a, b, c, d\}$ , considérons la famille  $[(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2)]$  définie par les relations suivantes :

$$P_1 = \{(a, c), (a, b), (c, d)\} \text{ et } I_1 = \{(b, d), (d, b)\} \cup I_0$$

$$P_2 = \{(b, c)\} \text{ et } I_2 = \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\} \cup I_0$$

Chacune des structures  $(P_1, I_1, J_1)$  et  $(P_2, I_2, J_2)$  est prolongeable en un préordre total ; la Fig. 3.15 nous montre une représentation de deux préordres totaux qui prolongent respectivement  $(P_1, I_1, J_1)$  et  $(P_2, I_2, J_2)$ . Dans ce schéma, chaque élément de  $X$  est positionné sur un axe orienté (ou, en quelque sorte, chaque élément est représenté par un intervalle de longueur nulle) ; on obtient réellement une représentation numérique en munissant cet axe d'une origine et d'une unité.

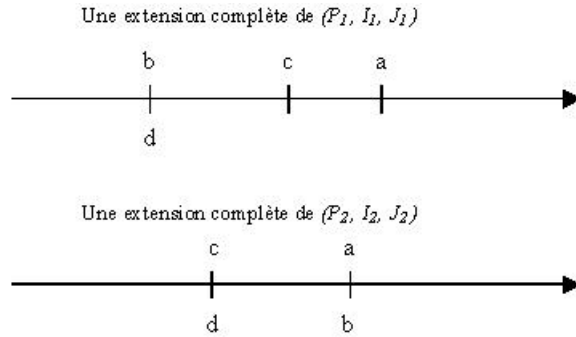


FIG. 3.15 – Représentation **WF**-compatible avec l'exemple 24.

Cette famille  $[(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2)]$  n'est pourtant pas homogène (i.e. pas de type **HWF**), car on a  $cP_1dI_1b \Rightarrow f_1(c) > f_1(d) = f_1(b)$  et  $bP_2c \Rightarrow f_2(b) > f_2(c)$ .

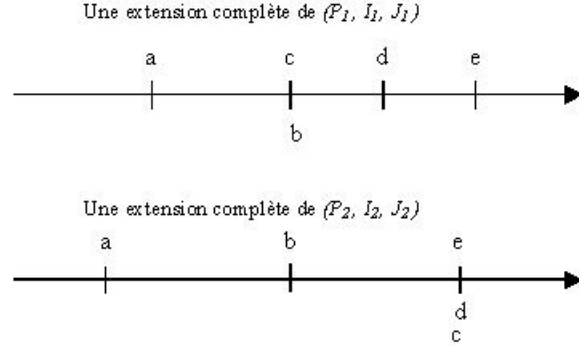
**Exemple 25 - Type HWF**

Soit  $X = \{a, b, c, d, e\}$ .

$$P_1 = \{(c, a), (b, a), (e, c), (e, b)\} \text{ et } I_1 = \{(b, c), (c, b)\} \cup I_0.$$

$$P_2 = \{(c, b), (b, a)\} \text{ et } I_2 = \{(e, c), (c, e)\} \cup I_0.$$

La Fig. 3.16 propose une représentation **HWF**-compatible avec la famille  $[(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2)]$ . On peut constater que la condition *Coh3* est bien vérifiée.

FIG. 3.16 – Représentation **HWF**-compatible avec l'exemple 25.

Il n'est cependant pas possible de renuméroter les structures de la famille (par une permutation  $\pi$  sur l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ ) de sorte que **Coh3+** soit satisfaite. En effet,

- d'une part,  $eP_1c$  et  $eI_2c \Rightarrow \pi(1) < \pi(2)$ ,
- d'autre part,  $cI_1b$  et  $cP_2b \Rightarrow \pi(1) > \pi(2)$ .

### Exemple 26 - Type **EHWF**

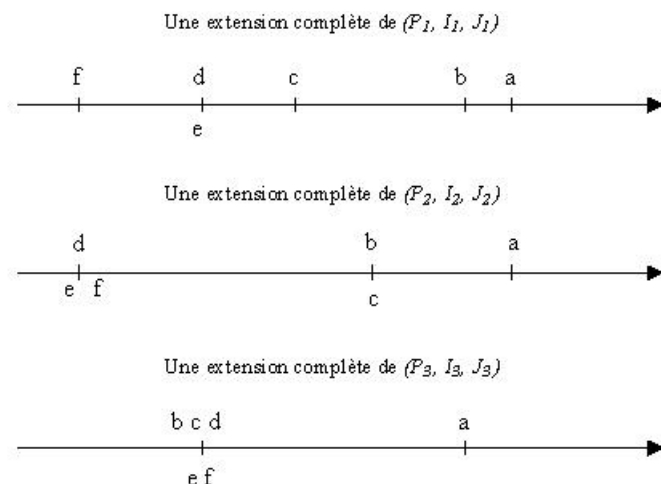
Soit  $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ .

$P_1 = \{(a, b), (b, d), (b, f), (d, f)\}$  et  $I_1 = \{(d, e), (e, d)\} \cup I_0$ .

$P_2 = \{(a, f), (b, e)\}$  et  $I_2 = \{(b, c), (c, b), (d, f), (f, d)\} \cup I_0$ .

$P_3 = \{(a, c), (a, d)\}$  et  $I_3 = \{(b, f), (f, b), (c, d), (d, c)\} \cup I_0$ .

La Fig. 3.17 propose une représentation **EHWF**-compatible avec la famille  $[(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2), (P_3, I_3, J_3)]$ . On peut constater que la condition *Coh3+* est bien vérifiée.

FIG. 3.17 – Représentation **EHWF**-compatible avec l'exemple 26.

### 3.3 Vision sémantico-numérique

Par “*conditions sémantico-numériques*”, nous entendons conditions à imposer, lors du passage des relations aux nombres, pour que la représentation numérique des éléments “respecte” le sens de l’information préférentielle de départ. Les conditions sémantico-numériques permettront de caractériser, en se passant des seuils, la plupart des types de famille.

Ces conditions ne sont pas sans rappeler celles présentes en théorie du mesurage classique. On y retrouve notamment l’idée suivante, émise dans [Rob79] (p. 50) :

“(…) measurement has something to do with assigning numbers that correspond to or represent or “preserve” certain observed relations.”

Pourquoi ne pas garder le terme “condition de mesurage” ?

Comme nous l’avons dit plus haut, la seule différence entre les définitions (en termes de représentations numériques) d’ordre d’intervalle (cf. proposition 7 page 33) et de structure prolongeable en ordre d’intervalle (cf. définition 15 page 70) se situe dans le fait que les conditions reliant d’une part les relations  $P$  et  $I$  et d’autre part la représentation numérique de ces relations contiennent

des équivalences dans le cas complet, et seulement des implications (dans le sens “relations vers nombres”) dans le cas non complet. Or, au niveau du mesurage classique, on considère des homomorphismes entre différentes structures, ce qui nécessite de pouvoir également repasser des nombres aux relations de départ. Mais alors, qu’est-ce que “faire du mesurage” dans le cas non complet ? Peut-on ou pas étendre à un champ plus large le vocabulaire existant, en particulier le terme “condition de mesurage” ? Afin de ne pas entrer dans ce grand débat, nous avons préféré ici adopter un vocabulaire qui nous est propre.

### 3.3.1 Structures prolongeables en un ordre d’intervalles

Voici les conditions sémantico-numériques liées à une structure prolongeable en un ordre d’intervalles.

**Lemme 1** *Soit une structure de préférence  $(P, I, J)$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes.*

1.  $(P, I, J)$  est prolongeable en un ordre d’intervalle, i.e. il existe  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\sigma : f(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que  $\forall x, y \in X$  :
  - $(x, y) \in P \Rightarrow f(x) > f(y) + \sigma(f(y))$
  - $(x, y) \in I \Rightarrow f(x) \leq f(y) + \sigma(f(y))$  et  $f(y) \leq f(x) + \sigma(f(x))$ .
2. Il existe  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall x, y, z \in X$

$$(x, y) \in P \text{ et } (y, z) \in I \Rightarrow f(x) > f(z).$$

#### Démonstration

↓ Si  $(x, y) \in P$  et  $(y, z) \in I$ , alors

$$f(x) - f(y) > \sigma(f(y)) \geq f(z) - f(y)$$

d’où  $f(x) > f(z)$ .

↑ Soit  $y \in X$ . Posons

$$\sigma(f(y)) = \max_{z \in X | yIz} \{f(z) - f(y)\}$$

(notons que  $\sigma(f(y)) \geq 0$  car  $yIy$ ). La fonction  $\sigma$  ainsi définie satisfait aux conditions requises pour que la structure  $(P, I, J)$  soit prolongeable en un ordre d’intervalles.

□

**Exemple** Reprenons la structure  $(P, I, J)$  introduite dans l'exemple 12 (page 71) :  $X = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $P = \{(a, b), (b, e)\}$ , et  $I = I_0 \cup \{(a, c), (c, a), (c, e), (e, c)\}$ . Les conditions sémantico-numériques liées à cette structure sont les suivantes :

- $f(a) > f(b)$  (car  $aPb$  et  $bIb$ )
- $f(b) > f(e)$  (car  $bPe$  et  $eIe$ )
- $f(b) > f(c)$  (car  $bPe$  et  $eIc$ ).

On aurait évidemment pu énoncer le lemme 1 en termes de représentation à gauche. Dans ce cas, les conditions sémantico-numériques deviennent :

il existe  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall x, y, z \in X$

$$(z, x) \in I \text{ et } (x, y) \in P \Rightarrow g(z) > g(y).$$

### 3.3.2 Structures prolongeables en un semi-ordre

**Lemme 2** Soit une structure de préférence  $(P, I, J)$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes.

1.  $(P, I, J)$  est prolongeable en un semi-ordre, i.e. il existe une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et un nombre réel positif  $s$  tels que  $\forall x, y \in X$  :
  - $(x, y) \in P \Rightarrow f(x) > f(y) + s$
  - $(x, y) \in I \Rightarrow f(x) \leq f(y) + s$  et  $f(y) \leq f(x) + s$ .
2. Il existe  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall x, y, z, w \in X$

$$(x, y) \in P \text{ et } (z, w) \in I \Rightarrow f(x) - f(y) > f(z) - f(w).$$

#### Démonstration

↓ Si  $(x, y) \in P$  et  $(z, w) \in I$ , alors

$$f(x) - f(y) > s \geq f(z) - f(w)$$

d'où  $f(x) - f(y) > f(z) - f(w)$ .

↑ Soit  $x \in X$ . Posons

$$s = \max_{x, y \in X | xIy} \{f(x) - f(y)\}$$

(notons que  $s \geq 0$  car  $xIx$ ). La constante  $s$  ainsi définie satisfait aux conditions requises pour que la structure  $(P, I, J)$  soit prolongeable en un semi-ordre.

□

**Exemple** Reprenons la structure  $(P, I, J)$  (prolongeable en un semi-ordre) introduite dans l'exemple 13 (page 73) :  $X = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $P = \{(a, b), (a, d), (a, e)\}$  et  $I = I_0 \cup \{(c, d), (d, c)\}$ .

Les conditions sémantico-numériques associées à cette structure sont les 9 inégalités suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} f(a) - f(b) \\ f(a) - f(d) \\ f(a) - f(e) \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad (= f(a) - f(a)) \\ f(c) - f(d) \\ f(d) - f(c) \end{array} \right. .$$

### 3.3.3 Structures prolongeables en un préordre total

Reprenons la définition 17 :

une structure  $(P, I, J)$  est *prolongeable en un préordre total* si et seulement si il existe une fonction  $f$  à valeurs réelles sur  $X$  telle que

- $xPy \Rightarrow f(x) > f(y)$
- $xIy \Rightarrow f(x) = f(y)$ .

En fait, les conditions qui apparaissent dans cette définition sont déjà des conditions sémantico-numériques, et elles ne peuvent être simplifiées.

### 3.3.4 Familles de structures de préférence

Du lemme 1, on déduit facilement les conditions suivantes.

**Proposition 31**  $\mathcal{P}$  est une famille de structures de type

1. **IF** ssi  $\exists f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall k, \forall x, y, z \in X :$

$$(x, y) \in P_k \text{ et } (y, z) \in I_k \Rightarrow f_k(x) > f_k(z)$$

ou, de manière équivalente,

- $\exists g_1, g_2, \dots, g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall k, \forall x, y, z \in X :$

$$(z, x) \in I_k \text{ et } (x, y) \in P_k \Rightarrow g_k(z) > g_k(y) ;$$

2. **SF** ssi  $\exists f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall k, \forall x, y, z, w \in X :$

$$(x, y) \in P_k \text{ et } (z, w) \in I_k \Rightarrow f_k(x) - f_k(y) > f_k(z) - f_k(w) ;$$

3. **RIF** ssi  $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall k, \forall x, y, z \in X :$

$$(x, y) \in P_k \text{ et } (y, z) \in I_k \Rightarrow f(x) > f(z) ;$$

4. **LIF** ssi  $\exists g : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall k, \forall x, y, z \in X :$

$$(z, x) \in I_k \text{ et } (x, y) \in P_k \Rightarrow g(z) > g(y) ;$$

5. **LIFURIF** ssi  $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\exists g : X \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall k, \forall x, y, z \in X$  :
- $$(x, y) \in P_k \text{ et } (y, z) \in I_k \Rightarrow f(x) > f(z)$$
- $$(z, x) \in I_k \text{ et } (x, y) \in P_k \Rightarrow g(z) > g(y);$$
6. **LRIF** ssi  $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall k, \forall x, y, z \in X$  :
- $$(x, y) \in P_k \text{ et } (y, z) \in I_k \Rightarrow f(x) > f(z)$$
- $$(z, x) \in I_k \text{ et } (x, y) \in P_k \Rightarrow f(z) > f(y);$$
7. **CHSF** ssi  $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall k, \forall x, y, z, w \in X$  :
- $$(x, y) \in P_k \text{ et } (z, w) \in I_k \Rightarrow f(x) - f(y) > f(z) - f(w);$$
8. **WF** ssi  $\exists f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall k, \forall x, y, z, w \in X$  :
- $$(x, y) \in P_k \Rightarrow f_k(x) > f_k(y)$$
- $$(x, y) \in I_k \Rightarrow f_k(x) = f_k(y).$$

**Démonstration** Tout comme dans le lemme 1, les démonstrations des conditions nécessaires pour avoir les différents types de structures sont immédiates, et donc laissées au lecteur. Intéressons-nous maintenant aux conditions suffisantes.

1. **IF** : conséquence directe du lemme 1.
2. **SF** : conséquence directe du lemme 2.
3. **RIF**.  
 $\forall k, \forall y \in X$ , posons

$$\sigma_k(f(y)) = \max_{z \in X | y I_k z} \{f(z) - f(y)\}.$$

Ces fonctions  $\sigma_k$  satisfont aux conditions requises pour que  $\mathcal{P}$  soit de type **RIF**.

4. Les preuves concernant les autres types de familles sont directes compte tenu de ce qui précède.

□

**Exemples** Reprenons quelques exemples présentés au point 3.2.6, et précisons les conditions sémantico-numériques qui leur sont associées.

1. Famille de type **RIF** (page 82)  
 De  $(P_1, I_1, J_1)$ , on tire :  
 –  $f(b) > f(d)$

$$- f(d) > f(a)$$

De  $(P_2, I_2, J_2)$ , on tire :

$$- f(e) > f(b)$$

$$- f(e) > f(c)$$

$$- f(e) > f(d)$$

$$- f(e) > f(a)$$

$$- f(c) > f(a)$$

De  $(P_3, I_3, J_3)$ , on tire :

$$- f(c) > f(d)$$

$$- f(c) > f(a) \text{ (car } cP_3d \text{ et } dI_3a)$$

Remarquons que ces inégalités ne sont pas incompatibles entre elles. Si elles l'étaient, alors  $\mathcal{P}$  ne serait pas de type **RIF**.

2. Famille de type **LRIF** (page 84)

De  $(P_1, I_1, J_1)$ , on tire :

$$- f(a) > f(b)$$

$$- f(a) > f(d)$$

$$- f(b) > f(c)$$

$$- f(c) > f(d)$$

De  $(P_2, I_2, J_2)$ , on tire :

$$- f(b) > f(c)$$

$$- f(b) > f(d) \text{ (car } bP_2cI_2d)$$

$$- f(a) > f(c) \text{ (car } aI_2bP_2c)$$

3. Famille de type **CHSF** (page 88)

$$\text{De } (P_1, I_1, J_1), \text{ on tire : } \left. \begin{array}{l} f(c) - f(a) \\ f(d) - f(b) \end{array} \right\} > \begin{cases} 0 & (= f(a) - f(a)) \\ f(c) - f(d) \\ f(d) - f(c) \end{cases}$$

$$\text{De } (P_2, I_2, J_2), \text{ on tire : } f(c) - f(d) > \begin{cases} 0 & (= f(a) - f(a)) \\ f(a) - f(d) \\ f(d) - f(a) \end{cases}$$

On constate que les types **HIF** et **HSF** n'admettent pas de caractérisation en termes de conditions sémantico-numériques. Ces deux types ont pourtant des extensions complètes plutôt séduisantes : familles homogènes d'ordres d'intervalles et de semi-ordres. Cependant, dans le cas de familles de structures *complètes* (où  $J_k = \emptyset \forall k$ ), on montre que les types "**LIF&RIF**" et "**HIF**" coïncident, ainsi que les types "**LRIF**" et "**HSF**" (voir proposition 35, page 115).

Pour les familles de type **HWF** et **HWF**, nous ne trouvons pas de conditions sémantico-numériques équivalentes aux définitions de ces types. On vérifie

seulement les implications (triviales) suivantes.

**Proposition 32** *Soit  $\mathcal{P}$ , une famille de structures de préférence sur  $X$ .*

1. *Si  $\mathcal{P}$  est de type **HWF**, alors  $\exists f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall k, \forall x, y, z, w \in X$  :*

$$(x, y) \in P_k \Rightarrow \left[ f_k(x) > f_k(y) \text{ et } \forall i (\neq k) \in \{1, 2, \dots, n\} : f_i(x) \geq f_i(y) \right]$$

$$(x, y) \in I_k \Rightarrow f_k(x) = f_k(y) ;$$

2. *Si  $\mathcal{P}$  est de type **EHWF**, alors  $\exists f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall k, \forall x, y, z, w \in X$  :*

$$(x, y) \in P_k \Rightarrow \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : f_i(x) > f_i(y) \\ \forall i \in \{k+1, k+2, \dots, n\} : f_i(x) \geq f_i(y) \end{cases}$$

$$(x, y) \in I_k \Rightarrow \forall i \in \{k, k+1, \dots, n\} : f_i(x) = f_i(y).$$

□

La réciproque de ces implications est fausse, comme on peut le voir dans l'exemple qui va suivre pour le type **HWF**.

**Exemple 27**  $X = \{x, y, z, w, s, t\}$ .  $P_1 = \{(x, z), (w, y)\}$  et  $I_1 = \{(z, w), (w, z)\} \cup I_0$ .  $P_2 = \{(s, x), (y, t)\}$  et  $I_2 = \{(s, t), (t, s)\} \cup I_0$ .

Les conditions sémantico-numériques associées sont :

$$\begin{array}{ll} f_1(x) > f_1(z) & \text{et} \quad f_2(x) \geq f_2(z) \\ f_1(w) > f_1(y) & \text{et} \quad f_2(w) \geq f_2(y) \\ f_1(z) = f_1(w) & \\ f_1(s) \geq f_1(x) & \text{et} \quad f_2(s) > f_2(x) \\ f_1(y) \geq f_1(t) & \text{et} \quad f_2(y) > f_2(t) \\ & f_2(s) = f_2(t) \end{array}$$

Les représentations numériques suivantes satisfont ces conditions sémantico-numériques :

	$x$	$y$	$z$	$w$	$s$	$t$
$f_1^*$	4	2	3	3	5	1
$f_2^*$	2	4	1	5	3	3

Pourtant, il sera impossible de trouver deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  satisfaisant la condition de cohérence *Coh3*. En effet,

- d’une part  $xP_1z$ ,  $zI_1w$  et  $wP_1y$  impliquent  $f_1(x) > f_1(z) = f_1(w) > f_1(y)$ , d’où  $f_1(x) > f_1(y)$ ,
- d’autre part  $yP_2t$ ,  $tI_2s$  et  $sP_2x$  impliquent  $f_2(y) > f_2(t) = f_2(s) > f_2(x)$ , d’où  $f_2(y) > f_2(x)$ .

Dans le cas où  $\mathcal{P}$  est une famille de structures de préférence *complètes*, la réciproque de la proposition 32 est vérifiée (grâce au fait que  $f_k(x) > f_k(y) \Rightarrow xP_k y$ ). Nous verrons dans la section suivante que ces conditions sémantico-numériques vont mener à de nouveaux résultats concernant les familles homogènes de préordres totaux (emboîtés).

Remarquons que les types pour lesquels nous ne parvenons pas à trouver des conditions sémantico-numériques sont exactement ceux qui contiennent une condition de cohérence dans leur définition. Cette condition porte sur la représentation numérique des éléments de  $X$ , donc en quelque sorte sur l’extension complète de la structure, et pas sur les relations dont on dispose au départ.

En conclusion, dans le cas complet, les conditions sémantico-numériques permettent de caractériser tous les types de familles envisagés dans ce travail ; dans le cas non complet, il n’existe pas de caractérisation de ce genre pour les types de familles définis au moyen de conditions de cohérence.

## 3.4 Vision relationnelle

### 3.4.1 Structures prolongeables en un ordre d’intervalles ou un semi-ordre

Reprenons tout d’abord deux résultats bien connus liés aux structures prolongeables en un ordre d’intervalles ou en un semi-ordre. Pour rappel, si  $R$  et  $S$  sont deux relations binaires, nous notons  $RS = \{(x, y) \mid \exists z \text{ tel que } xRz \text{ et } zSy\}$ .

**Lemme 3** 1. *Une structure  $(P, I, J)$  est prolongeable en un ordre d’intervalles ssi la relation  $PI$  est acyclique (ssi la relation  $IP$  est acyclique).*

2. *Une structure  $(P, I, J)$  est prolongeable en un semi-ordre ssi tout circuit de  $P \cup I$  contient (strictement) plus de  $I$  que de  $P$ .*

**Démonstration** Voir à ce sujet [RV85], ou encore [Doi88].

□

**Exemple** La Figure 3.18 montre une représentation graphique de la structure prolongeable en un ordre d'intervalles proposée en exemple 12 à la page 71, et de la relation  $PI$  qu'on en tire. On voit clairement que  $PI$  est acyclique. Par contre, le graphe de  $(P, I, J)$  a un circuit qui contient autant de  $I$  que de  $P$  :  $(P, I, J)$  n'est donc pas prolongeable en un semi-ordre.

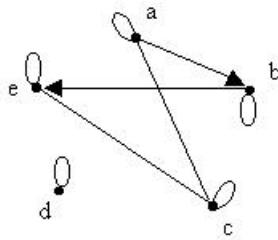
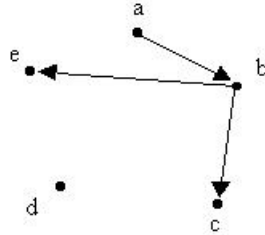
Graphe représentant  $(P, I, J)$ Graphe de la relation  $PI$ 

FIG. 3.18 – Structure prolongeable en un ordre d'intervalles.

### 3.4.2 Structures prolongeables en un préordre total

**Lemme 4** Une structure  $(P, I, J)$  est prolongeable en un préordre total ssi il n'existe pas de circuit de  $P \cup I$  qui contienne un  $P$ .

Il y a plusieurs façons de démontrer ce lemme. Celle que nous avons choisie ici va permettre au lecteur de s'initier à la démarche qui sera utilisée pour démontrer les résultats liés aux familles de structures de préférence. Elle s'inscrit dans la lignée des travaux de [Ada65]. Elle utilise le théorème de l'alternative que voici,

appelé aussi théorème de Motzkin (voir [Man69], pages 28–29). Notons que le signe  $\cdot$  désigne le produit matriciel.

**Théorème 2 (Théorème de l'alternative.)** Soient  $\mathbf{A}_{p \times m}$ ,  $\mathbf{C}_{q \times m}$  et  $\mathbf{D}_{r \times m}$  des matrices de nombres entiers, où  $\mathbf{A}$  est non nulle. Une seule des deux propositions suivantes est vérifiée :

1.  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}$  possède une solution  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$ .
2. Il existe  $p$  entiers non négatifs (et non tous nuls)  $u_1, u_2, \dots, u_p$ ,  $q$  entiers non négatifs  $v_1, v_2, \dots, v_q$ , et  $r$  entiers  $w_1, w_2, \dots, w_r$  tels que
 
$$(u_1, u_2, \dots, u_p) \cdot \mathbf{A} + (v_1, v_2, \dots, v_q) \cdot \mathbf{C} + (w_1, w_2, \dots, w_r) \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0}_{1 \times m}.$$

Nous pouvons à présent démontrer le lemme 4.

**Démonstration** Remarque préliminaire : il est évident que [il n'existe pas de circuit de  $P \cup I$  qui contienne un  $P$ ] ssi [il n'existe pas de circuit de  $P \cup I \setminus I_0$  qui contienne un  $P$ ]. En outre, les couples  $(x, x)$  de  $X$  donnent naissance aux conditions sémantico-numériques triviales  $f(x) = f(x)$ , qui seront ignorées dans ce qui suit.

Conventions :

- Nous supposons que  $X$  comprend  $m$  éléments :  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .
- Nous désignerons par  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p$  les éléments (couples) de  $P$ .
- Nous désignons par  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ , les éléments (couples) de  $I \setminus I_0$ .
- Pour  $(x, y) \in P \cup I$ ,  $\mathbf{L}((x, y))$  est le vecteur ligne de taille  $m$  tel que  $\mathbf{L}_i((x, y))$  ( $i^{\text{ème}}$  composante de  $\mathbf{L}((x, y))$ ) vaut 1 ssi  $x_i$  est le premier élément du couple  $(x, y)$ ,  $\mathbf{L}_i((x, y)) = -1$  ssi  $x_i$  est le second élément de  $(x, y)$ , et  $\mathbf{L}_i((x, y)) = 0$  sinon.

Grâce à ces nouvelles notations, nous pouvons reformuler les conditions sémantico-numériques liées à une structure prolongeable en un préordre total (voir définition 17) comme suit :

$(P, I, J)$  est prolongeable en un préordre total  
 si et seulement si  
 $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall (x, y) \in P : f(x) - f(y) > 0 \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in I : f(x) - f(y) = 0$$

si et seulement si  
 $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall \pi \in P : \mathbf{L}(\pi) \cdot \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_m) \end{pmatrix} > 0 \quad \text{et} \quad \forall \theta \in I \setminus I_0 : \mathbf{L}(\theta) \cdot \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_m) \end{pmatrix} = 0 .$$

Par conséquent, le théorème de l'alternative 2 (avec  $\mathbf{C} = 0$ ) nous permet d'affirmer que  $(P, I, J)$  est prolongeable en un préordre total si et seulement si il n'existe pas  $p$  entiers non négatifs  $u_1, u_2, \dots, u_p$  (l'un d'entre eux au moins étant non nul) et  $r$  entiers  $w_1, w_2, \dots, w_r$  tels que

$$u_1 \cdot \mathbf{L}(\pi_1) + \dots + u_p \cdot \mathbf{L}(\pi_p) + w_1 \cdot \mathbf{L}(\theta_1) + \dots + w_r \cdot \mathbf{L}(\theta_r) = \mathbf{0}_{1 \times m} .$$

Nous devons donc montrer que ceci est équivalent à [il n'existe pas de circuit de  $P \cup I$  qui contienne un  $P$ ].

Soit  $F$  une famille (non vide) de couples de  $P \cup I$  contenant au moins un élément de  $P$ . Notons  $\lambda_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ ) le nombre de fois que le couple  $\pi_i$  apparaît dans  $F$ ;  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  sont des entiers non négatifs dont l'un au moins est positif. Notons aussi  $\mu_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ ) le nombre de fois que le couple  $\theta_i$  apparaît dans  $F$ . Le fait que l'équivalence que nous voulons prouver est vraie résulte de l'observation que  $F$  est composée de circuits si et seulement si,  $\forall x \in X$ , le nombre de fois que  $x$  est le premier élément d'un couple de  $F$  est égal au nombre de fois que  $x$  est le second élément d'un couple de  $F$  (vision graphique : en chaque sommet d'un circuit, le nombre de flèches entrantes est égal au nombre de flèches sortantes). Avec les notations précédentes, cela s'écrit :

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{L}(\pi_1) + \dots + \lambda_p \cdot \mathbf{L}(\pi_p) + \mu_1 \cdot \mathbf{L}(\theta_1) + \dots + \mu_r \cdot \mathbf{L}(\theta_r) = \mathbf{0}_{1 \times m} .$$

Il faut encore préciser que dans le cas où  $w_i$  est un nombre négatif et  $\theta_i = (x, y)$ , on constituera la famille  $F$  de couples formant un (ou plusieurs) circuit(s) en prenant  $-w_i$  fois le couple  $-\theta_i = (y, x)$  (qui, lui aussi, appartient à  $I \setminus I_0$  puisque cette relation est symétrique).

□

### 3.4.3 Familles de structures de préférence

**Proposition 33**  $\mathcal{P}$  est une famille de structures de type

1. **IF** ssi  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} : P_k I_k$  est acyclique (ssi  $I_k P_k$  est acyclique);
2. **SF** ssi  $\forall k$ , tout circuit de  $P_k \cup I_k$  contient (strictement) plus de  $I_k$  que de  $P_k$ ;
3. **RIF** ssi  $\bigcup_{k=1}^n P_k I_k$  est acyclique;
4. **LIF** ssi  $\bigcup_{k=1}^n I_k P_k$  est acyclique;
5. **LIF&RIF** ssi  $\bigcup_{k=1}^n P_k I_k$  et  $\bigcup_{k=1}^n I_k P_k$  sont acycliques;
6. **LRIF** ssi  $\bigcup_{k=1}^n (P_k I_k \cup I_k P_k)$  est acyclique;
7. **CHSF** ssi il n'existe pas de famille de couples de  $\bigcup_{k=1}^n (P_k \cup I_k)$  qui soit partitionnable à la fois en circuits et en paires déséquilibrées; notons que
  - une famille de couples est partitionnable en circuits ssi on peut partitionner cette famille en sous-familles dans chacune desquelles les couples forment un circuit
  - $\{(x, y), (z, w)\}$  est une paire déséquilibrée ssi  $\exists k \in \{1, 2, \dots, n\}$  tel que  $(x, y) \in P_k$  et  $(z, w) \in I_k$ ;
8. **WF** ssi  $\forall k$ , il n'existe pas de circuit de  $P_k \cup I_k$  qui contienne un  $P_k$ .

#### Démonstration

1. **IF** : conséquence directe du lemme 3.
2. **SF** : idem.
3. **RIF**.

Cette preuve suit le même schéma que celui employé pour démontrer le lemme 4.

Conventions :

- Nous supposons que  $X$  comprend  $m$  éléments :  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .

– Nous désignerons par  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p$  les éléments (couples) de l'ensemble

$$\bigcup_{k=1}^n P_k I_k.$$

– Pour  $\delta \in \bigcup_{k=1}^n P_k I_k$ ,  $\mathbf{L}(\delta)$  est le vecteur ligne de taille  $m$  tel que  $\mathbf{L}_i(\delta)$  ( $i^{\text{ème}}$  composante de  $\mathbf{L}(\delta)$ ) vaut 1 ssi  $x_i$  est le premier élément du couple  $\delta$ ,  $\mathbf{L}_i(\delta) = -1$  ssi  $x_i$  est le second élément de  $\delta$ , et  $\mathbf{L}_i(\delta) = 0$  sinon.

Nous pouvons reformuler le point 3 de la proposition 31 comme suit :  $\mathcal{P}$  est de type **RIF** si et seulement si  $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall (x, z) \in \bigcup_{k=1}^n P_k I_k : f(x) > f(z)$$

si et seulement si

$\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall \delta \in \bigcup_{k=1}^n P_k I_k : \mathbf{L}(\delta) \cdot \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_m) \end{pmatrix} > 0$$

Par conséquent, le théorème de l'alternative 2 (avec  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ) nous permet d'affirmer que  $\mathcal{P}$  est de type **RIF** si et seulement si il n'existe pas  $p$  entiers non négatifs  $u_1, u_2, \dots, u_p$  (l'un d'entre eux au moins étant non nul) tels que

$$u_1 \cdot \mathbf{L}(\delta_1) + \dots + u_p \cdot \mathbf{L}(\delta_p) = \mathbf{0}_{1 \times m}.$$

Nous devons donc montrer que ceci est équivalent à  $\left[ \bigcup_{k=1}^n P_k I_k \text{ acyclique} \right]$ .

Soit  $F$  une famille (non vide) de couples de  $\bigcup_{k=1}^n P_k I_k$ . Notons  $\lambda_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ ) le nombre de fois que le couple  $\delta_i$  apparaît dans  $F$ .  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  sont des entiers non négatifs dont l'un au moins est positif (car  $F \neq \emptyset$ ). Le fait que l'équivalence que nous voulons prouver est vraie résulte de l'observation que  $F$  est composée de circuits si et seulement si,  $\forall x \in X$ , le nombre de fois que  $x$  est le premier élément d'un couple de  $F$  est égal au nombre de fois que  $x$  est le

second élément d'un couple de  $F$  (vision graphique : en chaque sommet d'un circuit, le nombre de flèches entrantes est égal au nombre de flèches sortantes). Avec les notations précédentes, cela s'écrit :

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{L}(\delta_1) + \dots + \lambda_p \cdot \mathbf{L}(\delta_p) = \mathbf{0}_{1 \times m}.$$

4. Les preuves concernant les familles de type **LIF**, **LIF&RIF** et **LRIF** sont similaires à celle que nous venons de réaliser et sont laissées au lecteur.
5. Pour le cas **CHSF**, on peut définir  $\Pi$ , la famille des paires déséquilibrées :

$$\Pi = \bigcup_{k=1}^n \left\{ \left( \{(x, y), (z, w)\} \mid (x, y) \in P_k, (z, w) \in I_k \right) \right\}.$$

A partir de là, il faut remarquer que les conditions sémantico-numériques associées au type **CHSF** peuvent se réécrire de la manière suivante :

$$\forall \{(x, y), (z, w)\} \in \Pi : f(x) - f(y) > f(z) - f(w).$$

Il faut ensuite étendre la définition du vecteur  $\mathbf{L}$  comme suit :

- pour  $\pi \in \Pi$ ,  $\pi = \{(x, y), (z, w)\}$  et  $x^* \in X$ , définir  $\varphi_1(\pi, x^*) = 1$  si  $x^* = x$  et 0 sinon ;  $\varphi_2(\pi, x^*) = -1$  si  $x^* = y$  et 0 sinon ;  $\varphi_3(\pi, x^*) = -1$  si  $x^* = z$  et 0 sinon ;  $\varphi_4(\pi, x^*) = 1$  si  $x^* = w$  et 0 sinon.
- $i^{eme}$  composante du vecteur  $\mathbf{L}(\pi)$  :  $L_i(\pi) = \sum_{j=1}^4 \varphi_j(\pi, x_i)$ .

Alors, les conditions sémantico-numériques s'écrivent :

$$\forall \pi \in \Pi : \mathbf{L}(\pi) \cdot \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_m) \end{pmatrix} > 0$$

et on peut appliquer le théorème de l'alternative 2 (avec  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ). Le résultat en découle immédiatement comme pour le cas **RIF** ci-dessus.

6. **WF** : conséquence directe du lemme 4.

□

[Doi87] s'intéresse aux structures de type **CHSF**, et démontre, d'une manière totalement différente à celle proposée ici, un résultat similaire au nôtre mais pour des familles de structures de préférence complètes (voir page 52). Dans le cas non complet, [Doi88] propose un premier résultat (nous en reparlerons à la section 3.6). Pour une étude plus approfondie du cas **CHSF** dans le cas de structures emboîtées ayant la même relation d'incomparabilité, voir aussi [Mou02].

La Figure 3.19 reprend les différents types de familles envisagés à la section 3.2, et synthétise les résultats obtenus dans la proposition 33.

Les familles de structures de préférence possédant une caractérisation de type relationnelle sont précisément celles qu'on peut définir en termes de conditions sémantico-numériques. Ce fait n'est pas dû au hasard : en effet, la preuve de la proposition 33 découle de la proposition 31.

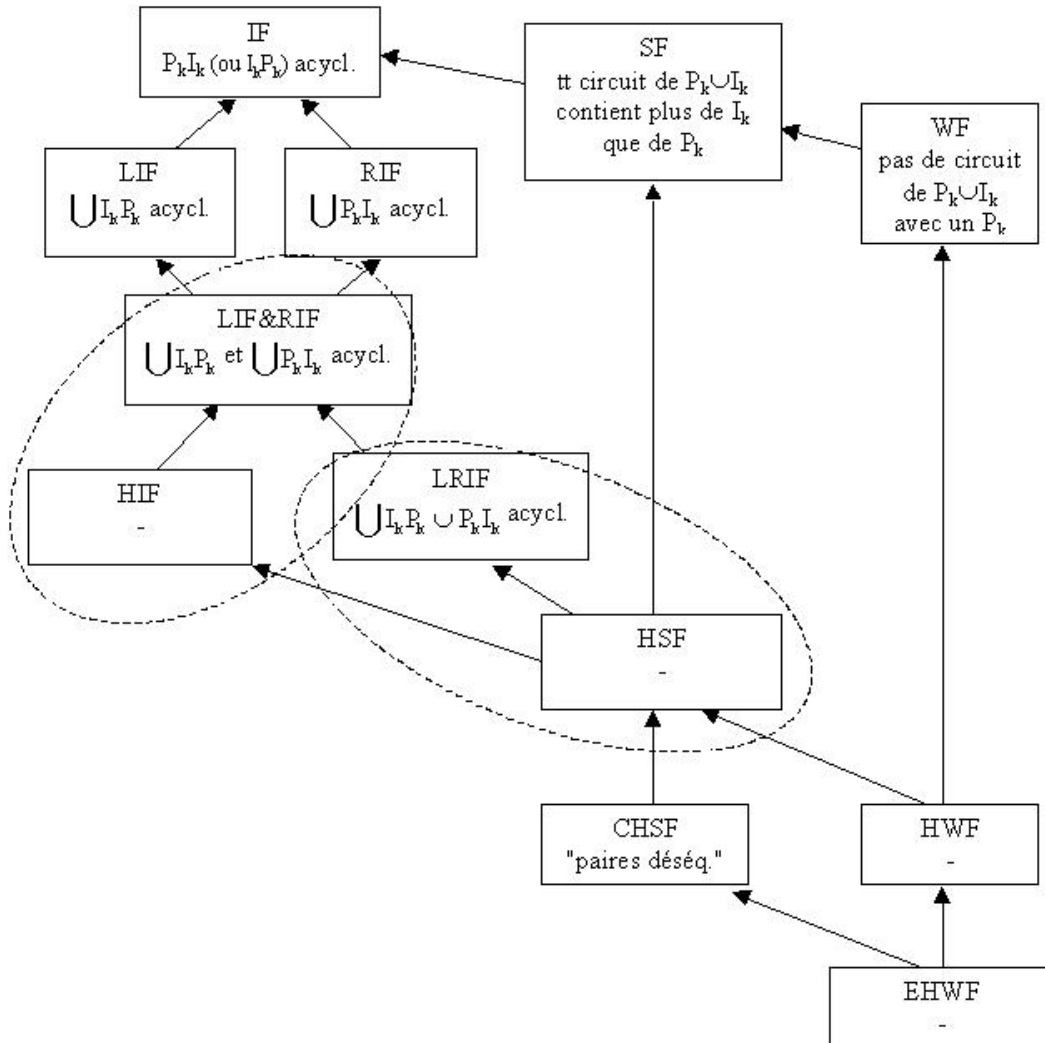


FIG. 3.19 – Les différents types de familles et leur caractérisation relationnelle.

**Exemples** Afin d'illustrer la proposition 33, reprenons les exemples introduits au paragraphe 3.2.6.

1. Famille de type **IF** (page 80).

A partir de chacune des structures  $(P_k, I_k, J_k)$  de la famille, on peut tracer le graphe de  $P_k \cup I_k$  (boucles omises), puis de  $P_k I_k$ . On constate que les graphes de  $P_1 I_1$ ,  $P_2 I_2$  et  $P_3 I_3$  sont acycliques (voir Fig. 3.20).

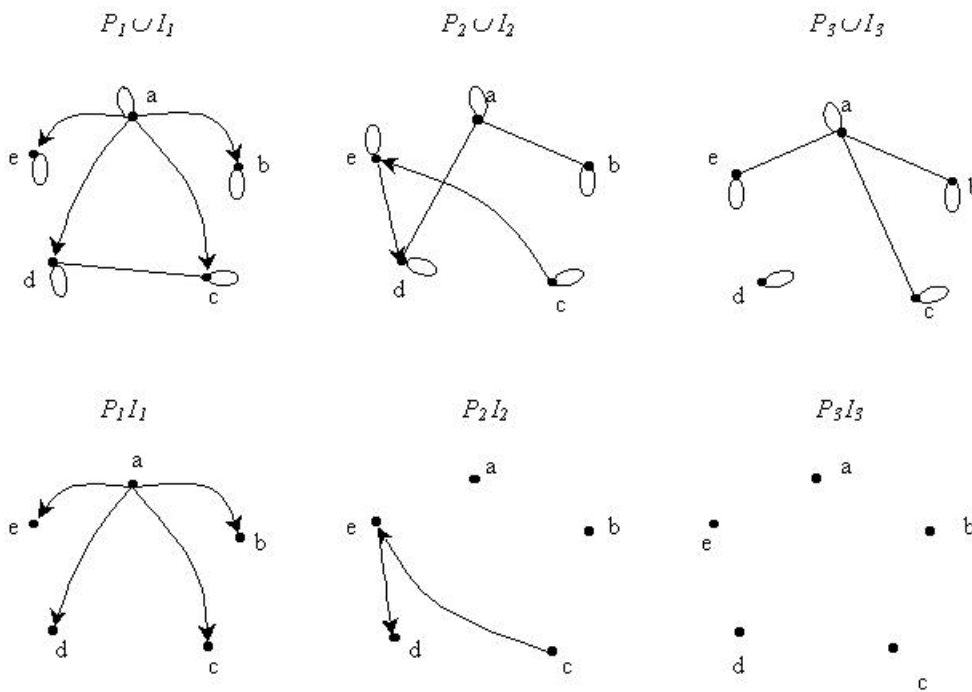


FIG. 3.20 – Famille de type **IF**

2. Famille de type **RIF** (page 82).

Voici (voir Fig. 3.21) les graphes des relations  $P_1 \cup I_1$ ,  $P_2 \cup I_2$  et  $P_3 \cup I_3$ , et celui de la relation  $\bigcup_{i=1}^3 P_i I_i$  qui en découle : on peut voir que cette dernière

est bien acyclique. Notez le lien entre les arcs de  $\bigcup_{i=1}^3 P_i I_i$  et les couples d'éléments impliqués dans les conditions sémantico-numériques présentées au paragraphe précédent (page 96) : ils se correspondent exactement.

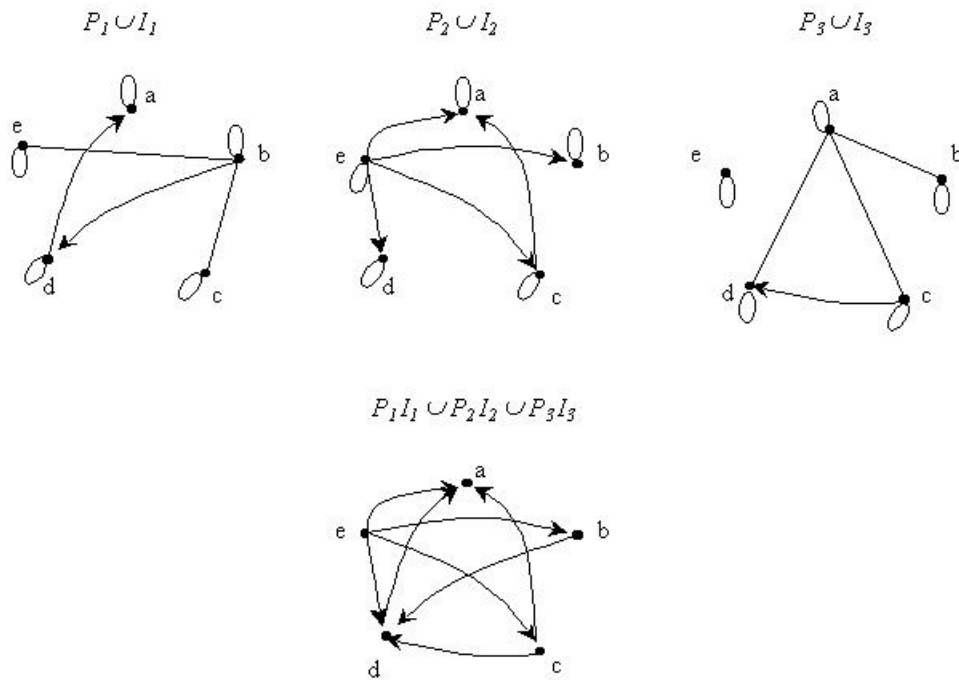


FIG. 3.21 – Famille de type **RIF**

3. Famille de type **LIF** (page 82).

Nous avons très peu d'information sur les relations de cette famille. Cela suffit cependant pour en déterminer le type. Voici (Fig. 3.22) les graphes de  $P_1 \cup I_1$ ,  $P_2 \cup I_2$ , et ensuite  $I_1P_1 \cup I_2P_2$  et  $P_1I_1 \cup P_2I_2$ . La non-acyclicité de cette dernière relation nous confirme que la famille n'est pas de type **RIF**.

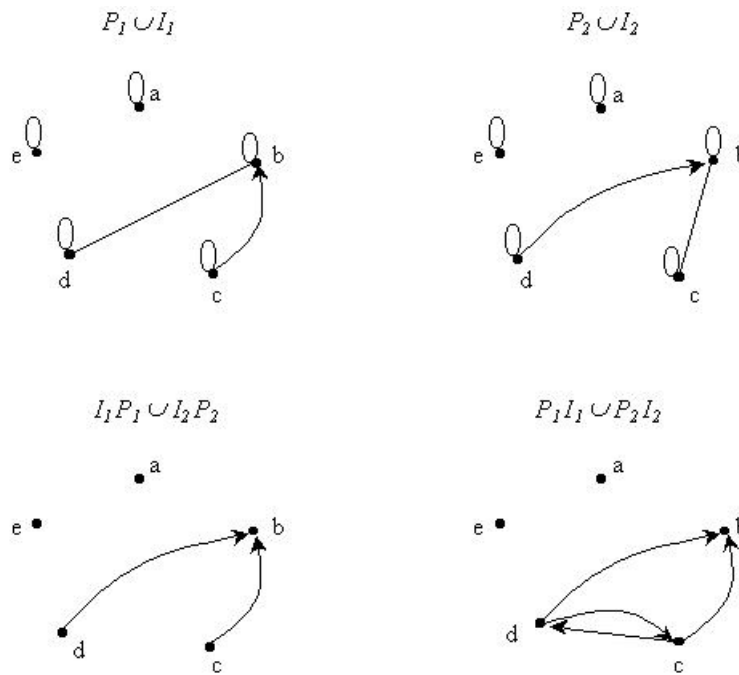
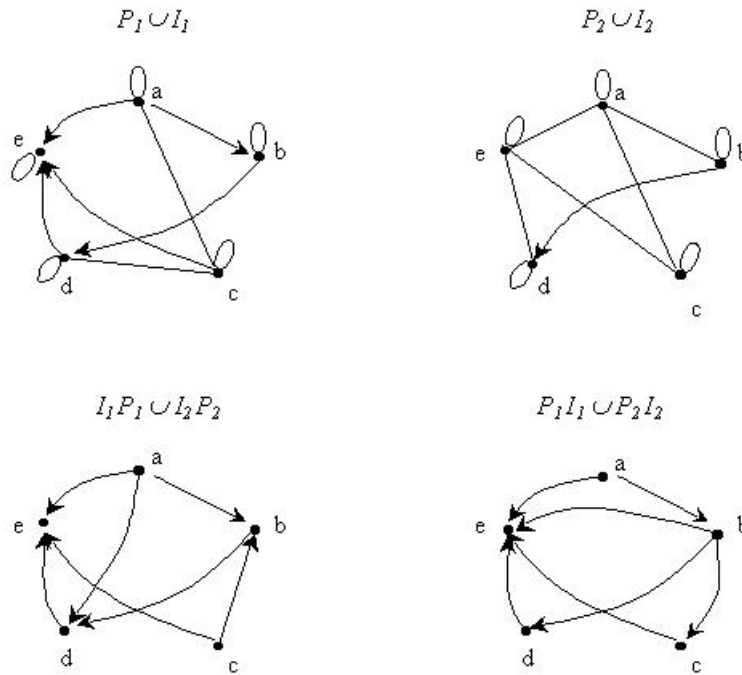


FIG. 3.22 – Famille de type **LIF**

4. Famille de type **LIF&RIF** (page 83).

Dans cet exemple, les graphes de  $I_1P_1 \cup I_2P_2$  et  $P_1I_1 \cup P_2I_2$  sont tous deux acycliques (voir Fig. 3.23). Par contre, leur réunion ne l'est pas (considérer la paire  $\{b, c\}$ ).

FIG. 3.23 – Famille de type **LIF&RIF**

5. Famille de type **LRIF** (page 84).

Cette fois, c'est  $I_1P_1 \cup I_2P_2 \cup P_1I_1 \cup P_2I_2$  qui est bien acyclique (voir Fig. 3.24).

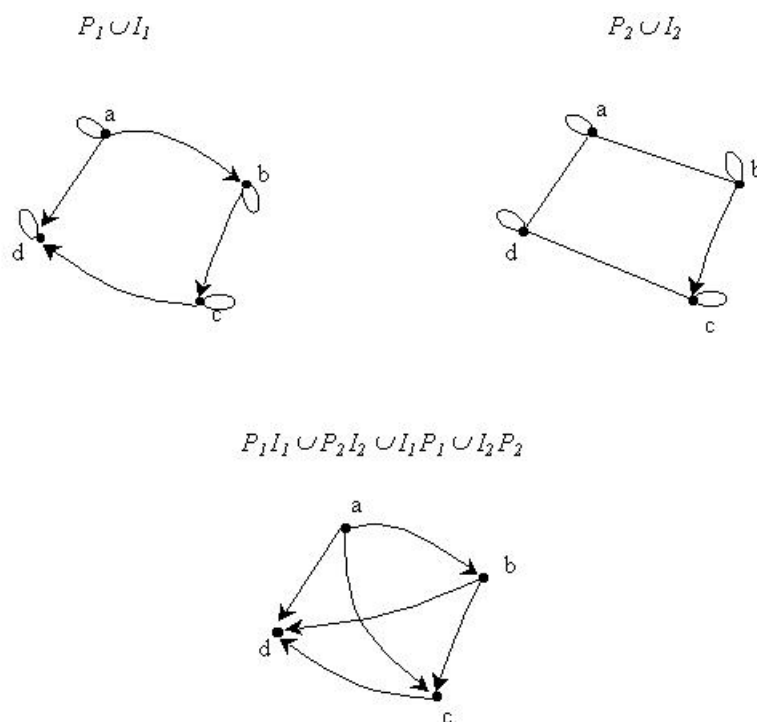


FIG. 3.24 – Famille de type **LRIF**

6. Famille de type **CHSF** (page 88).

On peut voir sur le graphe de  $P_1 \cup I_1 \cup P_2 \cup I_2$  (Fig. 3.25) qu'il n'y a pas de famille de couples qui soit partitionnable à la fois en circuits et en paires déséquilibrées. Notons que cette condition peut vite devenir difficile à tester à la "main" sur des exemples plus gros.

7. Famille de type **WF** (page 90).

Le graphe de chacune des relations  $P_k \cup I_k$  est sans circuit contenant un  $P_k$  (voir Fig. 3.26).

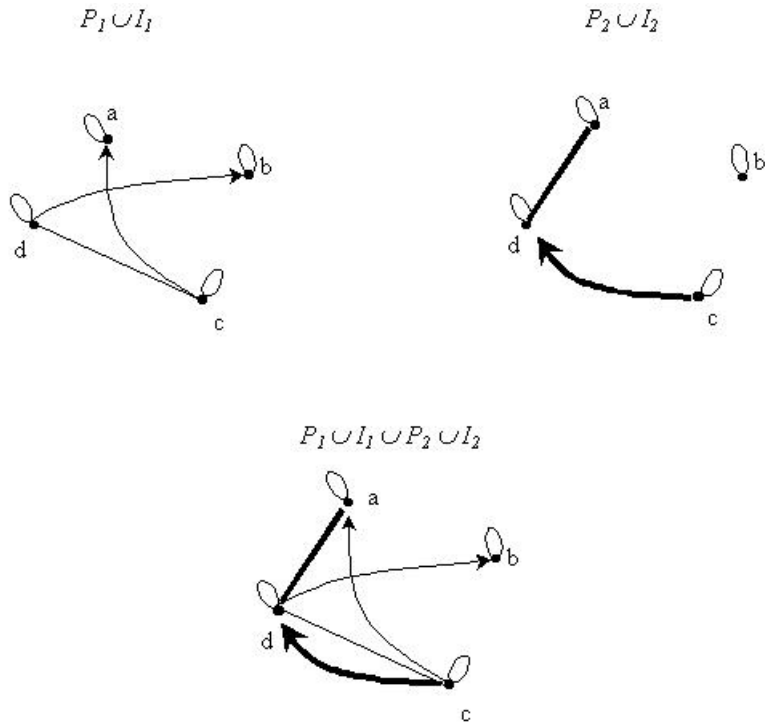


FIG. 3.25 – Famille de type **CHSF**

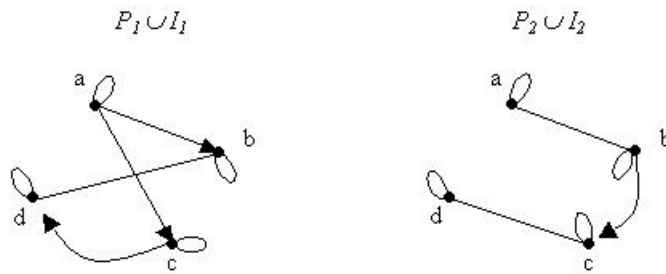


FIG. 3.26 – Famille de type **WF**

### Formulation unificatrice des conditions relationnelles

Il peut paraître étonnant que la condition liée au type **CHSF** dans la proposition 33 s'énonce de manière si différente des autres. Il est cependant possible de rassembler tous les résultats précédents concernant les conditions relationnelles en une seule formulation. L'écriture en est peut-être plus obscure, mais le côté unifiant de cette présentation des choses peut être apprécié par certains.

**Proposition 34**  $\mathcal{P}$  est de type (1)**IF**, (2)**SF**, (3)**RIF**, (4)**LIF**, (5)**LIF&RIF**, (6)**LRIF**, (7)**CHSF**, (8)**WF** ssi il n'existe pas de famille  $F$  de couples de  $X^2$  qui soit une collection de circuits, et qui

1. (**IF**) pour un certain  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , se décompose en paires  $\{(x, y), (y, z)\}$  où  $(x, y) \in P_k$  et  $(y, z) \in I_k$ ;
2. (**SF**) pour un certain  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , soit une famille de couples de  $P_k \cup I_k$  avec  $|P_k|_F \geq |I_k|_F^3$ ;
3. (**RIF**) se décompose en paires  $\{(x, y), (y, z)\}$  où  $(x, y) \in P_k$  et  $(y, z) \in I_k$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ );
4. (**LIF**) se décompose en paires  $\{(x, y), (y, z)\}$  où  $(x, y) \in I_k$  et  $(y, z) \in P_k$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ );
5. (**LIF&RIF**) se décompose en paires  $\{(x, y), (y, z)\}$  où  $(x, y) \in P_k$  et  $(y, z) \in I_k$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ), ou bien se décompose en paires  $\{(x, y), (y, z)\}$  où  $(x, y) \in I_k$  et  $(y, z) \in P_k$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ );
6. (**LRIF**) se décompose en paires  $\{(x, y), (y, z)\}$  où  $(x, y) \in P_k$  et  $(y, z) \in I_k$  ou bien  $(x, y) \in I_k$  et  $(y, z) \in P_k$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ );
7. (**CHSF**) se décompose en paires  $\{(x, y), (z, w)\}$  où  $(x, y) \in P_k$  et  $(z, w) \in I_k$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ );
8. (**WF**) pour un certain  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , soit une famille de couples de  $P_k \cup I_k$  qui contienne au moins un élément de  $P_k$ .

□

Sur le plan pratique, la démonstration de la proposition 33 a fait germer l'idée d'une méthode permettant de détecter informatiquement la présence d'incohérences dans les jugements émis par une personne au cours du questionnement MACBETH, et de montrer ces incohérences au décideur (voir à ce sujet [De 02]).

---

<sup>3</sup>Si  $R$  est une relation sur  $X$  et  $F$  une famille de couples de  $R$ , alors  $|R|_F$  est le nombre de couples de  $F$  qui appartiennent à  $R$ .

Grâce aux conditions sémantico-numériques, on peut donc mettre en place un programme qui détecte le type d'une famille de structures de préférence donnée, mais aussi qui met en évidence les problèmes existant au sein de l'information préférentielle pour que celle-ci soit d'un type donné. Dans le cas où les structures de la famille sont complètes, cette démarche concerne tous les types présentés ici (voir proposition 35 pour les types **HIF** et **HSF**, et proposition 36 pour les types **HWF** et **EHWF**).

**Proposition 35** 1. Dans le cas complet, les types **LRIF** et **HSF** coïncident.  
2. Dans le cas complet, les types **LIF&RIF** et **HIF** coïncident.

### Démonstration

1. On sait déjà que si une famille est de type **HSF**, alors elle est de type **LRIF**. Pour montrer l'implication réciproque, il suffit de voir que, dans le cas complet, (cf. proposition 20, page 50)  $\left[ \bigcup_{k=1}^n (P_k I_k \cup I_k P_k) \text{ acyclique} \right] \Rightarrow \left[ \bigcup_{k=1}^n (P_k P_k \cup P_k I_k \cup I_k P_k) \text{ asymétrique} \right]$ .

Notons que puisque les  $I_k$  sont réflexives, on a  $P_k \subseteq P_k I_k \cup I_k P_k$  pour tout  $k$ ; par conséquent, si  $(x, y) \in \bigcup_{k=1}^n P_k P_k$ , alors il existe  $z \in X$  tel que  $(x, z)$  et  $(z, y)$  appartiennent tous deux à  $\bigcup_{k=1}^n (P_k I_k \cup I_k P_k)$ .

Procédons par l'absurde, et supposons qu'il existe  $x$  et  $y$  dans  $X$  tels que  $(x, y) \in \bigcup_{k=1}^n (P_k P_k \cup P_k I_k \cup I_k P_k)$  et  $(y, x) \in \bigcup_{k=1}^n (P_k P_k \cup P_k I_k \cup I_k P_k)$ . Dans ce cas, compte tenu de la remarque précédente, on peut construire un circuit de  $\bigcup_{k=1}^n (P_k I_k \cup I_k P_k)$ .

2. Il suffit de voir que (cf. proposition 18, page 46)  $\left[ \bigcup_{k=1}^n P_k I_k \text{ et } \bigcup_{k=1}^n I_k P_k \text{ acycliques} \right] \Rightarrow \left[ \bigcup_{k=1}^n (P_k P_k \cup P_k I_k) \text{ et } \bigcup_{k=1}^n (P_k P_k \cup I_k P_k) \text{ asymétriques} \right]$ . La preuve est similaire à la précédente.

□

Pour les familles homogènes de préordres, le théorème de l'alternative conduit aux résultats suivants :

**Proposition 36** Soit  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$ , une famille de structures de préférence **complètes** sur  $X$ .

1.  $\mathcal{P}$  est de type **HWF** (c'est-à-dire une famille homogène de préordres totaux) ssi  $\forall k$ , il n'existe pas de circuit de  $I_k \cup \bigcup_{i=1}^n P_i$  qui contienne un  $P_k$ .
2.  $\mathcal{P}$  est de type **EHWF** (c'est-à-dire une famille homogène de préordres totaux emboîtés) ssi  $\forall k$ , il n'existe pas de circuit de  $\bigcup_{i=1}^k I_i \cup \bigcup_{i=1}^n P_i$  qui contienne un élément de  $\bigcup_{i=k}^n P_i$ .

**Démonstration (HWF.)** Cette preuve utilise une fois de plus le théorème de l'alternative 2, mais la définition des matrices **A**, **C** et **D** devient plus complexe, tout comme l'interprétation des éléments des vecteurs **u**, **v** et **w**.

$$\text{Nous posons } \mathbf{f}_U(X) = \begin{pmatrix} f_1(x_1) \\ f_1(x_2) \\ \dots \\ f_1(x_m) \\ \dots \\ f_n(x_1) \\ f_n(x_2) \\ \dots \\ f_n(x_m) \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{f}_U(X)$  est un vecteur colonne comprenant  $n.m$  éléments.

Soit  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ; soit  $\pi$ , un couple de  $P_k$ .

$\mathbf{L}(\pi)$  est un vecteur ligne à  $n.m$  éléments, et  $\mathbf{L}_{(k-1).m+j}(\pi)$ , le  $((k-1).m+j)^{\text{ème}}$  élément de  $\mathbf{L}(\pi)$  (où  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ) est défini comme suit :

- $\mathbf{L}_{(k-1).m+j}(\pi) = 1$  ssi  $x_j$  est le premier élément de  $\pi$
- $\mathbf{L}_{(k-1).m+j}(\pi) = -1$  ssi  $x_j$  est le second élément de  $\pi$
- $\mathbf{L}_{(k-1).m+j}(\pi) = 0$  sinon.

On définit  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}(\pi_{1,1}) \\ \mathbf{L}(\pi_{1,2}) \\ \dots \\ \mathbf{L}(\pi_{1,\#P_1}) \\ \dots \\ \mathbf{L}(\pi_{n,1}) \\ \mathbf{L}(\pi_{n,2}) \\ \dots \\ \mathbf{L}(\pi_{n,\#P_n}) \end{pmatrix}$ , où  $\pi_{k,j}$  est le  $j$ ème couple de  $P_k$ .

En remplaçant  $\pi$  par  $\theta$  et  $P$  par  $I$  dans ce qui précède, on obtient la définition de  $\mathbf{L}(\theta)$  et de la matrice  $\mathbf{D}$ .

$\mathbf{A}$  (resp.  $\mathbf{D}$ ) est donc une matrice qui contient, en diagonale,  $n$  sous-matrices de dimension  $\#P_k \times m^4$  (où  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) (resp.  $\#I_k \times m$ ) qui correspondent aux couples des relations  $P_k$  (resp.  $I_k$ ), et des zéros partout ailleurs. Une ligne de  $\mathbf{A}$  (resp. de  $\mathbf{D}$ ) correspond à un couple de  $\bigcup_{k=1}^n P_k$ <sup>5</sup> (resp.  $\bigcup_{k=1}^n I_k$ ), et aussi à une condition sémantico-numérique de type  $f_k(x) > f_k(y)$  (resp.  $f_k(x) = f_k(y)$ ).  $\mathbf{A}$  est de dimension  $\left(\sum_{k=1}^n \#P_k\right) \times (n.m)$ , et  $\mathbf{D}$  est de dimension  $\left(\sum_{k=1}^n \#I_k\right) \times (n.m)$ . La Figure 3.27 aide à se faire une idée de la forme de la matrice  $\mathbf{A}$ .

La matrice  $\mathbf{C}$  est de dimension  $\left((n-1) \cdot \sum_{k=1}^n \#P_k\right) \times (n.m)$ . Visuellement, elle contient, elle aussi,  $n$  “superblocs” en diagonale, et des zéros partout ailleurs. Chacun des “superblocs” possède  $m$  colonnes. Pour un certain  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , le  $k$ ème “superbloc” est une superposition des blocs diagonaux contenus dans la matrice  $\mathbf{A}$  qui sont issus des relations  $P_1, \dots, P_{k-1}, P_{k+1}, \dots, P_n$ . Une ligne de la matrice  $\mathbf{C}$  correspond à une condition sémantico-numérique de type  $f_k(x) \geq f_k(y)$ . Pour un couple  $(x, y) \in P_{k^*}$  (pour un certain  $k^* \in \{1, 2, \dots, n\}$ ), cette condition sémantico-numérique va apparaître  $n-1$  fois, pour toutes les valeurs de  $k$  dans  $\{1, \dots, k^*-1, k^*+1, n\}$ , et va correspondre à  $n-1$  lignes de la matrice. Nous ne nous attardons pas sur l’écriture formelle de tout ceci. La Figure 3.28 permet de se faire une idée de la forme de la matrice  $\mathbf{C}$ .

Les conditions sémantico-numériques liées au type **HWF** peuvent se réécrire comme suit :

<sup>4</sup> $\#R$  désigne le cardinal de l’ensemble  $R$ , i.e. son nombre d’éléments.

<sup>5</sup>Notons que si un couple appartient à  $\alpha$  relations  $P_k$  (resp.  $I_k$ ) différentes, alors il y aura  $\alpha$  lignes de  $A$  (resp. de  $D$ ) qui lui correspondront.

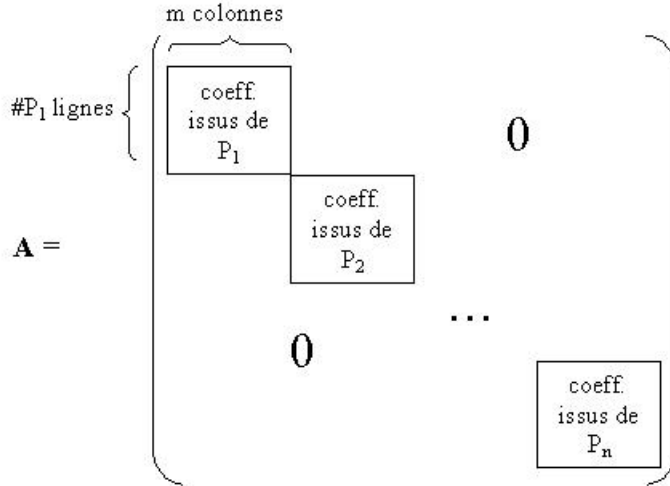


FIG. 3.27 – La matrice  $\mathbf{A}$ .

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{f}_U(X) > 0$
- $\mathbf{C} \cdot \mathbf{f}_U(X) \geq 0$
- $\mathbf{D} \cdot \mathbf{f}_U(X) = 0$  .

Le théorème de l'alternative nous permet donc d'affirmer qu'une famille  $\mathcal{P}$  est de type **HWF** si et seulement si il n'existe pas de vecteurs  $\mathbf{u}$  (constitué d'entiers non négatifs et non tous nuls),  $\mathbf{v}$  (constitué d'entiers non négatifs) et  $\mathbf{w}$  tels que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{D} = 0. \tag{3.1}$$

Donnons une interprétation relationnelle aux vecteurs  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$ . Supposons tout d'abord qu'il existe des vecteurs  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  comme dans l'équation 3.1. Le vecteur  $\mathbf{u}$  est de dimension  $\left(\sum_{k=1}^n \#P_k\right)$ , et peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{u} = \left(u_1(1), \dots, u_1(\#P_1), u_2(1), \dots, u_2(\#P_2), \dots, u_n(1), \dots, u_n(\#P_n)\right)$$

Dans le produit  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}$ , un élément  $u_k(i)$  va multiplier la ligne de  $A$  qui se rapporte au  $i^{\text{ème}}$  couple de  $P_k$ .

On sait que  $\mathbf{u}$  a au moins une composante strictement positive, disons  $u_{k^*}(i^*)$  (pour un certain  $k^*$  dans  $\{1, 2, \dots, n\}$  et un certain  $i^*$  dans  $\{1, 2, \dots, \#P_{k^*}\}$ ). Com-

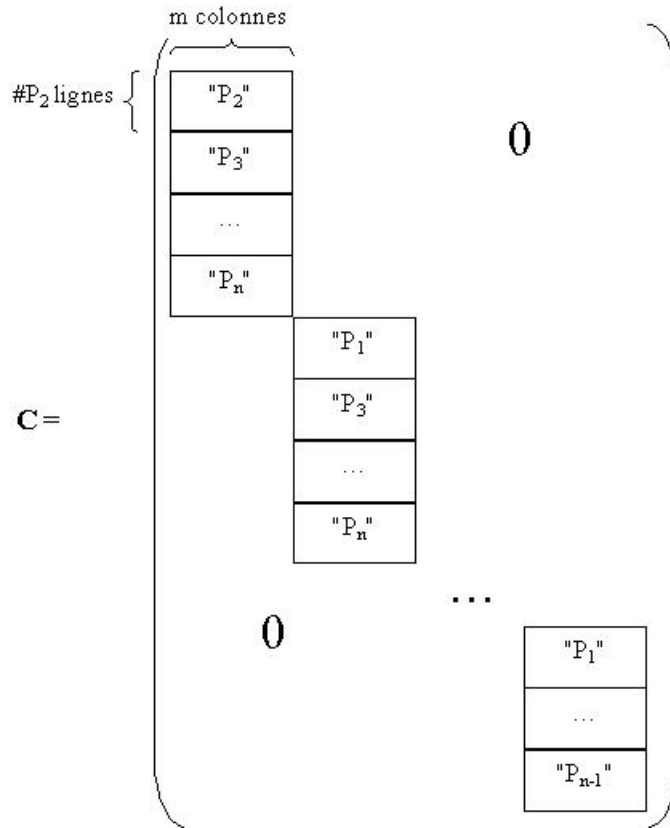


FIG. 3.28 – La matrice  $C$ .

mençons à constituer une famille  $F$  de couples de  $I_{k^*} \cup \bigcup_{k=1}^n P_k$  en prenant :

- $u_{k^*}(1)$  fois le premier couple de  $P_{k^*}$
- $u_{k^*}(2)$  fois le second couple de  $P_{k^*}$
- ...
- $u_{k^*}(\#P_{k^*})$  fois le  $(\#P_{k^*})^{\text{ème}}$  (c'est-à-dire le dernier) couple de  $P_{k^*}$ .

Ensuite, ajoutons à  $F$  les couples suivants :  $\forall i \in \{1, 2, \dots, (\#I_{k^*})\}$ ,

- $w_{k^*}(i)$  fois le  $i^{\text{ème}}$  couple de  $I_{k^*}$  si  $w_{k^*}(i) > 0$
- $w_{k^*}(i)$  fois le symétrique du  $i^{\text{ème}}$  couple de  $I_{k^*}$  si  $w_{k^*}(i) < 0$ .

Intéressons-nous à présent au vecteur  $\mathbf{v}$ . Il contient  $\left( (n-1) \cdot \sum_{k=1}^n \#P_k \right)$  éléments,

et peut s'écrire comme ceci :

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

où  $v_k = \left( v_k(1, \bullet), \dots, v_k(k-1, \bullet), v_k(k+1, \bullet), \dots, v_k(n, \bullet) \right)$   
 et où  $v_k(i, \bullet) = (v_k(i, 1), v_k(i, 2), \dots, v_k(i, \#P_i))$ .

Dans le produit  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}$ , un élément  $v_k(i, j)$  de  $\mathbf{v}$  va multiplier la ligne de  $\mathbf{C}$  qui se trouve dans le  $k^{\text{ème}}$  superbloc, et qui fait référence au  $j^{\text{ème}}$  couple de  $P_i$ .

Enrichissons encore notre famille de couples  $F$  comme ceci :  $\forall i \in \{1, \dots, k^* - 1, k^* + 1, \dots, n\}$  et  $\forall j \in \{1, 2, \dots, \#P_i\}$ , ajoutons  $v_{k^*}(i, j)$  fois le  $j^{\text{ème}}$  couple de  $P_i$ .

L'équation 3.1 nous permet d'affirmer que  $F$  est une famille de couples de  $I_{k^*} \cup \bigcup_{k=1}^n P_k$  (par construction), contenant un élément de  $P_{k^*}$  (par construction) et dont les couples constituent une collection de circuits (même argument que pour le type **RIF**); parmi ces circuits, il y en a un qui contient l'élément de  $P_{k^*}$ , c'est le circuit recherché.

Réciproquement, si l'on dispose, pour un certain  $k^* \in \{1, 2, \dots, n\}$ , d'une famille  $F$  de couples de  $I_{k^*} \cup \bigcup_{k=1}^n P_k$  contenant un élément de  $P_{k^*}$  et dont les couples constituent un circuit, alors en posant

- $\forall j \in \{1, 2, \dots, \#P_{k^*}\} : u_{k^*}(j) =$  nombre de fois que le  $j^{\text{ème}}$  couple de  $P_{k^*}$  apparaît dans  $F$
- $u_k(j) = 0$  pour les autres éléments de  $\mathbf{u}$  (c'est-à-dire pour  $k \neq k^*$ )
- $\forall j \in \{1, 2, \dots, \#I_{k^*}\} : w_{k^*}(j) =$  nombre de fois que le  $j^{\text{ème}}$  couple de  $I_{k^*}$  apparaît dans  $F$
- $w_k(j) = 0$  pour les autres éléments de  $\mathbf{w}$  (c'est-à-dire pour  $k \neq k^*$ )
- $\forall i \in \{1, 2, \dots, k^* - 1, k^* + 1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, \#P_i\} : v_{k^*}(i, j) =$  nombre de fois que le  $j^{\text{ème}}$  couple de  $P_i$  apparaît dans  $F$
- $v_k(i, j) = 0$  pour les autres éléments de  $\mathbf{v}$  (c'est-à-dire pour  $k \neq k^*$ ),

l'équation 3.1 est bien vérifiée. Par conséquent, la famille  $\mathcal{P}$  de départ n'est pas de type **HWF**.

La preuve liée au type **EHWF** est essentiellement la même, il faut évidemment adapter les matrices **A**, **C** et **D** au cas étudié.

□

Dans le cas non complet, les types **HWF** et **EHWF** impliquent les conditions relationnelles de la proposition 36, mais pas le contraire. En effet, si l'on

reprend l'exemple 27 présenté page 98, on peut voir (cf. Fig. 3.29 ci-dessous) que les graphes des relations  $I_1 \cup P_1 \cup P_2$  et  $I_2 \cup P_1 \cup P_2$  sont acycliques ; cependant, comme on l'a déjà signalé, cette famille  $\mathcal{P}$  n'est pas de type **HWF**.

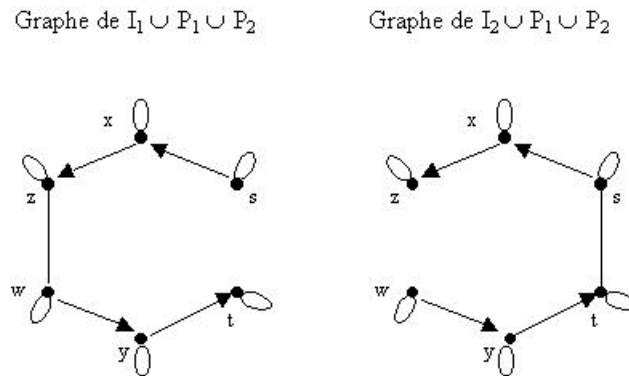


FIG. 3.29 – Graphes liés à l'exemple 27.

## 3.5 Vision matricielle

### 3.5.1 Structures prolongeables en un ordre d'intervalles, un semi-ordre ou un préordre total

Commençons une fois de plus par l'étude d'une structure de préférence  $(P, I, J)$ . On peut montrer que :

- Lemme 5**
1. Une structure  $(P, I, J)$  est prolongeable en un ordre d'intervalles si et seulement si il existe deux ordres totaux  $V$  et  $H$  sur  $X$  tels que  $VPH \subseteq P \cup J$ .
  2. Une structure  $(P, I, J)$  est prolongeable en un semi-ordre si et seulement si il existe un ordre total  $T$  sur  $X$  tel que  $TPT \subseteq P \cup J$ .
  3. Une structure  $(P, I, J)$  est prolongeable en un préordre total si et seulement si il existe un ordre total  $T$  sur  $X$  tel que
    - $TPT \subseteq P \cup J$
    - $xPy \Rightarrow$  il existe  $z \neq y$  tel que  $xTzTy$  et  $z(P \cup J)z_+$  et  $[vTzJz_+Tw \Rightarrow v(P \cup J)w]$ .

**Démonstration**

1. Structure prolongeable en un ordre d'intervalles.

$\Rightarrow$  Considérons  $(P^*, I^*)$ , une extension complète de la structure  $(P, I, J)$  en un ordre d'intervalles, induite par l'une de ses représentations numériques. Comme  $(P^*, I^*)$  est un ordre d'intervalles, il existe deux ordres totaux  $V$  et  $H$  tels que  $VP^* \subseteq P^*$  et  $P^*H \subseteq P^*$  (voir [DMRV86], p.439, avec  $P^*$  irréflexive). Il est aisé de voir que  $[VP^* \subseteq P^* \text{ et } P^*H \subseteq P^*] \Leftrightarrow VP^*H \subseteq P^*$  (on utilise le fait que  $V$  et  $H$  sont réflexives). Comme  $VP^*H \subseteq VP^*H$  et  $P^* \subseteq P \cup J$ , on a  $VP^*H \subseteq P \cup J$ .

$\Leftarrow$  Posons  $P^* = VP^*H$  et  $I^* = X^2 \setminus (P^* \cup P^{*-})$ . On a  $VP^*H \subseteq P^*$  (car  $V$  et  $H$  transitives) et  $P^*$  irréflexive, donc  $(P^*, I^*)$  est un ordre d'intervalles (cf. [DMRV86], p.439, avec  $P^*$  irréflexive), et donc  $(P, I, J)$  est prolongeable en un ordre d'intervalles (on peut voir que toute représentation numérique de  $(P^*, I^*)$  en est aussi une pour  $(P, I, J)$ ).

2. Structure prolongeable en un semi-ordre.

La preuve est essentiellement la même, et est donc laissée au lecteur.

3. Structure prolongeable en un préordre total.

$\Rightarrow$  Considérons une structure de préordre total  $(P^*, I^*)$  qui est une extension complète de  $(P, I, J)$ , et soit  $T$ , un ordre total comme dans la proposition 14 (page 38). On sait que  $TP^*T \subseteq P^*$ , donc aussi  $TPT \subseteq P^* \subseteq P \cup J$ . De plus,  $xPy$  implique qu'il existe  $z \neq y$  tel que  $xTzTy$  et  $zP^*z_+$ , donc aussi  $z(P \cup J)z_+$ . Enfin,  $vTzP^*z_+Tw$  implique  $vP^*w$ , donc aussi  $v(P \cup J)w$ .

$\Leftarrow$  Considérons  $\Pi = \{(z, z_+) : z(P \cup J)z_+ \text{ et } [xTz \text{ et } z_+Ty \Rightarrow x(P \cup J)y]\}$ . Posons  $P^* = T\Pi T$ . On a  $TP^*T = TT\Pi TT = T\Pi T = P^*$ , donc a fortiori  $TP^*T \subseteq P^*$ . De plus, si  $xP^*y$ , alors  $xT\Pi Ty$ , donc il existe  $z \neq y$  tel que  $xTzTy$  et  $z\Pi z_+$ . Puisque  $z\Pi z_+$  et  $\Pi \subseteq T\Pi T = P^*$ , on a en outre  $zP^*z_+$ . Si on pose  $I^* = X \setminus (P^* \cup P^{*-})$ , alors, par la proposition 14,  $(P^*, I^*)$  est bien une structure de préordre total qui prolonge  $(P, I, J)$ .

□

L'interprétation matricielle de ce type de résultat est la suivante. Considérons une matrice carrée  $\mathbf{M}$  d'ordre  $m$  ( $m = |X|$ ) dont les lignes et les colonnes sont associées aux éléments de  $X$  rangés respectivement selon les ordres totaux  $V$  et  $H$ . Posons

$$\mathbf{M}[x, y] = \begin{cases} P & \text{si } xPy \\ I & \text{si } xIy \\ J & \text{si } xJy \end{cases} .$$

La condition  $VPH \subseteq P \cup J$  revient à imposer que dans la matrice  $\mathbf{M}$ , au-dessus et/ou à droite de tout  $P$ , il y ait soit un  $P$ , soit un  $J$ . Les  $P$  constituent donc un bloc (éventuellement ponctué de  $J$ ) en forme d'escalier.

**Exemples** Revenons aux exemples concernant les structures prolongeables en un ordre d'intervalle (ex. 12, p. 71) et en un semi-ordre (ex. 13, p. 73) : les représentations matricielles des extensions complètes proposées vérifient bien le lemme 5. Par conséquent, c'est aussi vrai pour les structures de départ (qui sont évidemment incluses dans leurs extensions complètes).

Pour la structure prolongeable en un ordre d'intervalles, on a par exemple :

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	•	<i>I</i>	<i>P</i>	<i>J</i>	<i>J</i>
<i>b</i>		<i>J</i>	•	<i>J</i>	<i>P</i>
<i>c</i>	<i>I</i>	•	<i>J</i>	<i>J</i>	<i>I</i>
<i>d</i>	<i>J</i>	<i>J</i>	<i>J</i>	•	<i>J</i>
<i>e</i>	<i>J</i>	<i>I</i>		<i>J</i>	•

Pour la structure prolongeable en un semi-ordre :

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	•	<i>P</i>	<i>J</i>	<i>P</i>	<i>P</i>
<i>b</i>		•	<i>J</i>	<i>J</i>	<i>J</i>
<i>c</i>	<i>J</i>	<i>J</i>	•	<i>I</i>	<i>J</i>
<i>d</i>		<i>J</i>	<i>I</i>	•	<i>J</i>
<i>e</i>		<i>J</i>	<i>J</i>	<i>J</i>	•

Pour mieux comprendre la fin de la condition matricielle du lemme 5 relative à une structure prolongeable en un préordre total, voici un cas où la condition  $[vTzJz_+Tw \Rightarrow v(P \cup J)w]$  n'est pas respectée. On peut voir qu'on ne pourra pas, à partir de cette structure, construire un "bloc de  $P$  en escalier dont chaque marche s'appuie sur la diagonale".

$(P, I, J)$	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	•	<i>I</i>	<i>P</i>	<i>P</i>
<i>b</i>	<i>I</i>	•	<i>J</i>	<i>I</i>
<i>c</i>		<i>J</i>	•	<i>J</i>
<i>d</i>		<i>I</i>	<i>J</i>	•

### 3.5.2 Familles de structures de préférence

**Proposition 37**  $\mathcal{P}$  est une famille de structures de préférence (de type)

1. **IF** ssi il existe  $2n$  ordres totaux  $V_1, V_2, \dots, V_n, H_1, H_2, \dots, H_n$  sur  $X$  tels que  $\forall k$ ,

$$V_k P_k H_k \subseteq P_k \cup J_k ;$$

2. **SF** ssi il existe  $n$  ordres totaux  $T_1, T_2, \dots, T_n$  sur  $X$  tels que  $\forall k$ ,

$$T_k P_k T_k \subseteq P_k \cup J_k ;$$

3. **RIF** ssi il existe  $(n+1)$  ordres totaux  $V, H_1, H_2, \dots, H_n$  sur  $X$  tels que  $\forall k$ ,

$$V P_k H_k \subseteq P_k \cup J_k ;$$

4. **LIF** ssi il existe  $(n+1)$  ordres totaux  $V_1, V_2, \dots, V_n, H$  sur  $X$  tels que  $\forall k$ ,

$$V_k P_k H \subseteq P_k \cup J_k ;$$

5. **LIF&RIF** ssi il existe  $(n+1)$  ordres totaux  $V, H_1, H_2, \dots, H_n$  sur  $X$  tels que  $\forall k$ ,

$$V P_k H_k \subseteq P_k \cup J_k$$

et il existe  $(n+1)$  ordres totaux  $V_1, V_2, \dots, V_n, H$  sur  $X$  tels que  $\forall k$ ,

$$V_k P_k H \subseteq P_k \cup J_k ;$$

6. **LRIF** ssi il existe un ordre total  $T$  tel que

[ il existe  $n$  ordres totaux  $H_1, H_2, \dots, H_n$  sur  $X$  tels que  $\forall k$ ,

$$T P_k H_k \subseteq P_k \cup J_k$$

et il existe  $n$  ordres totaux  $V_1, V_2, \dots, V_n$  sur  $X$  tels que  $\forall k$ ,

$$V_k P_k T \subseteq P_k \cup J_k ] ;$$

7. **HIF** ssi il existe deux ordres totaux  $V$  et  $H$  sur  $X$  tels que  $\forall k$ ,

$$V P_k H \subseteq P_k \cup J_k ;$$

8. **HSF** ssi il existe un ordre total  $T$  sur  $X$  tel que  $\forall k$ ,

$$T P_k T \subseteq P_k \cup J_k ;$$

9. **WF** ssi il existe  $n$  ordres totaux  $T_k$  sur  $X$  tel que  $\forall k, \forall x, y \in X$ ,  
–  $T_k P_k T_k \subseteq P_k \cup J_k$

- $xP_ky \Rightarrow \left[ \text{il existe } z \neq y \text{ tel que } xT_kzT_ky \text{ et } z(P_k \cup J_k)z_+ \text{ et } \forall v, w \in X : [vT_kzJ_kz_+T_kw \Rightarrow v(P_k \cup J_k)w] \right];$
- 10. **HWF** ssi il existe un ordre total  $T$  sur  $X$  tel que  $\forall k, \forall x, y \in X,$ 
  - $TP_kT \subseteq P_k \cup J_k$
  - $xP_ky \Rightarrow \left[ \text{il existe } z \neq y \text{ tel que } xTzTy \text{ et } z(P_k \cup J_k)z_+ \text{ et } \forall v, w \in X : [vTzJ_kz_+Tw \Rightarrow v(P_k \cup J_k)w] \right];$
- 11. **EHWF** ssi il existe un ordre total  $T$  sur  $X$  tel que  $\forall k, \forall x, y \in X,$ 
  - $TP_kT \subseteq P_k \cup J_k$
  - $xP_ky \Rightarrow \left[ \text{il existe } z \neq y \text{ tel que } xTzTy \text{ et } \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : \begin{aligned} &- z(P_i \cup J_i)z_+ \\ &- \forall v, w \in X : [vTzJ_iz_+Tw \Rightarrow v(P_i \cup J_i)w] \end{aligned} \right].$

### Démonstration

1. Pour tous les types autres que **EHWF**, la preuve est similaire à la démonstration du lemme. Il faut, pour chaque type de familles, se référer au(x) théorème(s) correspondant à son (ses) extension(s) complète(s) (cf. propositions 15 page 40, 17 page 45, 18 page 46, 20 page 50) et 22 page 54).
2. Type **EHWF**. Dans les grandes lignes :
  - Si l'on dispose d'une famille de type **EHWF**, alors elle est aussi de type **HWF**, donc elle vérifie les conditions matricielles liées à **HWF** (et donc, le début des conditions matricielles liées à **EHWF** ; de plus les structures de la famille admettent des extensions complètes emboîtées, donc les "escaliers" correspondant aux extensions complètes des  $P_k$  seront emboîtés également : c'est ce qui est dit dans la dernière partie de la condition matricielle liée au type **EHWF**).
  - Réciproquement, si une famille  $\mathcal{P}$  vérifie les conditions matricielles liées au type **EHWF**, alors elle vérifie aussi celles liées au type **HWF** : c'est donc une famille homogène de préordres totaux. De plus, la partie des conditions exprimées " $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ " assure qu'on pourra trouver des extensions complètes emboîtées des structures de la famille.

□

La Figure 3.30 reprend les différents types de familles envisagés à la section 3.2, et synthétise les résultats obtenus dans la proposition 37.

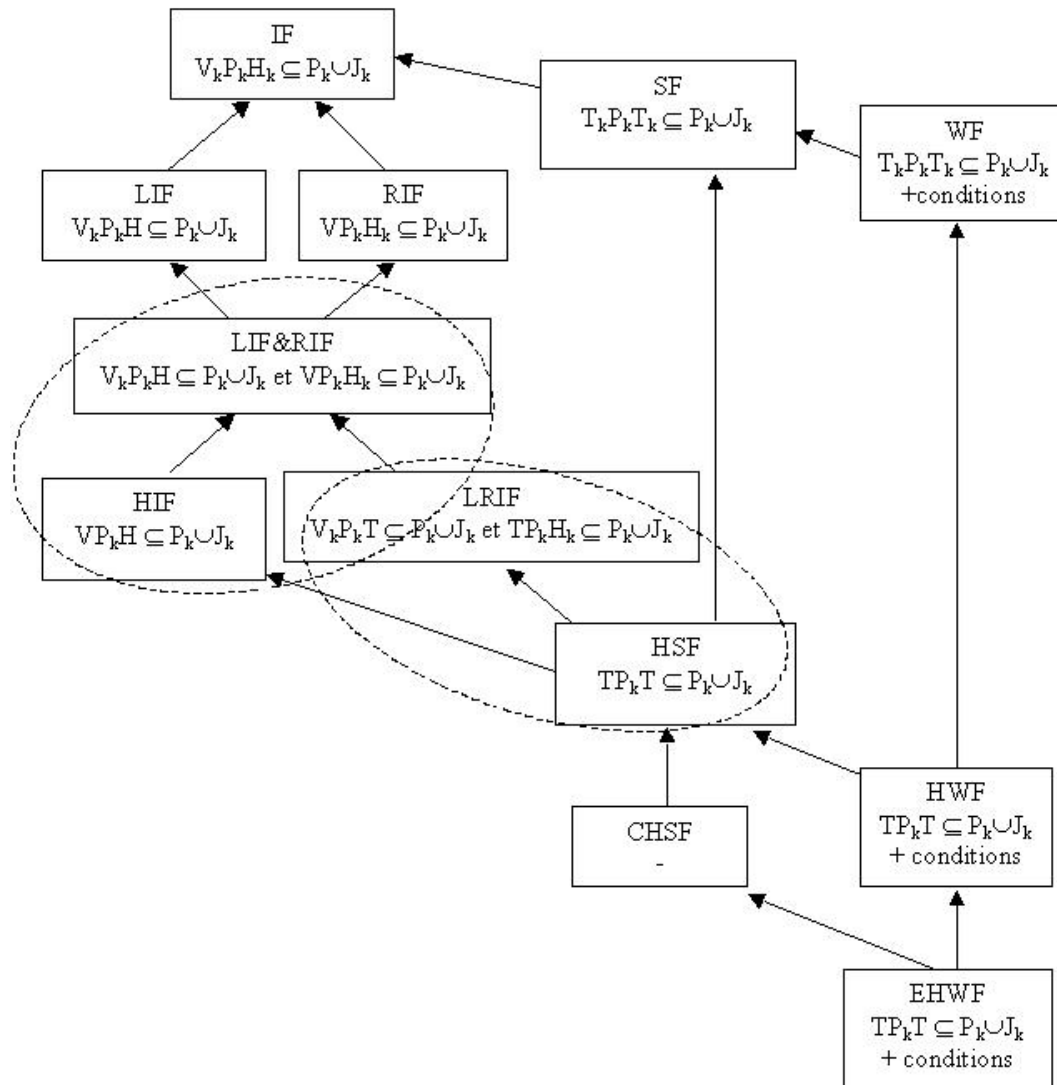


FIG. 3.30 – Les différents types de familles et leur caractérisation “matricielle”.

**Exemples** Reprenons une dernière fois les exemples introduits au point 3.2.6. Nous proposons ici des représentations matricielles de ces familles qui vérifient la proposition 37.

1. Type **IF** (page 80).

Les matrices représentant les trois structures de la famille n'ont aucun lien particulier.

$(P_1, I_1, J_1)$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$a$	•	$P$	$P$	$P$	$P$
$b$		•	$J$	$J$	$J$
$c$		$J$	•	$I$	$J$
$d$		$J$	$I$	•	$J$
$e$		$J$	$J$	$J$	•

$(P_2, I_2, J_2)$	$c$	$a$	$b$	$e$	$d$
$c$	•	$I$	$J$	$P$	$J$
$a$	$I$	•	$I$	$J$	$J$
$e$		$J$	$J$	•	$P$
$b$	$J$	$I$	•	$J$	$J$
$d$	$J$	$J$	$J$		•

$(P_3, I_3, J_3)$	$d$	$b$	$a$	$c$	$e$
$d$	•	$J$	$J$	$J$	$J$
$b$	$J$	•	$I$	$J$	$J$
$c$	$J$	$J$	$I$	•	$J$
$e$	$J$	$J$	$I$	$J$	•
$a$	$J$	$I$	•	$I$	$I$

2. Type **RIF** (page 82).

Pour ce type, on voit apparaître l'ordre  $V$  commun aux lignes.

$(P_1, I_1, J_1)$	$e$	$c$	$b$	$d$	$a$
$e$	•	$J$	$I$	$J$	$J$
$b$	$I$	$I$	•	$P$	$J$
$c$	$J$	•	$I$	$J$	$J$
$d$	$J$	$J$		•	$P$
$a$	$J$	$J$	$J$		•

$(P_2, I_2, J_2)$	$e$	$b$	$c$	$d$	$a$
$e$	•	$P$	$P$	$P$	$P$
$b$		•	$J$	$J$	$J$
$c$		$J$	•	$J$	$P$
$d$		$J$	$J$	•	$J$
$a$		$J$		$J$	•

$(P_3, I_3, J_3)$	$e$	$b$	$a$	$c$	$d$
$e$	•	$J$	$J$	$J$	$J$
$b$	$J$	•	$I$	$J$	$J$
$c$	$J$	$J$	$I$	•	$P$
$d$	$J$	$J$	$I$		•
$a$	$J$	$I$	•	$I$	$I$

3. Type **LIF** (page 82).

Pour les familles de type **LIF**, c'est l'ordre des colonnes  $H$  qui est commun aux structures de la famille.

$(P_1, I_1, J_1)$	$a$	$e$	$d$	$c$	$b$
$a$	•	$J$	$J$	$J$	$J$
$e$	$J$	•	$J$	$J$	$J$
$c$	$J$	$J$	$J$	•	$P$
$d$	$J$	$J$	•	$J$	$I$
$b$	$J$	$J$	$I$		•

$(P_2, I_2, J_2)$	$a$	$e$	$d$	$c$	$b$
$a$	•	$J$	$J$	$J$	$J$
$e$	$J$	•	$J$	$J$	$J$
$d$	$J$	$J$	•	$J$	$P$
$b$	$J$	$J$		$I$	•
$c$	$J$	$J$	$J$	•	$I$

4. Type **LIF&RIF** (page 83).

Dans ce cas, on peut trouver une première représentation matricielle des structures de la famille telle que le  $V$  (ordre des lignes) soit commun aux matrices, et une seconde où le  $H$  (ordre des colonnes) sera commun.

Avec l'ordre  $V$  commun :

$(P_1, I_1, J_1)$	$a$	$c$	$b$	$d$	$e$
$a$	•	$I$	$P$	$J$	$P$
$b$		$J$	•	$P$	$J$
$c$	$I$	•	$J$	$I$	$P$
$d$	$J$	$I$		•	$P$
$e$			$J$		•

$(P_2, I_2, J_2)$	$a$	$e$	$c$	$b$	$d$
$a$	•	$I$	$I$	$I$	$J$
$b$	$I$	$J$	$J$	•	$P$
$c$	$I$	$I$	•	$J$	$J$
$d$	$J$	$I$	$J$		•
$e$	$I$	•	$I$	$J$	$I$

Avec l'ordre  $H$  commun :

$(P_1, I_1, J_1)$	$a$	$c$	$b$	$d$	$e$
$a$	•	$I$	$P$	$J$	$P$
$b$		$J$	•	$P$	$J$
$c$	$I$	•	$J$	$I$	$P$
$d$	$J$	$I$		•	$P$
$e$			$J$		•

$(P_2, I_2, J_2)$	$a$	$c$	$b$	$d$	$e$
$b$	$I$	$J$	•	$P$	$J$
$c$	$I$	•	$J$	$J$	$I$
$e$	$I$	$I$	$J$	$I$	•
$d$	$J$	$J$		•	$I$
$a$	•	$I$	$I$	$J$	$I$

5. Type **LRIF** (page 84).

Les familles de ce type ont les mêmes caractéristiques matricielles que celles de type **LIF&RIF**, mais en plus l'ordre commun aux lignes de la première représentation matricielle est le même que l'ordre commun aux colonnes de la seconde représentation matricielle.

Représentation matricielle avec ordre commun sur les lignes :

$(P_1, I_1, J_1)$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$\bullet$	$P$	$J$	$P$
$b$		$\bullet$	$P$	$J$
$c$	$J$		$\bullet$	$P$
$d$		$J$		$\bullet$

$(P_2, I_2, J_2)$	$a$	$b$	$d$	$c$
$a$	$\bullet$	$I$	$I$	$J$
$b$	$I$	$\bullet$	$J$	$P$
$c$	$J$		$I$	$\bullet$
$d$	$I$	$J$	$\bullet$	$I$

Représentation matricielle avec ordre commun sur les colonnes :

$(P_1, I_1, J_1)$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$\bullet$	$P$	$J$	$P$
$b$		$\bullet$	$P$	$J$
$c$	$J$		$\bullet$	$P$
$d$		$J$		$\bullet$

$(P_2, I_2, J_2)$	$a$	$b$	$c$	$d$
$b$	$I$	$\bullet$	$P$	$J$
$c$	$J$		$\bullet$	$I$
$d$	$I$	$J$	$I$	$\bullet$
$a$	$\bullet$	$I$	$J$	$I$

6. Type **HIF** (page 86).

Cette fois, c'est à la fois l'ordre des lignes et l'ordre des colonnes qui sont communs aux matrices représentant les structures de la famille.

$(P_1, I_1, J_1)$	$d$	$c$	$b$	$a$
$d$	$\bullet$	$J$	$J$	$J$
$b$	$J$	$J$	$\bullet$	$P$
$c$	$J$	$\bullet$	$J$	$I$
$a$	$J$	$I$		$\bullet$

$(P_2, I_2, J_2)$	$d$	$c$	$b$	$a$
$d$	•	$I$	$P$	$J$
$b$		$J$	•	$J$
$c$	$I$	•	$J$	$J$
$a$	$J$	$J$	$J$	•

7. Type **HSF** (page 87).

Enfin, pour ce type, on peut trouver une représentation matricielle où les lignes et les colonnes des matrices représentant les structures de la famille sont rangées selon un même ordre total  $T$ .

$(P_1, I_1, J_1)$	$d$	$c$	$e$	$a$	$b$
$d$	•	$J$	$J$	$I$	$J$
$c$	$J$	•	$J$	$J$	$J$
$e$	$J$	$J$	•	$J$	$P$
$a$	$I$	$J$	$J$	•	$J$
$b$	$J$	$J$		$J$	•

$(P_2, I_2, J_2)$	$d$	$c$	$e$	$a$	$b$
$d$	•	$J$	$J$	$P$	$J$
$c$	$J$	•	$J$	$J$	$J$
$e$	$J$	$J$	•	$J$	$I$
$a$		$J$	$J$	•	$J$
$b$	$J$	$J$	$I$	$J$	•

8. Type **WF** (page 90).

Ici, les lignes et les colonnes de chaque matrice sont ordonnées selon un ordre total propre à chaque structure (comme pour le type **SF**) ; de plus, on peut étendre chaque structure  $(P_k, I_k, J_k)$  en un préordre total  $(P_k^*, I_k^*)$  sorte que “chaque marche de l’escalier des différents  $P_k^*$  s’appuie sur la diagonale”.

$(P_1, I_1, J_1)$	$a$	$c$	$b$	$d$
$a$	•	$P$	$P$	$J$
$c$		•	$J$	$P$
$b$		$J$	•	$I$
$d$	$J$		$I$	•

$(P_2, I_2, J_2)$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$\bullet$	$I$	$J$	$J$
$b$	$I$	$\bullet$	$P$	$J$
$c$	$J$		$\bullet$	$I$
$d$	$J$	$J$	$I$	$\bullet$

9. Type **HWF** (page 90).

Cette structure combine les caractéristiques matricielles des types **HSF** et **WF** : les lignes et les colonnes de toutes les matrices sont ordonnées selon un même ordre total  $T$ , de sorte que chaque bloc de  $P_k$  puisse être “étendu en un escalier dont chaque marche s’appuie sur la diagonale”.

$(P_1, I_1, J_1)$	$e$	$d$	$c$	$b$	$a$
$e$	$\bullet$	$J$	$P$	$P$	$J$
$d$	$J$	$\bullet$	$J$	$J$	$J$
$c$		$J$	$\bullet$	$I$	$P$
$b$		$J$	$I$	$\bullet$	$P$
$a$	$J$	$J$			$\bullet$

$(P_2, I_2, J_2)$	$e$	$d$	$c$	$b$	$a$
$e$	$\bullet$	$J$	$I$	$J$	$J$
$d$	$J$	$\bullet$	$J$	$J$	$J$
$c$	$I$	$J$	$\bullet$	$P$	$J$
$b$	$J$	$J$		$\bullet$	$P$
$a$	$J$	$J$	$J$		$\bullet$

10. Type **EHWF** (page 91).

Cette famille admet une extension complète en une famille de préordres totaux qui sont emboîtés.

$(P_1, I_1, J_1)$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$a$	$\bullet$	$P$	$J$	$J$	$J$	$J$
$b$		$\bullet$	$J$	$P$	$J$	$P$
$c$	$J$	$J$	$\bullet$	$J$	$J$	$J$
$d$	$J$		$J$	$\bullet$	$I$	$P$
$e$	$J$	$J$	$J$	$I$	$\bullet$	$J$
$f$	$J$		$J$		$J$	$\bullet$

$(P_2, I_2, J_2)$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$a$	$\bullet$	$J$	$J$	$J$	$J$	$P$
$b$	$J$	$\bullet$	$I$	$J$	$P$	$J$
$c$	$J$	$I$	$\bullet$	$J$	$J$	$J$
$d$	$J$	$J$	$J$	$\bullet$	$J$	$I$
$e$	$J$		$J$	$J$	$\bullet$	$J$
$f$		$J$	$J$	$I$	$J$	$\bullet$

$(P_3, I_3, J_3)$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$a$	$\bullet$	$J$	$P$	$P$	$J$	$J$
$b$	$J$	$\bullet$	$J$	$J$	$J$	$I$
$c$		$J$	$\bullet$	$I$	$J$	$J$
$d$		$J$	$I$	$\bullet$	$J$	$J$
$e$	$J$	$J$	$J$	$J$	$\bullet$	$J$
$f$	$J$	$I$	$J$	$J$	$J$	$\bullet$

### 3.5.3 Caractérisation des ordres totaux liés aux représentations matricielles

La beauté des résultats en termes matriciels réside dans le fait qu'ils permettent une caractérisation de tous les types de familles envisagés (sauf **CHSF**). Cependant, la proposition 37 reste essentiellement théorique, car elle ne nous apprend pas comment construire les ordres totaux  $V_k, H_k, T_k, \dots$ . Dans ce paragraphe, nous proposons des résultats permettant de caractériser certains de ces ordres totaux (i.e. ceux qui ne sont pas liés aux types **WF**, **HWF** et **EHWF**).

Notation : si  $R$  est une relation binaire, nous noterons  $(R)^{ft}$ , la fermeture transitive de  $R$ .

**Lemme 6** *Si une structure  $(P, I, J)$  est prolongeable en un ordre d'intervalles, alors il existe deux ordres totaux  $V$  et  $H$  tels que  $(PI)^{ft} \subseteq V$ ,  $(IP)^{ft} \subseteq H$ , et  $VPH \subseteq P \cup J$ .*

**Démonstration** Dans [Mon78], on apprend que si  $(P^*, I^*)$  est un ordre d'intervalles, alors il existe deux ordres totaux  $V \supseteq P^*I^*$  et  $H \supseteq I^*P^*$  tels que  $VP^*H \subseteq P^*$ . Si  $(P, I, J)$  est prolongeable en cet ordre d'intervalles  $(P^*, I^*)$ , on a

- $PI \subseteq P^*I^* \subseteq V$
- $IP \subseteq I^*P^* \subseteq H$

– et  $VPH \subseteq VP^*H \subseteq P^* \subseteq P \cup J$ .

De plus, comme  $V$  et  $H$  sont transitives (ordres totaux), on a également  $(PI)^{ft} \subseteq V$  et  $(IP)^{ft} \subseteq H$ .

□

**Proposition 38** *Si  $\mathcal{P}$  est une famille de structures de type (1) **IF**, (2) **SF**, (3) **RIF**, (4) **LIF**, (5) **RIF&LIF**, (6) **LRIF**, (7) **HIF** ou (8) **HSF**, alors il existe des ordres totaux comme dans la proposition 37 tels que*

1. (**IF**)

$$\forall k : (P_k I_k)^{ft} \subseteq V_k \quad \text{et} \quad (I_k P_k)^{ft} \subseteq H_k$$

2. (**SF**)

$$\forall k : (P_k I_k \cup I_k P_k)^{ft} \subseteq T_k$$

3. (**RIF**)

$$\left( \bigcup_{k=1}^n P_k I_k \right)^{ft} \subseteq V \quad \text{et} \quad \forall k : (I_k P_k)^{ft} \subseteq H_k$$

4. (**LIF**)

$$\forall k : (P_k I_k)^{ft} \subseteq V_k \quad \text{et} \quad \left( \bigcup_{k=1}^n I_k P_k \right)^{ft} \subseteq H$$

5. (**LIF&RIF**)

$$\begin{aligned} \left( \bigcup_{k=1}^n P_k I_k \right)^{ft} \subseteq V \quad \text{et} \quad \forall k : (I_k P_k)^{ft} \subseteq H_k \\ \text{et} \\ \forall k : (P_k I_k)^{ft} \subseteq V_k \quad \text{et} \quad \left( \bigcup_{k=1}^n I_k P_k \right)^{ft} \subseteq H \end{aligned}$$

6. (**LRIF**)

$$\begin{aligned} \left( \bigcup_{k=1}^n P_k I_k \right)^{ft} \subseteq T \quad \text{et} \quad \forall k : (I_k P_k)^{ft} \subseteq H_k \\ \text{et} \\ \forall k : (P_k I_k)^{ft} \subseteq V_k \quad \text{et} \quad \left( \bigcup_{k=1}^n I_k P_k \right)^{ft} \subseteq T \end{aligned}$$

7. (**HIF**)

$$\left(\bigcup_{k=1}^n P_k I_k\right)^{ft} \subseteq V \text{ et } \left(\bigcup_{k=1}^n I_k P_k\right)^{ft} \subseteq H$$

8. (**HSF**)

$$\left(\bigcup_{k=1}^n (P_k I_k \cup I_k P_k)\right)^{ft} \subseteq T.$$

**Démonstration** Conséquence du lemme 6.

□

Ces conditions nécessaires réduisent le nombre d'ordres totaux (sur  $X$ ) à considérer si l'on souhaite tester, en utilisant la voie matricielle, le type d'une famille donnée. Cependant, la caractérisation des ordres totaux en question reste incomplète.

**Lemme 7** Soient  $H$  et  $V$ , deux ordres totaux sur  $X$ , soit  $(P, I, J)$  une structure de préférence sur  $X$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes.

1.  $VPH \subseteq P \cup J$
2.  $[bPc \text{ et } aId \Rightarrow bVa \text{ ou } dHc]$  et  $[PI \subseteq V \text{ et } IP \subseteq H]$
3.  $[bPc \text{ et } aId \Rightarrow (bVa \text{ et } b \neq a) \text{ ou } (dHc \text{ et } d \neq c)]$  et  $[P \subseteq V \text{ et } P \subseteq H]$ .

**Démonstration**

- (1)  $\Rightarrow$  (2). Si  $bPc$ ,  $aId$ ,  $aVb$  et  $cHd$ , on a alors  $aVbPcHd$  et  $aId$ , ce qui contredit  $VPH \subseteq P \cup J$ . De plus, si  $PI \not\subseteq V$ , alors  $\exists a, b, c \in X$  tels que  $aPb$ ,  $bIc$  et  $a(\neg V)c$ . Comme  $V$  est un ordre total, on a  $cVa$ , et donc aussi  $cVaPbHb$ , ce qui implique par hypothèse que  $c(P \cup J)b$  : ceci impossible puisque  $cIb$  ( $I$  symétrique). La preuve que  $IP \subseteq H$  est similaire.
- (2)  $\Rightarrow$  (3). Puisque  $I$  est réflexive, il est évident que  $P \subseteq V$  et  $P \subseteq H$ . En outre, soient  $a, b, c, d \in X$ . Supposons que  $bPc$  et  $aId$ .
  - Si  $b = a$  et  $d = c$ , alors on a  $aPd$  et  $aId$ , ce qui est impossible. Par conséquent, si  $bPc$  et  $aId$ , soit  $b \neq a$ , soit  $d \neq c$ .
  - Supposons que  $b = a$  et  $d \neq c$ . Puisque  $IP \subseteq H$ , on a  $dIaPc \Rightarrow dHc$ .
  - Supposons que  $d = c$  et  $b \neq a$ . Puisque  $PI \subseteq V$ , on a  $bPcIa \Rightarrow bVa$ .

- (3)  $\Rightarrow$  (1). Soit  $aVbPcHd$ . Si  $(a, d) \notin P \cup J$ , alors on est dans l'un des deux cas suivants.
- Soit  $dPa$ . Alors, par (3), on a  $dVa$ ; puisque  $aVb$ , on a aussi  $dVb$ . Par hypothèse,  $[bPc$  et  $dId]$  implique  $[bVd$  et  $b \neq d]$  ou  $[dHc$  et  $d \neq c]$ , ce qui est impossible car on a  $dVb$  (vu ci-dessus) et  $cHd$  par hypothèse.
  - Soit  $aId$  (et  $dIa$ ), ce qui contredit immédiatement (3).
- Par conséquent,  $(a, d) \in P \cup J$ .

□

La proposition précédente caractérise les paires  $(V, H)$  associées à une structure prolongeable en un ordre d'intervalles. Elle permet de trouver non pas une paire de relations, mais bien TOUTES les paires qui permettent d'ordonner la matrice “en escalier incomplet”. C'est donc non seulement une méthode pour construire une paire  $(V, H)$  qui convient (quand on sait que la structure est prolongeable en un ordre d'intervalle), mais aussi une manière de **tester** si une structure donnée est bien prolongeable en un ordre d'intervalle : il suffit de trouver une paire  $(V, H)$  qui satisfait aux conditions du lemme 7.

On imagine aisément que ce résultat peut se prolonger aux familles de structures de préférence étudiées dans ce chapitre. Prenons tout de même la peine d'énoncer ces extensions dans la proposition suivante.

**Proposition 39**  $\mathcal{P}$  est une structure de type (1) **IF**, (2) **SF**, (3) **RIF**, (4) **LIF**, (5) **RIF&LIF**, (6) **LRIF**, (7) **HIF** ou (8) **HSF**, si et seulement si

1. **IF** ssi il existe  $2n$  ordres totaux  $V_1, V_2, \dots, V_n, H_1, H_2, \dots, H_n$  sur  $X$  tels que  $\forall k$ ,
 
$$[bP_kc \text{ et } aI_kd \Rightarrow bV_ka \text{ ou } dH_kc] \text{ et } [P_kI_k \subseteq V_k \text{ et } I_kP_k \subseteq H_k];$$
2. **SF** ssi il existe  $n$  ordres totaux  $T_1, T_2, \dots, T_n$  sur  $X$  tels que  $\forall k$ ,
 
$$[bP_kc \text{ et } aI_kd \Rightarrow bT_ka \text{ ou } dT_kc] \text{ et } [P_kI_k \subseteq T_k \text{ et } I_kP_k \subseteq T_k];$$
3. **RIF** ssi il existe  $(n+1)$  ordres totaux  $V, H_1, H_2, \dots, H_n$  sur  $X$  tels que  $\forall k$ ,
 
$$[bP_kc \text{ et } aI_kd \Rightarrow bVa \text{ ou } dH_kc] \text{ et } [P_kI_k \subseteq V \text{ et } I_kP_k \subseteq H_k];$$
4. **LIF** ssi il existe  $(n+1)$  ordres totaux  $V_1, V_2, \dots, V_n, H$  sur  $X$  tels que  $\forall k$ ,
 
$$[bP_kc \text{ et } aI_kd \Rightarrow bV_ka \text{ ou } dHc] \text{ et } [P_kI_k \subseteq V_k \text{ et } I_kP_k \subseteq H];$$
5. **LIF&RIF** ssi il existe  $(n+1)$  ordres totaux  $V, H_1, H_2, \dots, H_n$  sur  $X$  tels que  $\forall k$ ,

- $[bP_k c \text{ et } aI_k d \Rightarrow bV a \text{ ou } dH_k c]$  et  $[P_k I_k \subseteq V \text{ et } I_k P_k \subseteq H_k]$   
 et il existe  $(n + 1)$  ordres totaux  $V_1, V_2, \dots, V_n, H$  sur  $X$  tels que  $\forall k$ ,  
 $[bP_k c \text{ et } aI_k d \Rightarrow bV_k a \text{ ou } dH_k c]$  et  $[P_k I_k \subseteq V_k \text{ et } I_k P_k \subseteq H]$  ;
6. **LRIF** ssi il existe un ordre total  $T$  tel que  
 $\left[ \begin{array}{l} \text{il existe } n \text{ ordres totaux } H_1, H_2, \dots, H_n \text{ sur } X \text{ tels que } \forall k, \\ [bP_k c \text{ et } aI_k d \Rightarrow bT a \text{ ou } dH_k c] \text{ et } [P_k I_k \subseteq T \text{ et } I_k P_k \subseteq H_k] \\ \text{et il existe } n \text{ ordres totaux } V_1, V_2, \dots, V_n \text{ sur } X \text{ tels que } \forall k, \\ [bP_k c \text{ et } aI_k d \Rightarrow bV_k a \text{ ou } dT c] \text{ et } [P_k I_k \subseteq V_k \text{ et } I_k P_k \subseteq T] \end{array} \right]$  ;
7. **HIF** ssi il existe deux ordres totaux  $V$  et  $H$  sur  $X$  tels que  $\forall k$  ,  
 $[bP_k c \text{ et } aI_k d \Rightarrow bV a \text{ ou } dH_k c]$  et  $[P_k I_k \subseteq V \text{ et } I_k P_k \subseteq H]$  ;
8. **HSF** ssi il existe un ordre total  $T$  sur  $X$  tel que  $\forall k$ ,  
 $[bP_k c \text{ et } aI_k d \Rightarrow bT a \text{ ou } dT c]$  et  $[P_k I_k \subseteq T \text{ et } I_k P_k \subseteq T]$ .

□

Comme on a pu le voir dans le lemme 7, les ordres totaux présents dans cette proposition sont exactement ceux qui vérifient la proposition 37 : les voici donc caractérisés.

### 3.6 Familles de type mixte

Dans [Doi88], on trouve un théorème de représentation précurseur à ceux présentés dans ce chapitre. Pour rattacher les travaux de Doignon à notre vocabulaire, on peut dire que [Doi88] étudie des familles de structures de type mixte, plus précisément dont une partie est de type **CHSF** et une autre de type **RIF** (le tout étant homogène). Sa démonstration utilise notamment des résultats de théorie des graphes, et une autre version du théorème de l'alternative. Le résultat obtenu s'exprime en terme de "nombres de relations  $P_i$  et  $I_i$ " dans certains cycles particuliers.

On peut s'amuser à combiner les théorèmes de représentation du chapitre 3 à des familles de structures homogènes de différents types. Par exemple,

**Proposition 40** Soit  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2), \dots, (P_n, I_n, J_n)]$  une famille de structures de préférence sur  $X$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes.

1. Il existe une fonction  $f$  à valeurs réelles sur  $X$  et  $n$  fonctions  $\sigma : f(X) \rightarrow \mathbb{R}$  et il existe une constante  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ), telles que  $\forall x, y \in X$  :
  - $(x, y) \in P_k \Rightarrow f(x) > f(y) + \sigma_k(f(y))$
  - $(x, y) \in I_k \Rightarrow [f(x) \leq f(y) + \sigma_k(f(y)) \text{ et } f(y) \leq f(x) + \sigma_k(f(x))]$
  - $\forall i, j \in \{m+1, m+2, \dots, n\} : f(x) + \sigma_i(f(x)) \leq f(y) + \sigma_i(f(y))$   
 $\Leftrightarrow f(x) + \sigma_j(f(x)) \leq f(y) + \sigma_j(f(y)).$
2. Il existe des ordres totaux  $V$  et  $H, H_1, H_2, \dots, H_m$  sur  $X$  tels que
  - $\forall k \in \{1, 2, \dots, m\} : VP_k H_k \subseteq P_k \cup J_k$
  - $\forall k \in \{m+1, m+2, \dots, n\} : VP_k H \subseteq P_k \cup J_k.$

La multitude d'autres résultats qu'on peut créer en combinant ce qui a été vu précédemment est laissée au bon plaisir du lecteur.

Notons qu'être une famille de type mixte est loin d'être un cas rare. En particulier, toute structure d'une famille de l'un des types étudiés dans ce chapitre est au minimum un ordre d'intervalle, donc admet une représentation à gauche et à droite. De même, chacune des structures d'une famille de type **HSF** est un semi-ordre, et par conséquent admet une représentation à seuils constants. Terminons donc en faisant remarquer que le type global d'une famille n'est jamais meilleur (i.e. plus bas dans la Figure 3.5) que le type de ses sous-familles.

# Chapitre 4

## Familles de structures de préférence emboîtées

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions un cas très particulier des familles de structures de préférence non complètes. Chronologiquement, c'est le premier que nous ayons traité, car c'est celui qui découle le plus directement du domaine pratique, et en particulier du mode de questionnement MACBETH (voir Chapitre 1).

Supposons que l'on dispose d'une structure relationnelle de préférence  $(P, I, J)$  sur  $X$  reflétant les préférences d'un décideur à propos des éléments de  $X$ . Supposons qu'ensuite, on demande au décideur de préciser, pour chaque couple  $(x, y) \in P$ , un degré de différence d'attractivité entre  $x$  et  $y$  parmi  $n$  degrés ordonnés proposés : cette opération induit une partition de  $P$  en  $n$  classes ordonnées que nous noterons  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

Si,  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , on pose

- $P_k = C_k \cup C_{k+1} \cup \dots \cup C_n$
- $I_k = I \cup C_1 \cup C_1^- \cup \dots \cup C_{k-1} \cup C_{k-1}^-$
- $J_k = J$

alors  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2), \dots, (P_n, I_n, J_n)]$  est une famille de structures de préférence ayant la particularité d'être emboîtées :  $P_n \subseteq P_{n-1} \subseteq \dots \subseteq P_1$  et  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n$ . De plus, la relation d'incomparabilité est la même pour toutes les structures de la famille :  $\forall k, J_k = J$ . Pour distinguer ce cas de la situation générale étudiée au chapitre 3, nous parlerons plutôt de la *famille (non complète) de classes*  $\mathcal{C} = [C_0, C_1, C_2, \dots, C_n, J]$ , où l'on a posé  $C_0 = I$ , pour uniformiser

les notations. Il va de soi que les deux écritures  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{P}$  définissent de manière univoque la même structure.

Le mode de questionnement MACBETH “de base”, présenté au chapitre 1, entre exactement dans ce cadre (pour rappel, MACBETH signifie “Measuring Attractiveness by a Categorical-Based Evaluation TecHnique” !).

Le logiciel M-MACBETH exploite cette information dans le cas où elle est de type **CHSF** (voir à ce sujet [De 02]). En cas d’inconsistance avec ce type, le décideur est amené à revoir ses jugements. Dans le cas où le décideur se refuse à fournir une information aussi riche, il est intéressant de pouvoir “mesurer” la qualité de l’information donnée, de pouvoir la situer, en d’autres termes d’en connaître le type. C’est dans cette optique que nous nous étions proposée d’étudier différentes représentations numériques possibles de ces familles de structures emboîtées. Nous présentons ici les résultats qui diffèrent du cas général quelconque déjà exposé dans les paragraphes précédents.

Notons que le papier [Vin00] peut être vu comme un précurseur de ces résultats pour le cas particulier des structures de préférence  $\{P, Q, I, J\}^1$ , et seulement pour certains des types étudiés.

## 4.2 Que deviennent les résultats du chapitre 3 ?

### 4.2.1 Les types de familles

Nous envisageons les mêmes types de familles que ceux présentés au chapitre 3, et repris dans la Fig. 3.5; nous ajoutons toutefois un **M-** devant le nom du type afin d’insister sur le fait que l’on travaille avec des familles de structures très particulières, comme celles issues du mode de questionnement MACBETH.

Dans le cas de familles  $\mathcal{C}$  de type **M-**, les définitions en terme de représentation numérique peuvent s’écrire différemment, en partant des classes  $C_i$ . Prenons par exemple le type **M-RIF**. On a :

**Proposition 41**  $\mathcal{C} = [C_0, C_1, C_2, \dots, C_n, J]$  est une famille de type **M-RIF** si et seulement si il existe une fonction  $f$  à valeurs réelles sur  $X$ , et il existe  $n$  fonctions  $\sigma_k : f(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) telles que  $\forall x, y \in X$  :

- $(x, y) \in C_0 \Rightarrow [f(x) \leq f(y) + \sigma_1(f(y)) \text{ et } f(y) \leq f(x) + \sigma_1(f(x))]$
- $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\} : (x, y) \in C_k \Rightarrow f(y) + \sigma_k(f(y)) < f(x) \leq f(y) + \sigma_{k+1}(f(y))$

---

<sup>1</sup>correspondant à une famille de deux structures emboîtées  $[(P \cup Q, I, J), (P, Q \cup Q^- \cup I, J)]$

$$- (x, y) \in C_n \Rightarrow f(y) + \sigma_n(f(y)) < f(x).$$

□

Cette formulation reflète bien le fait que, si  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , être dans la classe  $C_k$ , c'est être dans  $P_k$  et dans  $I_{k+1}$ .

### 4.2.2 Conditions sémantico-numériques

La réécriture de la définition des types de familles mène à une réécriture des conditions sémantico-numériques, qui permet d'éviter les redondances liées à l'emboîtement des relations. Par exemple, pour **M-IF**, cela donne :

$\exists f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall k, \forall x, y, z \in X$  :

$$(x, y) \in C_k \text{ et } (y, z) \in \bigcup_{0 \leq j < k} C_j^- \left( \text{c'est-à-dire } (x, z) \in C_k \cdot \bigcup_{0 \leq j < k} C_j^- \right) \\ \Rightarrow f_k(x) > f_k(z)$$

ou, de manière équivalente,

$\exists g_1, g_2, \dots, g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall k, \forall x, y, z \in X$  :

$$(z, x) \in \bigcup_{0 \leq j < k} C_j^- \text{ et } (x, y) \in C_k \Rightarrow g_k(z) > g_k(y).$$

Notons que si nous voulions transcrire exactement les conditions sémantico-numériques de la section 3.3, nous écririons  $(y, z) \in \bigcup_{0 \leq j < k} C_j \cup C_j^-$  (dans la première des deux formulations ci-dessus). Cette forme est correcte mais redondante : en effet,  $C_0^- = C_0$  ; d'autre part, si  $(y, z) \in C_j$  ( $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ ), les conditions sémantico-numériques comme présentées ci-dessus donneront de toute façon

- $f(x) > f(y)$  (puisque  $x C_k y C_0 y$ )
- $f(y) > f(z)$  (puisque  $y C_j z C_0 z$ )
- et par conséquent  $f(x) - f(z) > 0$ , c'est-à-dire  $f(x) > f(z)$ .

La même remarque s'applique évidemment à la seconde formulation des conditions sémantico-numériques ci-dessus.

### 4.2.3 Conditions relationnelles

Pour les types **M-RIF**, **M-LIF**, **M-LIF&RIF** et **M-LRIF**, la proposition 33 pourra s'exprimer plutôt en terme d'acyclicité des relations  $\bigcup_{\substack{j,k \in \{0,1,\dots,n\} \\ j < k}} C_k C_j^-$

et  $\bigcup_{\substack{j,k \in \{0,1,\dots,n\} \\ j < k}} C_j^- C_k$ .

Par exemple :  $\mathcal{C}$  est de type **M-LRIF** ssi la relation  $\bigcup_{\substack{j,k \in \{0,1,\dots,n\} \\ j < k}} C_k C_j^- \cup \bigcup_{\substack{j,k \in \{0,1,\dots,n\} \\ j < k}} C_j^- C_k$  est acyclique.

Si on veut éviter toute redondance pour le type **M-CHSF**, on parlera de famille de couples de  $\bigcup_{k=0}^n C_k \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} C_i^-$  qui ne peut pas être à la fois partitionnable en circuits et partitionnable en paires déséquilibrées, où  $\{(x, y), (z, w)\}$  est une paire déséquilibrée ssi  $\exists k \in \{1, 2, \dots, n\}$  tel que  $(x, y) \in C_k$  et  $(z, w) \in \bigcup_{i=0}^{k-1} C_i^-$ .

Pour les types **M-IF**, **M-SF** et **M-WF**, on peut bien sûr remplacer  $P_k$  par  $\bigcup_{i=k}^n C_j$  et  $I_k$  par  $\bigcup_{i=0}^{k-1} C_i \cup \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j^-$ . Cependant, cette réécriture n'apporte rien, ne permet pas de supprimer de redondance.

### 4.2.4 Conditions matricielles

Jusqu'ici, les changements liés au fait que l'on envisage des familles de relations emboîtées (et avec relation d'incomparabilité commune aux structures de la famille) sont simplement des réécritures des résultats précédents qui sont plus adaptées aux notations spécifiques de ce cas particulier. Dans cette section, ce ne sera plus tout à fait le cas.

Le problème est le suivant : se peut-il qu'une famille de structures de préférence non complètes emboîtées, disons de type **M-RIF** pour fixer les idées, n'admette aucune extension complète **où les nouvelles structures sont aussi emboîtées** ? Si cela est possible, le résultat concernant les conditions matricielles doit s'énoncer comme suit :

“ $\mathcal{C}$  est de type **M-RIF** ssi il existe  $n + 1$  ordres totaux  $V, H_1, H_2, \dots, H_n$  sur  $X$  tels que

- $\forall k : VP_k H_k \subseteq P_k \cup J$ ,
- **et**  $\forall i \in \{2, 3, \dots, n\} : VP_i H_i \subseteq VP_{i-1} H_{i-1}$ .”

De cette manière, on est certain que les extensions complètes des  $P_i$  seront emboîtées également.

Pour les familles de types **M-HIF**, **M-HSF** et **M-HWF**, la proposition 37 (caractérisation “matricielle”) s’applique telle quelle. Dans ces trois cas, on est sauvé par le fait que les ordres totaux  $V$  et  $H$  ou encore  $T$  sont communs à toutes les représentations matricielles. En effet, prenons par exemple le type **M-HIF** : dans ce cas, en posant  $P_k^* = VP_k H \forall k$  et  $C_0^* = X^2 \setminus (P_1^* \cup (P_1^*)^-)$ , on est certain que l’extension complète  $\mathcal{P}^*$  ainsi construite est encore de type **M-HIF**.

Le résultat suivant permet une généralisation sans heurt de la proposition 37 aux familles de structures emboîtées de types **M-LIF**, **M-RIF**, **M-LIF&RIF**, **M-LRIF**.

**Lemme 8** *Soit  $\mathcal{C} = [C_0, C_1, \dots, C_n]$  une famille de classes (donnant naissance à une famille de structures de préférence  $[(P_1, I_1, J), (P_2, I_2, J), \dots, (P_n, I_n, J)]$ ). Si il existe  $n + 1$  ordres totaux  $V, H_1, H_2, \dots, H_n$  sur  $X$  tels que  $\forall k : VP_k H_k \subseteq P_k \cup J$ , alors il existe  $n$  ordres totaux  $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \dots, \tilde{H}_n$  sur  $X$  tels que*

- $\forall k : VP_k \tilde{H}_k \subseteq P_k \cup J$ ,
- **et**  $\forall i \in \{2, 3, \dots, n\} : VP_i \tilde{H}_i \subseteq VP_{i-1} \tilde{H}_{i-1}$ .

**Démonstration** Supposons que  $\exists k \in \{2, 3, \dots, n\} : VP_k H_k \subseteq P_k \cup J$  et  $VP_k H_k \not\subseteq VP_{k-1} H_{k-1}$ .

Supposons que les éléments de  $X$  aient été renumérotés de 1 à  $m = |X|$ , de sorte que  $x_i V x_j \Leftrightarrow i < j$ . Créons un nouvel ordre total  $\tilde{H}_k$  comme suit :

- en dernier dans  $\tilde{H}_k$ , viennent les éléments de  $A_{m-1} = \{t|x_{m-1} P_k t\}$  (peu importe dans quel ordre)<sup>2</sup>,
- juste avant, viennent les éléments de  $A_{m-2} = \{t|x_{m-2} P_k t\} \setminus A_{m-1}$  (peu importe dans quel ordre),
- etc...
- juste avant, viennent les éléments de  $A_1 = \{t|x_1 P_k t\} \setminus (A_2 \cup \dots \cup A_{m-1})$  (peu importe dans quel ordre),
- en premier dans  $\tilde{H}_k$ , viennent les élément de  $X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{m-1})$ .

<sup>2</sup>L’hypothèse  $VP_k H_k \in P_k \cup J$  implique que  $A_m = \{t|x_m P_k t\} = \emptyset$ ; sinon,  $\exists t : tV x_m P_k t H_k t$ , ce qui implique  $t(P_k \cup J)t$ .

Nous voudrions prouver que  $VP_k\widetilde{H}_k \subseteq P_k \cup J$ . Soient  $a, b, c, d \in X$  tels que  $aVbP_k c\widetilde{H}_k d$ . Par définition de  $\widetilde{H}_k$ , puisque  $bP_k c$  et  $c\widetilde{H}_k d$ , il existe  $e \in X$  tel que  $bVe$  et  $eP_k d$ . Par conséquent, on a  $aVeP_k d\widetilde{H}_k d$ , ce qui implique par hypothèse  $a(P_k \cup J)d$ .

Il nous reste à montrer que  $VP_k\widetilde{H}_k \subseteq VP_{k-1}H_{k-1}$ . Considérons un couple  $(a, b)$  de  $X^2$  tel que  $(a, b) \in VP_k\widetilde{H}_k$  mais  $(a, b) \notin VP_{k-1}H_{k-1}$  (par conséquent,  $(a, b) \in J$ ). Si l'on essaie de visualiser les deux matrices des classes  $(UC_i, V, \widetilde{H}_k)$  et  $(UC_i, V, H_{k-1})$ , la seule différence entre elles est l'ordre de leurs colonnes. Donc, dans la colonne de  $b$ , en-dessous de la case  $[a, b]$ , il n'y a pas de  $P_k$ ; en d'autres termes, il n'existe pas de  $z$  tel que  $xVz$  et  $zP_k y$ . Or, puisque  $(a, b) \in VP_k\widetilde{H}_k$ , il existe  $c, d \in X$ , tels que  $aVc$ ,  $cP_k d$  et  $d\widetilde{H}_k b$ . Par définition de  $\widetilde{H}_k$ , puisque  $cP_k d$  et  $d\widetilde{H}_k b$ , il existe  $e \in X$  tel que  $cVe$  et  $eP_k b$ , en contradiction avec ce qui a été annoncé plus haut.

□

Grâce au lemme 8 (et à son équivalent pour le type **M-LIF**), la proposition 37 s'applique immédiatement sur les familles de structures de préférence non complètes emboîtées de types **M-LIF**, **M-RIF**, **M-LIF&RIF** et **M-LRIF** : l'extension complète d'une telle famille de structures emboîtées est bien une famille de structures emboîtées.

Restent les types **M-IF**, **M-SF** et **M-WF**. Nous pensons qu'il en sera de même avec ces types (nous ne parvenons d'ailleurs pas à construire de contre-exemple qui montrerait le contraire), mais à ce jour nous n'avons pas la démonstration rigoureuse qui viendrait appuyer cette affirmation : le problème reste donc ouvert.

## 4.3 Remarques en vrac

### 4.3.1 Pourquoi M-, et pas E ?

Au chapitre 3, nous avons clairement déclaré que le **E** de **EHWF** était mis pour "structures emboîtées". Alors, pourquoi avoir choisi d'ajouter un **M-** dans les notations, alors qu'on disposait déjà de notre **E** ?

Dans les quelques pages qui précèdent, nous avons insisté lourdement sur le fait que le cas envisagé ici est très particulier. Le **E** comme introduit dans le chapitre 3 est, selon nous, le plus général et le plus propre : il signifie que la famille en question admet une extension complète où les structures seront emboîtées, mais n'impose ni que  $\forall k, J_k = J$ , ni même que  $P_n \subseteq P_{n-1} \subseteq \dots \subseteq P_1$

et  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n$ . **M-** est donc un cas particulier du **E**, qui lui-même est un cas particulier pour chacun des types envisagés au chapitre 3.

Nous n'avons pas, à ce jour, caractérisé les “**E**-types”. Voilà encore un problème ouvert...

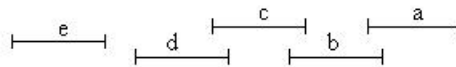
### 4.3.2 “Structures emboîtées” n’implique pas “famille homogène”

Soit  $X = \{a, b, c, d, e\}$ . Voici la matrice des classes d’une famille  $\mathcal{C} = [C_0, C_1, C_2, J]$  (sur  $X$ ), famille complète de type **M-SF** qui n’est pas homogène.

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$a$	•	1	1	2	1
$b$		•	0	2	2
$c$		0	•	1	1
$d$				•	0
$e$				0	•

En voici une représentation par des intervalles (voir Fig. 4.1).

Une représentation de  $P_1 (= C_1 \cup C_2)$  :



Une représentation de  $P_2 (= C_2)$  :

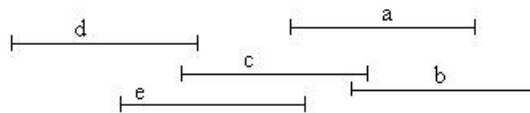


FIG. 4.1 – Famille non homogène de relations emboîtées, de type **M-SF**.

Cette famille n’est pas homogène car :

- d’une part,  $(a, c) \in C_1$  et  $(b, c) \in C_0 \Rightarrow f_1(a) > f_1(b)$  ;
- d’autre part,  $(a, e) \in C_1$  et  $(b, e) \in C_2 \Rightarrow f_2(a) < f_2(b)$ .

Remarquons qu’il existe un ordre total  $T_2$  tel que  $T_2 P_2 T_2 \subseteq P_2$  :

	$b$	$a$	$c$	$e$	$d$
$b$	•		0	2	2
$a$	1	•	1	1	2
$c$	0		•	1	1
$e$				•	0
$d$				0	•

Nous venons de voir que, dans le cas complet, le fait d'être une famille de semi-ordres emboîtés n'implique pas le fait d'être une famille homogène de semi-ordres. Par conséquent, ceci est encore vrai dans le cas non complet, pour les familles de type **M-IF** et **M-SF**.

### 4.3.3 Toute famille de préordres totaux emboîtés est homogène

En effet, dans le cas complet, la définition d'une famille de type **M-WF** peut se réécrire :  $\forall x, y \in X, \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$  :

$$(x, y) \in C_i \Leftrightarrow \begin{cases} \forall j \in \{1, 2, \dots, i\} : f_j(x) > f_j(y) \\ \forall j \in \{k+1, k+2, \dots, n\} : f_j(x) = f_j(y) \end{cases} .$$

Par conséquent, la condition de cohérence *Coh3+* est vérifiée.

Notons que nous n'avons pas encore pu généraliser ce résultat dans le cas non complet ; cependant, nous n'avons pas non plus pu y trouver de contre-exemple.

## 4.4 Un mode de questionnement très général

### 4.4.1 Introduction

Considérons le mode de questionnement suivant, qui généralise celui présenté au chapitre 1.

Soit une paire d'alternatives  $\{x, y\} \in X$  : comment qualifieriez-vous la différence d'attractivité que vous ressentez entre  $x$  et  $y$  ?

Réponses acceptées :

- *négligeable* (catégorie sémantique 0)
- *très faible, en faveur de ...* (soit  $x$ , soit  $y$ ) (catégorie sémantique 1)
- *faible, en faveur de ...* (soit  $x$ , soit  $y$ ) (catégorie sémantique 2)
- *modérée, en faveur de ...* (soit  $x$ , soit  $y$ ) (catégorie sémantique 3)
- *forte, en faveur de ...* (soit  $x$ , soit  $y$ ) (catégorie sémantique 4)

- *très forte, en faveur de ...* (soit  $x$ , soit  $y$ ) (catégorie sémantique 5)
- *extrême, en faveur de ...* (soit  $x$ , soit  $y$ ) (catégorie sémantique 6)
- *entre ... et ...* (plusieurs de ces 7 catégories sémantiques consécutives), *en faveur de ...* (soit  $x$ , soit  $y$ )
- *je ne sais pas*

Ce mode de questionnement, appliqué à toutes les paires d’alternatives  $\{x, y\} \in X$ , donne naissance à une famille de relations  $C_{i,j}$  (où  $i \leq j, i, j \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ ) et  $J$ , notée  $(C_{i,j}; J)$ , et construite comme suit :

- $x C_{0,0} y$  et  $y C_{0,0} x$  si la différence d’attractivité entre  $x$  et  $y$  est ressentie comme négligeable
- $x C_{1,1} y$  si la différence d’attractivité entre  $x$  et  $y$  est ressentie comme très faible en faveur de  $x$
- ...
- $x C_{6,6} y$  si la différence d’attractivité entre  $x$  et  $y$  est ressentie comme extrême en faveur de  $x$
- $x C_{i,j} y$  (où  $i < j, i, j \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ ) si la différence d’attractivité entre  $x$  et  $y$  est ressentie comme située entre la catégorie sémantique  $i$  et la catégorie sémantique  $j$ , en faveur de  $x$
- $x J y$  et  $y J x$  si la réponse est “je ne sais pas”.

Par construction, les relations  $J$  et  $C_{i,j}$  ( $i \leq j, i, j \in \{0, 1, \dots, 6\}$ ) sont disjointes deux à deux, et leur réunion est une relation complète.

Dans la lignée du travail effectué précédemment dans ce chapitre, il est intéressant de connaître les théorèmes de représentation d’un tel type d’information. Observons que, d’un point de vue mathématique, le problème que nous allons traiter ici est une extension du problème initialement étudié dans ce chapitre ; ce dernier correspond, par rapport au nouveau problème, au cas particulier où,  $\forall i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  et  $i < j : C_{i,j} = \emptyset$ . Sur le plan pratique, notons aussi que le logiciel M-MACBETH (voir [BVD03]) traite ce genre de données (mis à part le fait qu’avec M-MACBETH, l’utilisateur ne peut pas hésiter entre une préférence négligeable - appelée indifférence - et d’autres catégories sémantiques).

#### 4.4.2 Théorèmes de représentation

En gardant en tête l’origine sémantique des relations de la famille, il paraît raisonnable de traiter chaque couple  $(x, y)$  par rapport aux classes sémantiques extrêmes auxquelles il pourrait appartenir. C’est ainsi que nous introduisons la définition suivante.

**Définition 20** Une famille  $(C_{i,j}; J)$  (issu du questionnement présenté ci-dessus) est de type **IF+** ssi il existe  $n$  fonctions  $f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $n$  fonctions  $\sigma_k : f_k(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) telles que  $\forall k, \forall x, y \in X$  :

- $(x, y) \in \bigcup_{i=k}^n \bigcup_{j=i}^n C_{i,j} \Rightarrow f_k(x) > f_k(y) + \sigma_k(f_k(y))$
- $(x, y) \in \bigcup_{i=0}^k \bigcup_{j=0}^{k-1} (C_{i,j} \cup C_{i,j}^-) \Rightarrow f_k(x) \leq f_k(y) + \sigma_k(f_k(y))$  et  $f_k(y) \leq f_k(x) + \sigma_k(f_k(x))$ .

De nouvelles notations vont nous permettre de faire immédiatement le lien avec les résultats obtenus précédemment. Posons

- $C_{k,\bullet} = \bigcup_{i=k}^n C_{k,i} \equiv$  tous les couples  $(x, y)$  tels que la différence d'attractivité ressentie en faveur de  $x$  par rapport à  $y$  pourrait être celle correspondant à la catégorie sémantique  $k$ , mais pas une catégorie sémantique inférieure ;
- $C_{\bullet,k} = \bigcup_{j=0}^k C_{j,k} \equiv$  tous les couples  $(x, y)$  tels que la différence d'attractivité ressentie en faveur de  $x$  par rapport à  $y$  pourrait être celle correspondant à la catégorie sémantique  $k$ , mais pas une catégorie sémantique supérieure ;
- $\dot{P}_k = \bigcup_{i=k}^n C_{i,\bullet} \equiv$  tous les couples  $(x, y)$  tels que la différence d'attractivité ressentie en faveur de  $x$  par rapport à  $y$  est **au moins** celle correspondant à la catégorie sémantique  $k$  ;
- $\dot{I}_k = \bigcup_{i=0}^{k-1} (C_{\bullet,i} \cup C_{\bullet,i}^-) \equiv$  tous les couples  $(x, y)$  tels que la différence d'attractivité ressentie en faveur de  $x$  par rapport à  $y$  est **au plus** celle correspondant à la catégorie sémantique  $k - 1$ , et les contraires de ces couples.

Grâce à ces notations, la définition précédente devient :

**Définition 21** Une famille  $(C_{i,j}; J)$  est de type **IF+** ssi il existe  $n$  fonctions  $f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $n$  fonctions  $\sigma_k : f_k(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) telles que  $\forall k, \forall x, y \in X$  :

- $(x, y) \in \dot{P}_k \Rightarrow f_k(x) > f_k(y) + \sigma_k(f_k(y))$
- $(x, y) \in \dot{I}_k \Rightarrow f_k(x) \leq f_k(y) + \sigma_k(f_k(y))$  et  $f_k(y) \leq f_k(x) + \sigma_k(f_k(x))$ .

Ainsi, toutes les définitions et les théorèmes de représentation des familles de structures de préférence non complètes (définitions 18, 19, et propositions 31, 33, 34, 37, 38 et 39) se transposent aisément au cas des familles  $(C_{i,j}; J)$ , en ajoutant un  $+$  après le nom du type de famille, et un  $\bullet$  au-dessus des  $P_k$  et  $I_k$ .

### 4.4.3 Intérêt pratique

Cette nouvelle série de résultats ouvre de belles portes sur le plan pratique. En effet, la souplesse du mode de questionnement présenté en début de ce paragraphe pourrait s'avérer utile lors de processus difficiles au cours desquels il faut tenir compte de l'avis de plusieurs personnes comme par exemple la "decision conferencing". Lorsqu'un groupe de personnes doit prendre une décision, il est évident que leurs opinions peuvent diverger, et que des conflits peuvent en naître. Le type de réponses acceptées permet d'éviter les frustrations en prenant en compte plusieurs avis différents. Partant de cette information (qui peut être relativement pauvre), les théorèmes de représentation présentés plus haut nous donnent les moyens de trouver une représentation numérique qui a du sens (compte tenu de l'info dont on dispose), ou de détecter les éventuelles incohérences dans les jugements du(des) décideur(s).



# Chapitre 5

## Conclusion

L'étude ici menée a étendu les connaissances théoriques dans le domaine de la modélisation des préférences. Nous nous sommes intéressée aux familles de structures de préférence non complètes (pour l'explication du terme, voir section 2.2.8 et définition 5), nous en avons proposé différentes représentations numériques (voir section 3.2) et nous les avons caractérisés selon différentes voies (sections 3.3, 3.4 et 3.5). Ce faisant, nous avons notamment étendu les résultats de [DMRV86], qui ne traitaient que le cas des familles de structures complètes (voir section 2.5).

Sur le plan pratique, un intérêt de cette recherche se situe dans le fait que, pour des outils comme MACBETH, les résultats obtenus offrent la possibilité de tester des consistances moins fortes que celle imposée dans la méthode de base (voir chapitre 1). Ainsi, la voie est ouverte pour qui souhaiterait innover dans ce domaine... En particulier, le mode de questionnement très général présenté au chapitre 4 et la caractérisation des familles de relations qu'il induit ne manqueront pas d'intéresser les adeptes des procédures souples et les habitués de la gestion de décision avec de multiples décideurs. Tous ces résultats pourraient donner naissance à diverses applications informatiques.

Au terme de cette thèse, plusieurs problèmes restent ouverts.

- Est-il possible de trouver une caractérisation relationnelle des familles de type **HIF**, **HSF**, **HWF** et **EHWF**, types dont les définitions contiennent une condition de cohérence ?
- Est-il possible de trouver une caractérisation matricielle des familles de type **CHSF** ?
- Existe-t-il toujours une extension complète d'une famille de type **M-IF**, **M-SF** ou **M-WF** qui soit toujours du même type (i.e. famille d'ordres

d’intervalles, de semi-ordres ou de préordres totaux emboîtés) ?

- Une famille non complète de type **M-WF** est-elle toujours homogène ?
- L’étude des “**E**-types” mène-t-elle à des résultats intéressants, différents du cas général ?

Répondre à ces questions permettrait d’offrir un panorama complet des familles de structures de préférence sur un ensemble fini, et de leur caractérisation. Nous ne manquerons donc pas de tenter notre chance dans un futur proche.

Pour les personnes intéressées, les idées pour mener d’autres recherches sur des sujets proches de ce qui a été développé ici ne manquent pas. On pourrait, par exemple,

- définir une notion d’extension complète “minimale” ou “maximale” d’une famille de structures, pour que cette extension conserve le type de la structure de départ ;
- dans la lignée des travaux de Trotter, Doignon, ... (voir notamment [Tro92] et [DM00]), étudier l’aspect “dimension” des familles de structures (ce travail s’avère difficile !);
- envisager des méthodes d’agrégation des familles de type **M-...** introduites au chapitre 4 ; programmer un logiciel qui applique ces méthodes ;
- travailler sur la représentation minimale des familles de structures complètes ;
- tenter d’étendre les notions qui ont été développées dans cette thèse aux familles de structures de préférence sur des ensembles de cardinal dénombrable ou non dénombrable.

Nous espérons que ce travail pourra servir de base à d’autres chercheurs passionnés de mathématiques ou de modélisation des préférences...

# Annexe A

## Représentation numérique avec un seuil constant d'une famille homogène de semi-ordres

### A.1 Présentation du problème

Soit  $X$  un ensemble fini, soit  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$  une famille de structures de préférence complètes sur  $X$ . On sait que  $\mathcal{P}$  est une famille homogène de semi-ordres si et seulement si il existe une fonction  $f$  à valeurs réelles sur  $X$  et  $n$  fonctions  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  à valeurs réelles sur  $f(X)$  telles que  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall x, y \in X$  :

1.  $xP_k y \Leftrightarrow f(x) > f(y) + \sigma_k(f(y))$
2.  $xI_k y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y) + \sigma_k(f(y))$  et  $f(y) \leq f(x) + \sigma_k(f(x))$
3.  $f(x) < f(y) \Rightarrow f(x) + \sigma(f(x)) \leq f(y) + \sigma(f(y))$ .

Notons que nous avons remplacé la condition de cohérence *Coh1-2* de la définition 10 par la condition 2.1 (page 29) (nous avons montré que ces deux conditions étaient équivalentes).

Dans [DMRV86] (p.454), on peut lire qu'il est possible, pour chaque indice  $k^*$  choisi dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ , de trouver une représentation numérique de la famille  $\mathcal{P}$  où le seuil  $\sigma_{k^*}$  est constant. Dans la lignée des travaux de [Vin80], nous montrons ici ce fait par un algorithme.

## A.2 Préliminaires

Si  $\mathcal{P}$  est une famille homogène de semi-ordres, on peut construire un ordre total  $T$  tel que  $TP_kT \subseteq P_k \forall k$  (pour l'explication de la construction de  $T$  à l'aide des "traces", voir la section 2.5.1). Posons  $\#X = m$ . Numérotions les éléments de  $X$  de telle sorte que  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} : [x_iTx_j \Leftrightarrow i \leq j]$ .

Nous supposons que les éléments suivants sont connus avant l'application de l'algorithme :

- l'ensemble  $X$ , fini, de cardinal  $m$ ,
- la famille  $\mathcal{P}$  de  $n$  structures de préférence complètes,
- l'ordre total  $T$  comme ci-dessus,
- les types des différentes variables qui apparaissent dans l'algorithme.

## A.3 Algorithme

Procédure *un\_seuil\_constant*.

```

 $k^* \leftarrow$  valeur donnée par l'utilisateur
 $s_{k^*} \leftarrow$  valeur donnée par l'utilisateur
 $f(x_m) \leftarrow 0, i \leftarrow 1$ 
Tant que  $i \leq m - 1$  faire
  - si  $x_{m-i}P_{k^*}x_{m-i+1}$  alors
    -  $f(x_{m-i}) \leftarrow f(x_{m-i+1}) + s_{k^*} + 1$ 
    -  $i \leftarrow i + 1$ 
  - sinon
    -  $M \leftarrow \{j \in \{1, 2, \dots, m - i\} : x_jI_{k^*}x_{m-i+1}\}$ 
    -  $card \leftarrow \#M, j \leftarrow 0$ 
    - tant que  $j \leq (card - 1)$  faire
      -  $f(x_{m-i-j}) = f(x_{m-i+1}) + \frac{j+1}{card} \cdot s_{k^*}$ 
      -  $j \leftarrow j + 1$ 
    fin faire
    -  $i \leftarrow i + card$ 
  - fin si
fin faire.
 $k \leftarrow 1$ 
Tant que  $k \leq n$  faire
  -  $i \leftarrow 1$ 

```

- si  $k = k^*$  alors tant que  $i \leq m$  faire
  - $\sigma_k(x_i) = s_{k^*}$
  - $i \leftarrow i + 1$
  - fin faire
- sinon
  - tant que  $i \leq m$  faire
    - $M \leftarrow \{j \in \{1, 2, \dots, i\} : x_j I_k x_i\}$
    - $min \leftarrow \min M$
    - $\sigma_k(x_i) = f(x_{min}) - f(x_i)$
    - $i \leftarrow i + 1$
    - fin faire
  - fin si
  - $k \leftarrow k + 1$

fin faire.

Fin *un\_seuil\_constant*.

## A.4 Démonstration

Montrons que les fonctions  $f$  et  $\sigma_k$  ainsi définies (où  $\sigma_{k^*}$  est une fonction constante) satisfont bien aux trois conditions de la définition reprise dans la section A.1. Remarquons que puisque les structures de la famille sont complètes, démontrer les implications de gauche à droite dans les conditions (1) et (2) est suffisant pour impliquer (1) et (2).

Soient  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$  avec  $i \leq j$ , soient  $x_i, x_j \in X$  : on a donc  $x_i T x_j$ . Soit  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Supposons que  $k = k^*$ .

1. Si  $x_i P_k x_j$ , alors, soit  $min = \min\{l \in \{1, 2, \dots, j\} : x_l I_k x_j\}$  : on a  $f(x_j) + s_{k^*} = f(x_{min}) < f(x_i)$  (car  $min > j$ ). La condition (1) est donc vérifiée.
2. Si  $x_i I_k x_j$ , alors  $i \in M = \{l \in \{1, 2, \dots, j\} : x_l I_k x_j\}$ , et par définition  $f(x_i) = f(x_j) + \epsilon \cdot s_{k^*}$  (où  $0 < \epsilon \leq 1$ ), donc  $f(x_i) \leq f(x_j) + s_{k^*}$  ; d'autre part,  $f(x_j) \leq f(x_i) < f(x_i) + \sigma(f_{k^*}(x_i))$ . La condition (2) est vérifiée.
3. Puisque  $\sigma_{k^*}(x) = s_{k^*}^* \forall x \in X$ , la condition (3) est vérifiée.

Envisageons à présent le cas où  $k \neq k^*$ .

1. Supposons que  $x_i P_k x_j$ .

Soit  $l^* = \min \{l \in \{1, 2, \dots, j\} : x_l I_k x_j\}$ ; on sait que  $f(x_j) + \sigma_k(f(x_j)) = f(x_{l^*})$ . Si  $f(x_i) \leq (x_j) + \sigma_k(f(x_j))$ , alors  $f(x_i) \leq f(x_{l^*})$  et  $i \geq l^*$  (par construction de  $f$ ), donc  $x_{l^*} T x_i$ ; puisque  $x_i P_k x_j$ ,  $x_j T x_j$ , et  $TP_k T \subseteq P_k$ , cela implique que  $x_{l^*} P_k x_j$ , en contradiction avec la définition de  $l^*$ . Par conséquent,  $x_i P_k x_j$  implique  $f(x_i) > (x_j) + \sigma_k(f(x_j))$ .

2. Supposons que  $x_i I_k x_j$ . Si  $i = j$ , la condition (2) est vérifiée. Sinon,
  - d’une part, par construction de  $f$ ,  $i < j$  implique  $f(x_i) > f(x_j)$ , donc aussi  $f(x_j) \leq f(x_i) + \sigma_k(f(x_i))$ ;
  - d’autre part,  $i \in M = \{l \in \{1, 2, \dots, j\} : x_l I_k x_j\}$  donc  $i \geq l^* = \max M$ , par conséquent  $f(x_i) \leq f(x_{l^*}) = f(x_j) + \sigma_k(f(x_j))$ .
 Donc,  $x_i I_k x_j$  implique  $f(x_i) \leq (x_j) + \sigma_k(f(x_j))$  et  $f(x_j) \leq f(x_i) + \sigma_k(f(x_i))$ .
3. Supposons que  $f(x_i) > f(x_j)$  et  $f(x_i) + \sigma_k(f(x_i)) < f(x_j) + \sigma_k(f(x_j))$ . Par construction,  $\exists r \in \{1, 2, \dots, i\}$  tel que  $f(x_r) = f(x_i) + \sigma_k(f(x_i))$  et  $\exists t \in \{1, 2, \dots, j\}$  tel que  $f(x_t) = f(x_j) + \sigma_k(f(x_j))$ .
  - Puisque  $f(x_t) > f(x_i) + \sigma_k(f(x_i))$ , on a  $x_t P_k x_i$ ;
  - puisque  $i < j$ , on a aussi  $x_i T x_j$ ;
  - puisque  $TP_k T \subseteq P_k$  (et  $x_t T x_t$ ), on a finalement  $x_t P_k x_j$ , en contradiction avec la définition de  $t$ .
 Par conséquent,  $f(x_j) < f(x_i) \Rightarrow f(x_j) + \sigma(f(x_j)) \leq f(x_i) + \sigma(f(x_i))$ .

□

## A.5 Exemple

Reprenons l’exemple 7 proposée au chapitre 2.

Soit  $X = \{a, b, c, d\}$ , et soit la famille  $[(P_1, I_1), (P_2, I_2)]$  définie par les matrices suivantes.

$(P_1, I_1)$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$\bullet$	$I$	$P$	$P$
$b$	$I$	$\bullet$	$I$	$I$
$c$		$I$	$\bullet$	$I$
$d$		$I$	$I$	$\bullet$

$(P_2, I_2)$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	•	$I$	$I$	$P$
$b$	$I$	•	$I$	$P$
$c$	$I$	$I$	•	$I$
$d$			$I$	•

L'ordre total  $aTbTcTd$  est tel que  $TP_kT \subseteq P_k$ . Numérotions les éléments de  $X$  en respectant cet ordre  $T$  : posons  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$ ,  $x_3 = c$  et  $x_4 = d$ .

Fixons (pour l'exemple)  $k^* = 1$  et  $s_{k^*} = 3$ . La première partie de l'algorithme détermine les valeurs prises par  $f$ .

–  $f(x_4) = 0$

– Etape suivante :  $i = 1$ , et  $x_3I_1x_4$ .

On pose  $M = \{j \in \{1, 2, 3\} : x_jI_1x_4\} = \{2, 3\}$ . Donc,  $card = \#M = 2$ .

– Pour  $j = 0$  :  $f(x_3) = f(x_4) + \frac{1}{card} \cdot s_1 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$ .

– Pour  $j = 1$  :  $f(x_2) = f(x_4) + \frac{2}{card} \cdot s_1 = 3$ .

– Pour  $j = 2$  : stop.

– Etape suivante :  $i = 1 + card = 3$ , et  $x_1I_1x_2$ .

On a  $M = \{j \in \{1\} : x_jI_1x_2\} = \{1\}$ ,  $card = 1$ , et  $f(x_1) = f(x_2) + s_1 = 3 + 3 = 6$ .

La seconde partie de l'algorithme fixe les valeurs des seuils.

– Pour  $k = 1 = k^*$  :  $\sigma_1(x_1) = \sigma_1(x_2) = \sigma_1(x_3) = \sigma_1(x_4) = 3$ .

– Pour  $k = 2$  :

–  $i=1$

–  $M = \{j \in \{1\} : x_jI_2x_1\} = \{1\}$

–  $min = 1$

–  $\sigma_2(x_1) = f(x_1) - f(x_1) = 0$

–  $i=2$

–  $M = \{j \in \{1, 2\} : x_jI_2x_2\} = \{1, 2\}$

–  $min = 1$

–  $\sigma_2(x_2) = f(x_1) - f(x_2) = 3$

–  $i=3$

–  $M = \{j \in \{1, 2, 3\} : x_jI_2x_1\} = \{1, 2, 3\}$

–  $min = 1$

–  $\sigma_2(x_3) = f(x_1) - f(x_3) = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

–  $i=4$

–  $M = \{j \in \{1, 2, 3, 4\} : x_jI_2x_4\} = \{3, 4\}$

–  $min = 3$

$$- \sigma_2(x_1) = f(x_3) - f(x_4) = \frac{3}{2}$$

Le tableau suivant reprend toutes les valeurs trouvées. Celles-ci satisfont bien aux conditions (1), (2) et (3).

$x$	$a$	$b$	$c$	$d$
$f(x)$	6	3	$3/2$	0
$\sigma_1(f(x))$	3	3	3	3
$\sigma_2(f(x))$	0	3	$9/2$	$3/2$

## Annexe B

# Reformulation des résultats liés aux familles homogènes de préordres totaux emboîtés

### B.1 Reformulation de la déf. 14 (p. 57)

Soit  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$ , une famille de structures de préférence complètes sur  $X$ .  $\mathcal{P}$  est une famille homogène de préordres totaux emboîtés ssi il existe  $n$  fonctions  $f_1, f_2, \dots, f_n$  à valeurs réelles sur  $X$ , et s'il existe une permutation  $\pi$  sur  $\{1, 2, \dots, n\}$ , telles que  $\forall k, \forall x, y \in X$  :

$$- xP_ky \Leftrightarrow f_k(x) > f_k(y)$$

$$- xI_ky \Leftrightarrow f_k(x) = f_k(y)$$

et

$$- f_k(x) < f_k(y) \Rightarrow \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, \dots, \pi(k)\} : f_{\pi^{-1}(i)}(x) < f_{\pi^{-1}(i)}(y) \\ \forall i \in \{\pi(k) + 1, \dots, n\} : f_{\pi^{-1}(i)}(x) \leq f_{\pi^{-1}(i)}(y) \end{cases}$$

(cohérence de type 3+, notée *Coh3+*).

### B.2 Reformulation de la prop. 25 (p. 58)

Soit  $\mathcal{P} = [(P_1, I_1), (P_2, I_2), \dots, (P_n, I_n)]$ , une famille de structures de préférence complètes sur  $X$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes.

1.  $\mathcal{P}$  est une famille homogène de préordres totaux emboîtés.
2. Il existe une permutation  $\pi$  sur  $\{1, 2, \dots, n\}$  telle que  $\forall k$ , il n'existe pas de

circuit de  $\bigcup_{i=1}^k I_{\pi^{-1}(i)} \cup \bigcup_{i=1}^n P_{\pi^{-1}(i)}$  qui contienne un élément de  $\bigcup_{i=k}^n P_{\pi^{-1}(i)}$ .

3. Il existe un ordre total  $T$  sur  $X$  et il existe une permutation  $\pi$  sur  $\{1, 2, \dots, n\}$  tels que  $\forall k, \forall x, y \in X$ ,
- $TP_kT \subseteq P_k$
  - $xP_ky \Rightarrow$  [il existe  $z \neq y$  tel que  $xTzTy$  et tel que  $\forall i \in \{1, 2, \dots, \pi(k)\} : zP_{\pi^{-1}(i)}z_+$ ].

# Bibliographie

- [Ada65] E.W. Adams. Elements of a theory of inexact measurement. *Philosophy of Science*, 32 :205–228, 1965.
- [BVD03] C. Bana e Costa, J.C. Vansnick, and J.M. De Corte. Macbeth. Working paper series, The London School of Economics and Political Science, 2003.
- [DDF84] J.P. Doignon, A. Ducamp, and J.C. Falmagne. On realizable biorders and the biorder dimension of a relation. *Journal of Mathematical Psychology*, 28 :73–109, 1984.
- [DDF87] J.P. Doignon, A. Ducamp, and J.C. Falmagne. On the separation of two relations by a biorder or a semiorder. *Mathematical Social Sciences*, 13 :1–18, 1987.
- [De 02] J.-M. De Corte. *Un logiciel d'exploitation d'informations préférentielles pour l'aide à la décision. Bases mathématiques et algorithmiques*. thèse de doctorat, Université de Mons-Hainaut, Belgique, 2002.
- [DM00] J.P. Doignon and J. Mitas. Dimension of valued relations. *European Journal of Operational Research*, 125 :571–587, 2000.
- [DMRV86] J.P. Doignon, B. Monjardet, M. Roubens, and Ph. Vincke. Biorder families, valued relations and preference modelling. *Journal of Mathematical Psychology*, 30 :435–480, 1986.
- [Doi87] J.P. Doignon. Thresholds representation of multiple semiorders. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 8 :77–84, 1987.
- [Doi88] J.P. Doignon. Partial structures of preference. In M. Roubens J. Kacprzyk, editor, *Non conventional Preferences Relations in Decision Making*, pages 22–35. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [Luc56] R.D. Luce. Semi-orders and a theory of utility discrimination. *Econometrica*, 24 :178–191, 1956.

- [Man69] O.L. Mangasarian. *Nonlinear Programming*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.
- [Mon78] B. Monjardet. Axiomatiques et propriétés des quasi ordres. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 63 :51–82, 1978.
- [Mou02] C. Mousset. Représentation numérique à seuils de familles de relations. Master’s thesis, Université de Mons-Hainaut, 2002.
- [PV97] M. Pirlot and Ph. Vincke. *Semiororders*. Kluwer Academic, Dordrecht, 1997.
- [RB93] B. Roy and D. Bouyssou. *Aide multicritère à la décision : méthodes et cas*. Economica, 1993.
- [Rob79] F.S. Roberts. *Measurement theory, with applications to Decision Making, Utility and the Social Sciences*. Addison-Wesley, Boston, 1979.
- [Roy69] B. Roy. *Algèbre moderne et théorie des graphes orientées vers les sciences économiques et sociales. Tome 1 : Notions et résultats fondamentaux*. Dunod, Paris, 1969.
- [RV85] M. Roubens and Ph. Vincke. *Preference Modelling*, volume 250 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [Tro92] W. T. Trotter. *Combinatorics and Partially Ordered Sets : Dimension Theory*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1992.
- [Vin80] P. Vincke. Vrai, quasi, pseudo et précritères dans un ensemble fini, propriétés et algorithmes. Technical report, Cahiers du LAMSADE, N° 27, Université Paris Dauphine, Paris, 1980.
- [Vin00] P. Vincke.  $\{P,Q,I,J\}$ -preference structures. In J.Fodor, B.De Baets, and P.Perny, editors, *Preferences and Decisions under incomplete knowledge*, volume 51, pages 1–10. Springer Verlag, Physica-Verlag, 2000.
- [Vin01] P. Vincke. Preferences and numbers. In A. Colorni, M. Paruccini, and B. Roy, editors, *A-MCD-A - Aide Multi Critère à la Décision - Multiple Criteria Decision Aiding*, Joint Research Center, pages 343–354. The European Commission, 2001.

# Table des figures

2.1	Représentation graphique de $R$ (exemple 1).	20
2.2	Configuration interdite pour la transitivité.	21
2.3	Configuration interdite pour la transitivité négative.	21
2.4	Configuration interdite pour la semi-transitivité.	21
2.5	Configuration interdite pour la propriété de Ferrers.	21
2.6	Représentation du semi-ordre $(P, I)$ de l'exemple 2.	29
2.7	Autre représentation du semi-ordre $(P, I)$ de l'exemple 2.	29
2.8	$aTbPcTd$ implique $aPd$ .	30
2.9	Représentation de l'ordre d'intervalle $(P, I)$ de l'exemple 3.	34
2.10	Un préordre total.	37
2.11	Représentation des ordres d'intervalles $(P_1, I_1)$ , $(P_2, I_2)$ et $(P_3, I_3)$ de l'ex. 5 : ils constituent une famille homogène à droite d'ordres d'intervalles.	41
2.12	Représentations graphiques liées à la famille homogène à droite d'ordres d'intervalles (exemple 5).	42
2.13	Représentation de la famille homogène d'ordres d'intervalles de l'exemple 6.	47
2.14	Condition de cohérence $Coh2$ .	47
2.15	Représentations graphiques liées à l'exemple 6 (famille homogène d'ordres d'intervalles).	48
2.16	Une représentation "à gauche" de la famille homogène d'ordres d'intervalles de l'exemple 6.	49
2.17	Une représentation de la famille homogène de semi-ordres de l'exemple 7.	51
2.18	Représentation graphique des relations de la famille de préordres totaux de l'exemple 9.	57
2.19	Famille homogène de préordres emboîtés (exemple 10).	62
2.20	Familles de relations complètes.	64
3.1	Deux représentations compatibles avec la structure $(P, I, J)$ de l'ex. 12.	71

3.2	Une représentation “à gauche” compatible avec la structure $(P, I, J)$ de l'exemple 12. . . . .	73
3.3	Une représentation compatible avec l'exemple 13 et qui est un semi-ordre. . .	74
3.4	Deux préordres totaux qui prolongent $(P, I, J)$ (exemple 14) . . . . .	75
3.5	Les différents types de familles étudiés. . . . .	79
3.6	Une représentation compatible avec la structure $[(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2), (P_3, I_3, J_3)]$ de l'exemple 15. . . . .	81
3.7	Une représentation <b>RIF</b> -compatible avec l'exemple 17. . . . .	82
3.8	Une représentation <b>LIF</b> -compatible avec l'exemple 18. . . . .	83
3.9	Une représentation <b>LIF&amp;RIF</b> -compatible avec la structure $[(P_1, I_1, J_1), (P_2, I_2, J_2)]$ de l'exemple 19. . . . .	84
3.10	Représentation <b>LRIF</b> -compatible avec l'exemple 20. . . . .	85
3.11	Une représentation <b>HIF</b> -compatible avec l'exemple 21. . . . .	86
3.12	Une représentation “à gauche” <b>HIF</b> -compatible avec l'exemple 21. . . . .	87
3.13	Deux représentations (droite et gauche) <b>HSF</b> -compatibles avec l'exemple 22. . . . .	88
3.14	Deux représentations <b>CHSF</b> -compatibles avec l'exemple 23. . . . .	89
3.15	Représentation <b>WF</b> -compatible avec l'exemple 24. . . . .	90
3.16	Représentation <b>HWF</b> -compatible avec l'exemple 25. . . . .	91
3.17	Représentation <b>EHWF</b> -compatible avec l'exemple 26. . . . .	92
3.18	Structure prolongeable en un ordre d'intervalles. . . . .	100
3.19	Les différents types de familles et leur caractérisation relationnelle. . . . .	107
3.20	Famille de type <b>IF</b> . . . . .	108
3.21	Famille de type <b>RIF</b> . . . . .	109
3.22	Famille de type <b>LIF</b> . . . . .	110
3.23	Famille de type <b>LIF&amp;RIF</b> . . . . .	111
3.24	Famille de type <b>LRIF</b> . . . . .	112
3.25	Famille de type <b>CHSF</b> . . . . .	113
3.26	Famille de type <b>WF</b> . . . . .	113
3.27	La matrice <b>A</b> . . . . .	118
3.28	La matrice <b>C</b> . . . . .	119
3.29	Graphes liés à l'exemple 27. . . . .	121
3.30	Les différents types de familles et leur caractérisation “matricielle”. . . . .	126
4.1	Famille non homogène de relations emboîtées, de type <b>M-SF</b> . . . . .	145