

## Introduction

Il est courant, dans une étude d'aide à la décision, de devoir tenir compte de plusieurs points de vue pour comparer l'attractivité relative des différentes actions susceptibles de résoudre le problème de décision considéré. Ainsi par exemple, suite à un appel d'offres, il convient de comparer les réponses obtenues ( qui constituent dans ce cas les « actions » ) en tenant compte de tous les points de vue ( critères ) spécifiés dans l'appel d'offres.

Une telle comparaison n'est pas facile pour le(s) décideur(s) car, comme l'ont montré les travaux de Miller (voir Miller, 1956), il est difficile pour l'esprit humain de traiter simultanément plus de sept informations. Or, la comparaison de deux actions selon quatre points de vue fait déjà intervenir huit informations.

C'est la raison pour laquelle des procédures systématiques de comparaison des actions ont été imaginées. Bien que ces procédures puissent prendre des formes diverses, elles comprennent toutes :

une phase d'acquisition, auprès du (des) décideur(s), d'information préférentielle

une phase d'exploitation de cette information préférentielle ( phase d'agrégation ).

L'objet de cette thèse est l'étude de problèmes mathématiques apparaissant au cours de ces deux phases ainsi que la présentation d'un logiciel mettant en pratique les solutions que nous y avons apportés dans le cadre d'une méthodologie particulière d'aide à la décision : l'approche MACBETH ( **M**asuring **A**ttractiveness by a **C**ategorical **B**ased **E**valuation **T**ec**H**nique ).

Elle comporte deux grands chapitres correspondant aux deux grandes phases évoquées ci-dessus.

Le premier chapitre consiste en l'étude, pour chaque mode de questionnement introduit dans l'approche MACBETH, des structures mathématiques permettant de représenter numériquement, sur base de règles de mesurage, l'information préférentielle obtenue. Cette étude nous a conduit à concevoir

- d'une part, des algorithmes de détection des « inconsistances » pouvant apparaître dans les réponses du (des) décideur(s)
- d'autre part, des algorithmes de recherche de suggestions de modification des jugements initiaux à soumettre au(x) décideur(s).

Nous présentons également dans ce chapitre quelques outils graphiques que nous avons mis au point en vue de faciliter la discussion avec le(s) décideur(s) concernant une représentation numérique particulière ( échelle MACBETH ) de l'information préférentielle disponible.

Le deuxième chapitre concerne ce qu'on appelle, dans le domaine de la décision, la phase d'agrégation de l'information préférentielle. C'est dans cette phase que sont spécifiées les règles selon lesquelles la comparaison globale ( c'est-à-dire en tenant compte de tous les points de vue ) des actions est effectuée.

Il s'agit là d'une phase délicate car des problèmes de signifiante mathématique ( des résultats des comparaisons globales ) peuvent apparaître si la non-unicité des représentations numériques de l'information préférentielle n'est pas correctement prise en charge.

Après avoir explicité les grandes phases de la méthodologie MACBETH, nous présentons, dans ce deuxième chapitre, le cadre mathématique dans lequel nous nous sommes placés pour garantir la correction des résultats des comparaisons globales des actions.

Les divers algorithmes que nous avons mis au point sont expliqués et nous décrivons aussi la manière dont nous avons intégré ces idées nouvelles dans le logiciel que nous avons réalisé en vue de pouvoir appliquer, en pratique, l'approche MACBETH.

Notre travail se termine par une brève conclusion dans laquelle nous citons notamment quelques applications réelles d'aide à la décision qui ont déjà pu être réalisées grâce à ce logiciel.

## Notations

Nous noterons

- $\mathbf{A}$  l'ensemble des actions potentielles ;
- $\mathbf{J}$  la personne (qu'on appellera souvent « décideur ») qui souhaite les comparer ;
- $\mathbf{Z}$  l'ensemble des nombres entiers ;
- $\mathbf{IN}$  l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls ;
- $\mathbf{IN}^* = \mathbf{IN} \setminus \{ 0 \}$
- $\mathbf{IN}_{s,t} = \{ s, s+1, \dots, t \} = \{ x \in \mathbf{IN} \mid s \leq x \leq t \}$  où  $s, t \in \mathbf{IN}$ , avec  $s < t$
- $\mathbf{IR}$  l'ensemble des nombres réels ;
- $\mathbf{IR}_+ = \{ x \in \mathbf{IR} \mid x \geq 0 \}$  ;
- $\mathbf{IR}^* = \mathbf{IR} \setminus \{ 0 \}$
- $\mathbf{IR}_+^* = \mathbf{IR}_+ \setminus \{ 0 \}$
- $\mathbf{IR}_+^2 = \mathbf{IR}_+ \times \mathbf{IR}_+$
- $\mathbf{IR}^{m \times n}$  l'ensemble des matrices réelles à  $m$  lignes et  $n$  colonnes.
  
- Soient  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  et  $\mathbf{R}_3$  trois relations sur un ensemble  $\mathbf{X}$ .

On notera  $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \subset \mathbf{R}_3$  lorsque

$$\forall x, y, z \in \mathbf{X} : \quad [ x \mathbf{R}_1 y \text{ et } y \mathbf{R}_2 z \Rightarrow x \mathbf{R}_3 z ]$$

( [  $\mathbf{R}$  est transitive ] peut donc s'écrire [  $\mathbf{R} \mathbf{R} \subset \mathbf{R}$  ], voire même [  $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}$  ] ).

### Convention

- On dira qu'une matrice  $\mathbf{A} \in \mathbf{IR}^{m \times n}$  est « non nulle » lorsqu'au moins un de ses éléments est non nul. Dans ce cas, on notera  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ .
- On dira qu'une matrice  $\mathbf{A} \in \mathbf{IR}^{m \times n}$  est « positive ou nulle » lorsque tous ses éléments sont positifs ou nuls. Dans ce cas, on notera  $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ .

## Chapitre 1 : acquisition d'une information préférentielle

Soit  $X$  un ensemble fini dont une personne (ou un groupe de personnes)  $J$  souhaite comparer les éléments quant à leur attractivité.

Nous noterons  $n = \#X$  et supposons que  $n \geq 2$ .

Lors de comparaisons par paires d'éléments de  $X$ , un décideur n'éprouve généralement pas beaucoup de difficultés pour formuler des affirmations telles que : « je préfère  $x$  à  $y$  » ou «  $x$  est plus attractif que  $y$  ». Par contre, lorsqu'il est invité à enrichir ce type d'information, il est plus malaisé pour lui de répondre à des questions du type : la différence d'attractivité entre  $x$  et  $y$  est-elle plus grande que la différence d'attractivité entre  $w$  et  $z$  ? Il semble cependant que la difficulté de cette question provienne bien plus de la présence de 4 éléments dans sa formulation que du fait qu'elle porte sur la notion de différence d'attractivité ( que l'on cerne aussi parfois en parlant d'intensité de la préférence). D'éminents chercheurs tels que le professeur de psychologie W. Edwards (Directeur de l'Institut de Recherche en Science Sociale à l'Université de Californie du Sud et pionnier de l'aide à la décision aux Etats-Unis) défendent l'idée que la différence d'attractivité est une notion introspective qui fait sens pour beaucoup de personnes et sur laquelle les gens peuvent facilement s'exprimer (voir D. Von Winterfeldt and W. Edwards, 1986).

Dans l'approche MACBETH, trois modes de questionnement de plus en plus précis (dont deux font intervenir la notion de différence d'attractivité) sont introduits pour acquérir de l'information préférentielle auprès de  $J$ . Le paragraphe 1.1 de ce chapitre est consacré à la présentation de ces modes de questionnement et des types d'information que l'on peut en déduire.

Le paragraphe 1.2 traite du problème de la représentation numérique de ces différents types d'information.

Ces représentations numériques n'existent que si les réponses de  $J$  satisfont certaines conditions de rationalité. Le paragraphe 1.3 traite de la « consistance / inconsistance » de l'information préférentielle recueillie auprès de  $J$ .

Dans le paragraphe 1.4, nous abordons le problème pratique du test de la consistance de l'information préférentielle.

Que faire en cas d'inconsistance ? La réponse à cette question est l'objet des paragraphes 1.5 et 1.6.

Quant aux paragraphes 1.7 et 1.8, ils présentent ce que l'on peut proposer à  $J$  en cas de consistance.

Le premier chapitre se termine par le paragraphe 1.9 qui constitue un bref retour au troisième mode de questionnement présenté au 1.1 et explicite diverses simplifications possibles de ce mode de questionnement.

Dans la suite de ce travail, nous noterons  $\Delta_{\text{att}}(x,y)$  la « différence d'attractivité que **J** ressent entre  $x$  et  $y$  ».

Signalons encore que, lors de la présentation des modes de questionnement, nous ne mentionnerons pas systématiquement **J**, toutes les questions lui étant adressées.

## 1.1. Types d'information

### 1.1.1. Information de type 1

On appelle **information de type 1**, l'information préférentielle obtenue en adoptant le mode de questionnement suivant, appelé mode de **questionnement 1** (« **de base** ») :

$\forall \{x, y\} \subset X$  (avec  $x \neq y$ ) :

on pose une première question Q1

Q1 : l'un des deux éléments est-il plus attractif que l'autre ?

La réponse R1 à cette question est à choisir entre : « Oui »,  
« Non »,  
et « Je ne sais pas ».

Si  $R1 = \text{« Oui »}$ , on pose une deuxième question Q2

Q2 : quel élément est plus attractif que l'autre ?

La réponse R2 à cette question est à choisir entre : « x » et « y ».

Les réponses permettent de construire 3 relations binaires sur  $X$  :

une relation de préférence  $P = \{ (x,y) \in X \times X \mid R1 = \text{« Oui »} \text{ et } R2 = \text{« x »} \}$ ,

une relation d'indifférence  $I = \{ (x,y) \in X \times X \mid x = y \text{ ou } R1 = \text{« Non »} \}$ ,

une relation d'incomparabilité  $? = \{ (x,y) \in X \times X \mid R1 = \text{« Je ne sais pas »} \}$ .

En d'autres termes,

$P = \{ (x,y) \in X \times X \mid x \text{ est plus attractif que } y \}$ ,

$I = \{ (x,y) \in X \times X \mid x \text{ n'est pas plus attractif que } y \text{ et } y \text{ n'est pas plus attractif que } x \}$ ,

$? = \{ (x,y) \in X \times X \mid x \text{ et } y \text{ ne sont pas comparables quant à leur attractivité} \}$ .

Ce mode de questionnement assure que :

- $P$  est asymétrique ( $\forall x,y \in X : (x,y) \in P \Rightarrow (y,x) \notin P$ ),
- $I$  est réflexive et symétrique,
- $?$  est irreflexive et symétrique.

Ces propriétés nous semblent correspondre à des exigences minimales de rationalité de la part de  $J$ .

Par contre, les cas de non-transitivité de  $P$  et de  $I$  seront détectés et feront l'objet de discussions interactives avec le décideur.

Enfin, si nous notons  $P^{-1} = \{ (x,y) \in X \times X \mid y P x \}$ ,  
 nous avons évidemment  $? = X \times X \setminus (I \cup P \cup P^{-1})$ .

Par la suite, nous considérerons que

une « **information de type 1** » sur  $X$  est une structure  $\{ P, I, ? \}$  où  
 $P, I, ?$  sont des relations disjointes sur  $X$   
 $P$  est asymétrique  
 $I$  est réflexive et symétrique  
 $? = X \times X \setminus (I \cup P \cup P^{-1})$

**Conventions :**

si  $x I y$ , on dira que « la différence d'attractivité entre  $x$  et  $y$  est *nulle* ».

si  $x P y$ , on dira que « la différence d'attractivité entre  $x$  et  $y$  est *positive* ».

1.1.2. Information de type 2

On appelle **information de type 2**, l'information préférentielle obtenue en utilisant le mode de questionnement suivant, appelé mode de **questionnement 2** (« **MACBETH** ») :

$\forall (x,y) \in P$  : on pose la question

- Q3 : la différence d'attractivité entre  $x$  et  $y$  est-elle :
- très faible ?
  - faible ?
  - modérée ?
  - forte ?
  - très forte ?
  - extrême ?

La réponse R3 à cette question doit être « *un ensemble de catégories successives* »

Par exemple, si  $(x,y)$  et  $(z,w) \in P$ ,  $J$  pourrait répondre que « la différence d'attractivité entre  $x$  et  $y$  est *très forte* » et que « la différence d'attractivité entre  $z$  et  $w$  est *faible à modérée* ».

C'est ce mode de questionnement qui est utilisé dans l'approche MACBETH et auquel nos exemples se référeront.

Cependant, dans ce travail, nous nous situerons dans un cadre plus général où on envisage non pas 6 mais  $Q$  catégories sémantiques ( $Q \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ ).

Le mode de **questionnement 2** général est donc

$\forall (x,y) \in \mathbf{P}$  :

Q3 : la différence d'attractivité entre x et y est-elle :  $d_1$  ,  
 $d_2$  ,  
 ...  
 $d_Q$  ?

où  $d_1, d_2, \dots, d_Q$  sont des catégories sémantiques définies de telle sorte que, si  $s < t$ , une différence d'attractivité  $d_s$  est moins forte qu'une différence d'attractivité  $d_t$ .

La réponse R3 à cette question doit être de la forme «  $d_s$  à  $d_t$  », avec  $s \leq t$  (la réponse « je ne sais pas » étant assimilée à la réponse «  $d_1$  à  $d_Q$  »).

On offre donc la possibilité d'hésiter entre plusieurs catégories successives.

Les réponses à ce mode de questionnement induisent une partition de  $\mathbf{P}$  en  $\frac{Q.(Q+1)}{2}$  relations  $C_{ij}$  ( $1 \leq i \leq j \leq Q$ ) où

$$C_{ij} = \{ (x,y) \in \mathbf{P} \mid \Delta_{att}(x,y) \text{ est « } d_i \text{ à } d_j \text{ »} \}$$

L'utilisation que l'on fera de ces réponses de  $\mathbf{J}$  est la suivante :

lorsque [ la différence d'attractivité entre z et w est «  $d_i$  à  $d_j$  »,  
 la différence d'attractivité entre x et y est «  $d_s$  à  $d_t$  »  
 et  $j < s$  ]

nous considérerons que

[ la différence d'attractivité entre x et y est plus forte qu'entre z et w ]

ce que nous noterons : [  $\Delta_{att}(x,y) \succ \Delta_{att}(z,w)$  ]

Mathématiquement, ceci peut s'écrire

si [  $(x,y) \in C_{st}$  et  $(z,w) \in C_{ij}$  et  $j < s$  ],

alors [  $\Delta_{att}(x,y) \succ \Delta_{att}(z,w)$  ]

Les réponses au mode de questionnement 2 permettent donc de définir une relation  $P^e$  sur  $\mathbf{P}$  :

$$P^e = \{ ((x,y),(z,w)) \in \mathbf{P} \times \mathbf{P} \mid \exists i, j, s, t \in \mathbb{N}_{1,Q} \text{ avec } i \leq j < s \leq t, (x,y) \in C_{st}, (z,w) \in C_{ij} \}$$

( (x,y)  $P^e$  (z,w) lorsque  $\Delta_{att}(x,y) \succ \Delta_{att}(z,w)$  ).

Le mode de questionnement utilisé assure que  $P^e$  est asymétrique.

Signalons enfin que  $C_{ss}$  sera simplement noté  $C_s$  .

Par la suite, nous considérerons que

une « **information de type 2** » sur  $X$  est une relation asymétrique  $P^e$  sur  $P$

et nous adopterons la définition suivante:

une « **information de type 1+2** » sur  $X$  est une structure  $\{ P , I , ? , P^e \}$  où  
 $\{ P , I , ? \}$  est une information de type 1 sur  $X$   
 $P^e$  est une information de type 2 sur  $X$

### 1.1.3. Information de type 3

On appelle **information de type 3**, l'information préférentielle obtenue en utilisant le mode de questionnement suivant, appelé mode de **questionnement 3** :

$\forall (x,y), (z,w) \in P$  avec  $(x,y) \neq (z,w)$ , on pose la question :

Q4 : si vous représentiez  $\Delta_{att}(z,w)$  par un segment de longueur 1,  
entre quelles valeurs situeriez-vous la longueur du segment  
représentant  $\Delta_{att}(x,y)$  ?

La réponse à cette question doit être de la forme « entre  $\alpha$  et  $\beta$  »  
( où  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ ,  $\alpha \leq \beta$  ) ou « je ne sais pas ».

La réponse « entre  $\alpha$  et  $\beta$  » à la question Q4 sera notée :  $\alpha \leq \frac{\Delta_{att}(x,y)}{\Delta_{att}(z,w)} \leq \beta$

Dans le cas particulier où  $\alpha = \beta$  , on notera  $\frac{\Delta_{att}(x,y)}{\Delta_{att}(z,w)} \approx \alpha$  .

Sur le plan pratique, répondre à une telle question est certainement très difficile. Le mode de questionnement 3 ne devrait, à notre avis, être utilisé que lorsque les réponses aux deux autres modes de questionnement n'ont pas permis à  $J$  de considérer son problème de décision comme résolu. Cependant, même dans ce cas,

nous pensons qu'il est utile d'en envisager des simplifications en diminuant le nombre d'éléments différents qu'il fait intervenir ou en utilisant, parmi les 4 éléments, certains « bien connus » (voir paragraphe 1.9).

Notons :  $\mathbb{R}_{+\leq}^2 = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \alpha \leq \beta \}$

Les réponses de **J** permettent de définir une relation  $\mathbf{R}^b$  de  $(\mathbf{P} \times \mathbf{P})$  dans  $\mathbb{R}_{+\leq}^2$  :

$$\mathbf{R}^b = \left\{ \left( ((x,y), (z,w)), (\alpha, \beta) \right) \in (\mathbf{P} \times \mathbf{P}) \times \mathbb{R}_{+\leq}^2 \mid \alpha \leq \frac{\Delta_{\text{att}}(x,y)}{\Delta_{\text{att}}(z,w)} \leq \beta \right\}$$

Dans la suite, nous considérerons que

une « **information de type 3** » sur **X** est une relation  $\mathbf{R}^b$  de  $\mathbf{P} \times \mathbf{P}$  dans  $\mathbb{R}_{+\leq}^2$

et nous adopterons la définition suivante:

une « **information de type 1+2+3** » sur **X** est une structure  $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I}, ?, P^e, \mathbf{R}^b \}$  où

- $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I}, ? \}$  est une information de type 1 sur **X**
- $P^e$  est une information de type 2 sur **X**
- $\mathbf{R}^b$  est une information de type 3 sur **X**

### 1.1.4. Exemple

Soit  $X = \{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \}$  un ensemble de 5 voitures que  $J$  doit comparer quant à leur attractivité en ce qui concerne le confort. Nous supposons avoir utilisé le mode de questionnement MACBETH à 6 catégories.

Supposons que  $J$  ait dit que:

- $a_1$  est plus attractive que  $a_3$ ,  $a_2$  est plus attractive que  $a_1$ ,  $a_1$  est plus attractive que  $a_4$ ;
- $a_4$  et  $a_5$  sont aussi attractives l'une que l'autre;
- la différence d'attractivité entre  $a_1$  et  $a_3$  est modérée;
- la différence d'attractivité entre  $a_2$  et  $a_1$  est faible;
- la différence d'attractivité entre  $a_1$  et  $a_4$  est de très faible à faible;
- la différence d'attractivité entre  $a_1$  et  $a_3$  est "deux à trois fois plus forte" que la différence d'attractivité entre  $a_1$  et  $a_4$  ;
- la différence d'attractivité entre  $a_2$  et  $a_1$  est "deux fois plus forte" que la différence d'attractivité entre  $a_1$  et  $a_4$  .

On a alors:

$$P = \{ (a_2, a_1), (a_1, a_3), (a_1, a_4) \}$$

$$I = \{ (a_4, a_5), (a_5, a_4), (a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_4), (a_5, a_5) \}$$

$$? = \{ (a_1, a_5), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_2, a_5), (a_3, a_4), (a_3, a_5), (a_5, a_1), (a_3, a_2), (a_4, a_2), (a_5, a_2), (a_4, a_3), (a_5, a_3) \}$$

$$C_2 = \{ (a_2, a_1) \}$$

$$C_3 = \{ (a_1, a_3) \}$$

$$C_{12} = \{ (a_1, a_4) \}$$

$$P^e = \{ ((a_1, a_3), (a_2, a_1)), ((a_1, a_3), (a_1, a_4)) \}$$

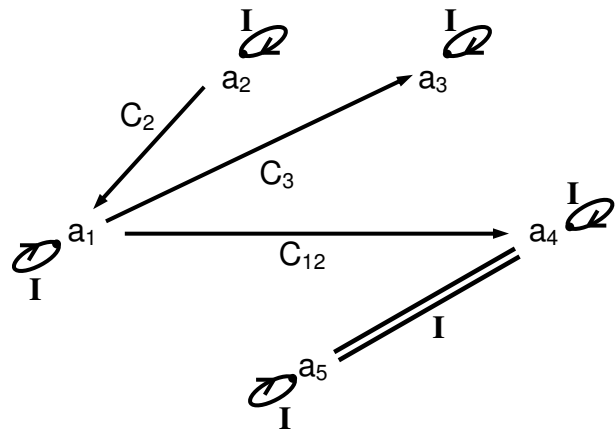
$$R^b = \{ ( ((a_1, a_3), (a_1, a_4)), (2,3) ), ( ((a_2, a_1), (a_1, a_4)), (2,2) ) \}$$

et aussi :

$$C_{ij} = \phi, \quad \forall (i,j) \notin \{ (2,2), (3,3), (1,2) \} .$$

Les relations  $I$  et  $C_{ij}$  peuvent être représentées par un tableau ou un graphe :

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	$I$		$C_3$	$C_{12}$	?
$a_2$	$C_2$	$I$	?	?	?
$a_3$		?	$I$	?	?
$a_4$		?	?	$I$	$I$
$a_5$	?	?	?	$I$	$I$



Dans la suite, nous privilégierons la représentation sous forme de **tableau** (parfois appelée abusivement « *représentation matricielle* ») et n'utiliserons des graphes que dans des cas particulièrement simples ; en outre, nous « omettrons » systématiquement de dessiner les « boucles »  $I$ , lourdes et inesthétiques, sur les graphes.

## 1.2. Représentation numérique de l'information

### 1.2.1. Echelle de type 1

Supposons qu'on dispose d'une « *information de type 1* »  $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I}, ? \}$  sur  $\mathbf{X}$ .

Définition:

Une « **échelle de type 1** » sur  $\mathbf{X}$  relative à  $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I} \}$  est une fonction  $\mu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall x, y \in \mathbf{X}, [x \mathbf{P} y \Rightarrow \mu(x) > \mu(y)] \text{ et } [x \mathbf{I} y \Rightarrow \mu(x) = \mu(y)] \quad (1)$$

En d'autres termes, une échelle de type 1 est une représentation numérique de l'information de type 1, compte tenu des règles de mesurage (1), appelées « *règles de mesurage ordinales* ».

Exemple : reprenons l'exemple 1.1. 4

où  $\mathbf{P} = \{ (a_2, a_1), (a_1, a_3), (a_1, a_4) \}$  et  $(a_4, a_5), (a_5, a_4) \in \mathbf{I}$

La fonction  $\mu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\mu(a_1) = 1 \quad \mu(a_2) = 2 \quad \mu(a_3) = 0 \quad \mu(a_4) = 0 \quad \mu(a_5) = 0$$

est une échelle de type 1 sur  $\mathbf{X}$  relative à  $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I} \}$ .

Notations :

- $Ech_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}) = \{ \mu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R} \mid \mu \text{ est une échelle de type 1 sur } \mathbf{X} \text{ relative à } \{ \mathbf{P}, \mathbf{I} \} \}$
- Lorsque  $\mathbf{X}, \mathbf{P}$  et  $\mathbf{I}$  sont bien déterminés,  $Ech_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I})$  sera simplement noté  $Ech_1$ .

Définition:

Lorsque  $? = \phi$  et  $Ech_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}) \neq \phi$ ,

- tout élément de  $Ech_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I})$  est appelé « **échelle ordinale** » sur  $\mathbf{X}$  ;
- $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I}, ? \}$  est appelée « **information ordinale** » sur  $\mathbf{X}$ .

Propriétés :

1)  $[ \mathbf{P} \text{ transitive, } \mathbf{I} \text{ transitive, } \mathbf{P} \mathbf{I} \subset \mathbf{P}, \mathbf{I} \mathbf{P} \subset \mathbf{P} ] \Rightarrow Ech_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}) \neq \phi$

$$2) [ \mu \in \text{Ech}_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}) ]$$

$$\Rightarrow [ \forall \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ strictement croissante, } \phi \circ \mu \in \text{Ech}_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}) ]$$

$$3) \underline{\text{Si ? = } \phi}, \quad [ \mathbf{P} \text{ transitive, } \mathbf{I} \text{ transitive} ] \Leftrightarrow \text{Ech}_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}) \neq \phi$$

En d'autres termes,

$$\text{Ech}_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}) \neq \phi \Leftrightarrow \mathbf{P} \cup \mathbf{I} \text{ est un « préordre complet » sur } \mathbf{X}.$$

(le préordre complet est une structure mathématique modélisant l'idée de **rangement**, avec possibilité d'ex aequo).

Démonstrations :

1) voir Roubens et Vincke, 1985, section 3.7.3

2) évident

3) voir Pirlot et Vincke, 1997, section 3.25 .

### 1.2.2. Echelle de type 2

Supposons qu'on dispose d'une « *information de type 2* »  $P^e$  sur  $\mathbf{X}$  :

$$\begin{aligned} P^e &= \{ ((x,y),(z,w)) \in \mathbf{P} \times \mathbf{P} \mid \exists i, j, s, t \in \mathbb{N}_{1,Q} \text{ avec } i \leq j < s \leq t, (x,y) \in C_{st}, (z,w) \in C_{ij} \} \\ &= \{ ((x,y),(z,w)) \in \mathbf{P} \times \mathbf{P} \mid \Delta_{\text{att}}(x,y) \succ \Delta_{\text{att}}(z,w) \} \end{aligned}$$

Définitions:

Une « **échelle de type 2** » sur  $\mathbf{X}$  relative à  $P^e$  est une fonction  $\mu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall x, y, z, w \in \mathbf{X}, [ (x,y) P^e (z,w) \Rightarrow \mu(x) - \mu(y) > \mu(z) - \mu(w) ]$$

Une « **échelle de type 1+2** » sur  $\mathbf{X}$  relative à  $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I}, P^e \}$  est une fonction  $\mu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

- $\mu$  est une échelle de type 1 sur  $\mathbf{X}$  relative à  $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I} \}$
- $\forall x, y, z, w \in \mathbf{X}, [ (x,y) P^e (z,w) \Rightarrow \mu(x) - \mu(y) > \mu(z) - \mu(w) ]$

ou encore, telle que

$$\forall x, y \in \mathbf{X}, [x \mathbf{P} y \Rightarrow \mu(x) > \mu(y)] \text{ et } [x \mathbf{I} y \Rightarrow \mu(x) = \mu(y)]$$

$$\forall x, y, z, w \in \mathbf{X} \text{ avec } x \mathbf{P} y \text{ et } z \mathbf{P} w,$$

$$[\Delta_{\text{att}}(x,y) > \Delta_{\text{att}}(z,w) \Rightarrow \mu(x) - \mu(y) > \mu(z) - \mu(w)]$$

En d'autres termes

Une « **échelle de type 1+2** » sur  $\mathbf{X}$  relative à  $\{\mathbf{P}, \mathbf{I}, \mathbf{P}^e\}$  est une fonction

$\mu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall x, y \in \mathbf{X}, [x \mathbf{P} y \Rightarrow \mu(x) > \mu(y)] \text{ et } [x \mathbf{I} y \Rightarrow \mu(x) = \mu(y)] \quad (1)$$

$$\forall i, j, s, t \in \mathbb{N}_{1,Q} \text{ avec } i \leq j < s \leq t, \forall (x,y) \in C_{st}, \forall (z,w) \in C_{ij},$$

$$\mu(x) - \mu(y) > \mu(z) - \mu(w) \quad (2)$$

Une échelle de type 1+2 est donc une représentation numérique de l'information de type 1+2, compte tenu des règles de mesurage (1) et (2).

La règle de mesurage (2) est appelée « *règle de mesurage sémantique* ».

Exemple : reprenons l'exemple 1.1.4

où  $\mathbf{P} = \{ (a_2, a_1), (a_1, a_3), (a_1, a_4) \}$

$$\mathbf{I} = \{ (a_4, a_5), (a_5, a_4), (a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_4), (a_5, a_5) \}$$

$$\mathbf{P}^e = \{ ((a_1, a_3), (a_2, a_1)), ((a_1, a_3), (a_1, a_4)) \}$$

1°) La fonction  $\mu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\mu(a_1) = 2 \quad \mu(a_2) = 6 \quad \mu(a_3) = -2.5 \quad \mu(a_4) = 0 \quad \mu(a_5) = 0$$

est une échelle de type 1+2 sur  $\mathbf{X}$  relative à  $\{\mathbf{P}, \mathbf{I}, \mathbf{P}^e\}$ .

En effet,  $\mu(a_2) > \mu(a_1)$ ,  $\mu(a_1) > \mu(a_3)$ ,  $\mu(a_1) > \mu(a_4)$ ,  $\mu(a_4) = \mu(a_5)$

et comme  $\mu(a_1) - \mu(a_3) = 4.5$ ,  $\mu(a_1) - \mu(a_4) = 2$  et  $\mu(a_2) - \mu(a_1) = 4$ ,

on a bien  $\mu(a_1) - \mu(a_3) > \mu(a_2) - \mu(a_1)$

et  $\mu(a_1) - \mu(a_3) > \mu(a_1) - \mu(a_4)$

2°) La fonction  $v : X \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$v(a_1) = 2 \quad v(a_2) = 3 \quad v(a_3) = 0 \quad v(a_4) = 0 \quad v(a_5) = 0$$

est une échelle de type 1 sur  $X$  relative à  $\{P, I\}$

mais n'est pas une échelle de type 1+2 sur  $X$  relative à  $\{P, I, P^e\}$ .

En effet,  $v(a_2) > v(a_1)$ ,  $v(a_1) > v(a_3)$ ,  $v(a_1) > v(a_4)$ ,  $v(a_4) = v(a_5)$

mais comme  $v(a_1) - v(a_3) = 2$  et  $v(a_1) - v(a_4) = 2$ ,

on n'a pas  $v(a_1) - v(a_3) > v(a_1) - v(a_4)$ .

Notations :

-  $Ech_2(X, P^e) = \{ \mu : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \mu \text{ est une échelle de type 2 sur } X \text{ relative à } P^e \}$

-  $Ech_{1+2}(X, P, I, P^e) =$

$\{ \mu : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \mu \text{ est une échelle de type 1+2 sur } X \text{ relative à } \{P, I, P^e\} \}$

- Lorsque  $X, P, I$  et  $P^e$  sont bien déterminés,  $Ech_{1+2}(X, P, I, P^e)$  sera simplement noté  $Ech_{1+2}$ .

Définition: lorsque  $? = \emptyset$  et  $Ech_{1+2}(X, P, I, P^e) \neq \emptyset$ ,

- tout élément de  $Ech_{1+2}(X, P, I, P^e)$  est appelé « **échelle précardinale** » sur  $X$  ;

-  $\{P, I, ?, P^e\}$  est appelée « **information précardinale** » sur  $X$ .

**Remarques** .

Comme nous l'avons rappelé, l'existence d'une échelle ordinale est garantie par des conditions simples et intuitives sur les relations  $P$  et  $I$  (préordre complet).

Par contre, les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une échelle précardinale ne faisant intervenir que les relations  $P, I$  et  $C_{ij}$  sont, de par leur complexité, inapplicables dans le cadre du logiciel que nous avons élaboré (voir Doignon, 1987).

Cette différence aura pour conséquence que le test de  $[ Ech_1 \neq \emptyset ]$  sera fondamentalement différent du test de  $[ Ech_{1+2} \neq \emptyset ]$  (voir paragraphe 1.4).

### 1.2.3. Echelle de type 3

Supposons qu'on dispose d'une « *information préférentielle de type 3* »  $\mathbf{R}^b$  sur  $\mathbf{X}$  :

$$\mathbf{R}^b = \left\{ \left( ((x,y), (z,w)), (\alpha, \beta) \right) \in (\mathbf{P} \times \mathbf{P}) \times \mathbb{R}_{+\leq}^2 \mid \alpha \leq \frac{\Delta_{\text{att}}(x,y)}{\Delta_{\text{att}}(z,w)} \leq \beta \right\}$$

Définition:

Une « **échelle de type 1+2+3** » sur  $\mathbf{X}$  relative à  $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I}, \mathbf{P}^e, \mathbf{R}^b \}$  est une fonction  $\mu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall x, y \in \mathbf{X}, [x \mathbf{P} y \Rightarrow \mu(x) > \mu(y)] \quad \text{et} \quad [x \mathbf{I} y \Rightarrow \mu(x) = \mu(y)] \quad (1)$$

$$\forall i, j, s, t \in \mathbb{N}_{1,Q} \text{ avec } i \leq j < s \leq t, \quad \forall (x,y) \in \mathbf{C}_{st}, \quad \forall (z,w) \in \mathbf{C}_{ij},$$

$$\mu(x) - \mu(y) > \mu(z) - \mu(w) \quad (2)$$

$$\forall \left( ((x,y), (z,w)), (\alpha, \beta) \right) \in \mathbf{R}^b, \quad \alpha \leq \frac{\mu(x) - \mu(y)}{\mu(z) - \mu(w)} \leq \beta \quad (3)$$

Exemple : reprenons l'exemple 1.1.4,

où  $\mathbf{P} = \{ (a_2, a_1), (a_1, a_3), (a_1, a_4) \}$

$$\mathbf{I} = \{ (a_4, a_5), (a_5, a_4), (a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_4), (a_5, a_5) \}$$

$$\mathbf{P}^e = \{ ((a_1, a_3), (a_2, a_1)), ((a_1, a_3), (a_1, a_4)) \}$$

$$\mathbf{R}^b = \{ ( ((a_1, a_3), (a_1, a_4)), (2, 3) ), ( ((a_2, a_1), (a_1, a_4)), (2, 2) ) \}$$

La fonction  $\mu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\mu(a_1) = 2 \quad \mu(a_2) = 6 \quad \mu(a_3) = -2.5 \quad \mu(a_4) = 0 \quad \mu(a_5) = 0$$

est une échelle de type 1+2+3 sur  $\mathbf{X}$  relative à  $\mathbf{R}^b$ .

Nous avons déjà vérifié auparavant que  $\mu$  est une échelle de type 1+2.

Comme  $\mu(a_1) - \mu(a_3) = 4.5$ ,  $\mu(a_1) - \mu(a_4) = 2$  et  $\mu(a_2) - \mu(a_1) = 4$ ,

on a aussi  $2 \leq \frac{\mu(a_1) - \mu(a_3)}{\mu(a_1) - \mu(a_4)} \leq 3$  et  $2 \leq \frac{\mu(a_2) - \mu(a_1)}{\mu(a_1) - \mu(a_4)} \leq 2$

Notations :

-  $\mathcal{Ech}_{1+2+3}(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}, \mathbf{P}^e, \mathbf{R}^b)$

$$= \{ \mu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R} \mid \mu \text{ est une échelle de type 1+2+3 sur } \mathbf{X} \text{ relative à } \{ \mathbf{P}, \mathbf{I}, \mathbf{P}^e, \mathbf{R}^b \} \}$$

- Lorsque  $\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}, P^e$  et  $\mathbf{R}^b$  sont bien déterminés,  $Ech_{1+2+3}(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}, P^e, \mathbf{R}^b)$  sera simplement noté  $Ech_{1+2+3}$ .

Définition :

Lorsque  $\left\{ \begin{array}{l} ? = \phi \\ Ech_{1+2+3} \neq \phi \\ \forall \mu, \mu' \in Ech_{1+2+3}, \exists a \in \mathbb{R}_+^*, \exists b \in \mathbb{R} : \mu = a\mu' + b \end{array} \right.$

nous dirons que  $\{\mathbf{P}, \mathbf{I}, ?, P^e, \mathbf{R}^b\}$  est une « **information cardinale** » sur  $\mathbf{X}$

Dans un tel cas,

tout élément de  $Ech_{1+2+3}(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}, P^e, \mathbf{R}^b)$  est appelé « **échelle cardinale** » sur  $\mathbf{X}$ .

**Proposition 1**

Si  $\{\mathbf{P}, \mathbf{I}, ? = \phi, P^e, \mathbf{R}^b\}$  est une « **information cardinale** » sur  $\mathbf{X}$ ,

alors  $\forall x, y, z, w \in \mathbf{X}$  avec  $(z, w) \notin \mathbf{I}$  et  $\forall \mu, \mu' \in Ech_{1+2+3}$ ,

$$\frac{\mu(x) - \mu(y)}{\mu(z) - \mu(w)} = \frac{\mu'(x) - \mu'(y)}{\mu'(z) - \mu'(w)} \quad (*)$$

Démonstration :

soient  $x, y, z, w \in \mathbf{X}$  avec  $(z, w) \notin \mathbf{I}$  et  $\mu, \mu' \in Ech_{1+2+3}$ .

Comme  $\{\mathbf{P}, \mathbf{I}, ? = \phi, P^e, \mathbf{R}^b\}$  est une information cardinale,

$$\exists a \in \mathbb{R}_+^*, \exists b \in \mathbb{R} : \mu = a\mu' + b$$

et (\*) est évident. □

Remarque : lorsqu'on dispose d'une information cardinale  $\{\mathbf{P}, \mathbf{I}, ? = \phi, P^e, \mathbf{R}^b\}$  sur  $\mathbf{X}$ , il est donc possible de positionner les éléments de  $\mathbf{X}$  sur une droite verticale de telle sorte que

$$\begin{aligned} 1^\circ) \forall x, y \in \mathbf{X}, \quad x \mathbf{P} y &\Leftrightarrow x \text{ est situé au-dessus de } y \\ x \mathbf{I} y &\Leftrightarrow x \text{ est situé à la même position que } y \end{aligned}$$

2°)  $\forall x, y, z, w \in \mathbf{X}$  avec  $(z,w) \notin \mathbf{I}$ ,

$$\frac{d(x,y)}{d(z,w)} = \frac{\mu(x) - \mu(y)}{\mu(z) - \mu(w)}, \quad \forall \mu \in \text{Ech}_{1+2+3}$$

(  $d(x,y)$  est la distance séparant les points représentatifs de  $x$  et  $y$  ).

### Proposition 2

Supposons que  $\mathbf{J}$  ait positionné chaque élément de  $\mathbf{X}$  sur une droite verticale de telle sorte que :

1°)  $\forall x, y \in \mathbf{X}$ ,  $x \mathbf{P} y \Leftrightarrow x$  est situé au-dessus de  $y$

$x \mathbf{I} y \Leftrightarrow x$  est situé à la même position que  $y$

2°) les distances relatives apparaissant entre les points représentatifs des éléments de  $\mathbf{X}$  traduisent les différences relatives d'attractivité que  $\mathbf{J}$  ressent entre ces éléments.

Par exemple, on lit, sur le dessin ci-contre, que

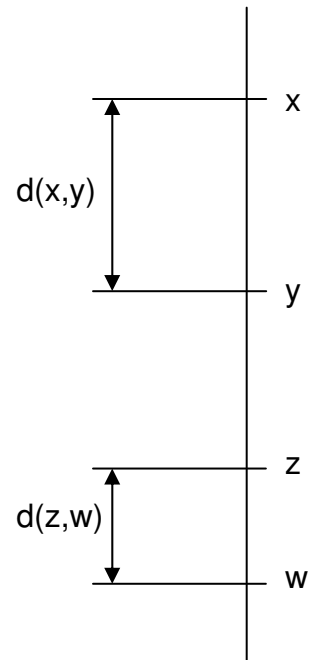
-  $x \mathbf{P} y$

-  $z \mathbf{P} w$

-  $\frac{\Delta_{\text{att}}(x,y)}{\Delta_{\text{att}}(z,w)} \approx \frac{d(x,y)}{d(z,w)}$

ce qui, dans notre formalisme, peut s'écrire

$$(((x,y), (z,w)), (\frac{d(x,y)}{d(z,w)}, \frac{d(x,y)}{d(z,w)})) \in \mathbf{R}^b$$



Soient  $H$  et  $L$  2 éléments de  $\mathbf{X}$  tels que  $H$  est situé au-dessus de  $L$ .

Si  $\mathbf{P}^e = \emptyset$

et  $\mathbf{R}^b = \{ (((x,L), (H,L)), (\frac{d(x,L)}{d(H,L)}, \frac{d(x,L)}{d(H,L)})) \mid x \mathbf{P} L \}$

$$\cup \{ (((L,x), (H,L)), (\frac{d(x,L)}{d(H,L)}, \frac{d(x,L)}{d(H,L)})) \mid L \mathbf{P} x \},$$

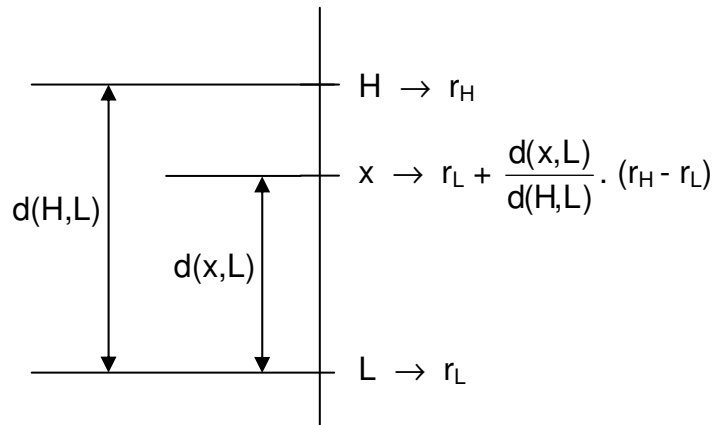
alors  $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I}, \mathbf{?}, \mathbf{P}^e, \mathbf{R}^b \}$  est une « **information cardinale** » sur  $\mathbf{X}$ .

Démonstration: Soit  $r_H$  et  $r_L \in \mathbb{R}$  tels que  $r_H > r_L$

$$\text{Soit } \mu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \mu(x) = \begin{cases} r_L + \frac{d(x,L)}{d(H,L)} \cdot (r_H - r_L) & \text{si } \begin{cases} x \text{ au-dessus de } L \\ x \text{ au même niveau que } L \end{cases} \\ r_L - \frac{d(x,L)}{d(H,L)} \cdot (r_H - r_L) & \text{si } x \text{ en dessous de } L \end{cases}$$

(on a alors  $\mu(L) = r_L$

et  $\mu(H) = r_H$ ).



a) Comme **chaque** élément de  $\mathbf{X}$  a été positionné sur la droite, il est évident, d'après les définitions de  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{I}$  et  $\mu$ , que

- $\forall x, y \in \mathbf{X} : [x \mathbf{P} y \Rightarrow \mu(x) > \mu(y)]$  et  $[x \mathbf{I} y \Rightarrow \mu(x) = \mu(y)]$
- $\mathbf{?} = \emptyset$

Donc  $\mu$  est une échelle de type 1

$$\text{b) } \forall \left( ((x,L), (H,L)), \left( \frac{d(x,L)}{d(H,L)}, \frac{d(x,L)}{d(H,L)} \right) \right) \in \mathbf{R}^b$$

on doit avoir  $\frac{\mu(x) - \mu(L)}{\mu(H) - \mu(L)} = \frac{d(x,L)}{d(H,L)}$  : c'est évident par définition de  $\mu$ .

$$\text{De même, } \forall \left( ((L,x), (H,L)), \left( \frac{d(x,L)}{d(H,L)}, \frac{d(x,L)}{d(H,L)} \right) \right) \in \mathbf{R}^b,$$

$$\text{on a } \frac{\mu(L) - \mu(x)}{\mu(H) - \mu(L)} = \frac{d(x,L)}{d(H,L)}$$

Donc  $\mu$  est une échelle de type 1+2+3, donc  $\text{Ech}_{1+2+3} \neq \emptyset$ .

3°) Il reste à prouver que  $\forall \mu' \in \text{Ech}_{1+2+3}, \exists a \in \mathbb{R}_+^*, \exists b \in \mathbb{R} : \mu' = a\mu + b$

Soit  $\mu' \in \text{Ech}_{1+2+3}$ .

$\forall x \in \mathbf{X}$  (on suppose que  $x \mathbf{P} L$ , la démonstration étant analogue dans les autres cas)

on a 
$$\frac{\mu'(x) - \mu'(L)}{\mu'(H) - \mu'(L)} = \frac{d(x,L)}{d(H,L)}$$

donc 
$$\frac{\mu'(x) - \mu'(L)}{\mu'(H) - \mu'(L)} = \frac{\mu(x) - \mu(L)}{\mu(H) - \mu(L)}$$

donc 
$$\mu'(x) = \frac{\mu'(H) - \mu'(L)}{\mu(H) - \mu(L)} \mu(x) - \frac{\mu'(H) - \mu'(L)}{\mu(H) - \mu(L)} \mu(L) + \mu'(L)$$

Il suffit donc de prendre  $a = \frac{\mu'(H) - \mu'(L)}{\mu(H) - \mu(L)}$  et  $b = - \frac{\mu'(H) - \mu'(L)}{\mu(H) - \mu(L)} \mu(L) + \mu'(L)$

□

## 1.3. Consistance - inconsistance

### 1.3.1. Définition de l'inconsistance

Définition :

Une information préférentielle  $\{ P, I, ?, P^e, R^b \}$  sur  $X$  est dite « **consistante** »  
lorsque  $Ech_{1+2+3}(X, P, I, P^e, R^b) \neq \phi$

Dans le cas contraire, nous dirons que l'information préférentielle  $\{ P, I, ?, P^e, R^b \}$  sur  $X$  est "**inconsistante**".

L'information de type 1+2+3  $\{ P, I, ?, P^e, R^b \}$  est donc inconsistante lorsqu'elle est *incompatible* avec la construction d'une échelle de type 1+2+3 . Dans un tel cas, il est important de

- le détecter et le signaler au décideur **J** (voir paragraphe 1.5) ,
- lui en expliquer l'origine et lui proposer des modifications qui rendraient ses jugements « *consistants* » (voir paragraphe 1.6).

Dans ce paragraphe, nous définirons trois grands types d'inconsistance.

Nous y utiliserons la notion de *prolongement* d'une information préférentielle que nous définissons comme suit :

$\{ P', I', ?' \}$  est un « **prolongement** » de la structure de préférence  $\{ P, I, ? \}$

lorsque  $\left\{ \begin{array}{l} P \subset P' \text{ et } I \subset I' \\ P' \text{ est asymétrique} \\ I' \text{ est symétrique} \\ ?' = X \times X \setminus ( I' \cup P' \cup P'^{-1} ) \end{array} \right.$

### 1.3.2. Premier type d'inconsistance :

$$Ech_1(X, P, I) = \phi$$

Les jugements de **J** sont tels qu'il n'est pas possible d'associer à chaque élément  $x$  de  $X$  un nombre  $\mu(x)$  de manière à satisfaire la condition ordinale.

Dans ce cas, les jugements de **J** sont tels qu'aucun prolongement  $\{ \mathbf{P}' , \mathbf{I}' , ?' = \phi \}$  de l'information  $\{ \mathbf{P} , \mathbf{I} , ? \}$  ne constituera une *information ordinale*, c'est-à-dire ne permettra de ranger les éléments de **X** par "ordre d'attractivité" .

Dans une telle situation, on parlera d' « **inconsistance de type 1** ».

Le logiciel MACBETH mentionnera dans ce cas "pas de rangement".

Ce type de situation se produit notamment lorsque **J** déclare, pour trois éléments  $x, y$  et  $z$  de **X**, que :

$$\begin{aligned} & x \mathbf{I} y , y \mathbf{I} z \text{ et } x \mathbf{P} z \\ \text{ou } & x \mathbf{P} y , y \mathbf{P} z \text{ et } z \mathbf{P} x \quad (\text{cycle dans } \mathbf{P}) \end{aligned}$$

### 1.3.3. Deuxième type d'inconsistance :

$$Ech_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}) \neq \phi \quad \text{et} \quad Ech_{1+2}(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}, \mathbf{P}^e) = \phi$$

Les jugements de **J** sont tels qu'il existe une échelle de type 1 mais qu'il n'existe pas d'échelle de type 1+2.

Ce type d'inconsistance sera appelé « **inconsistance de type 2** ».

Dans une telle situation, on peut songer à distinguer 2 « sous-types » d'inconsistance : l' « **inconsistance de type 2-a** » et l' « **inconsistance de type 2-b** » .

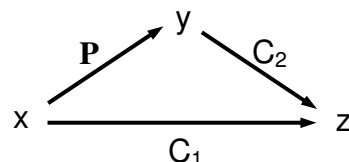
#### 1.3.3.1. Définition de l'inconsistance de type 2-a

Nous dirons que nous sommes en présence d'une « *inconsistance de type 2-a* » lorsque les jugements de **J** sont tels que

- il existe une échelle de type 1 mais
- il existe (au moins) un conflit entre jugements comparatifs (de type 1) et jugements sémantiques (de type 2) qui fait qu'il est impossible de satisfaire à la fois la condition ordinale et la condition sémantique .

De tels conflits se rencontrent essentiellement dans quatre types de situations, lorsque  $\exists x, y, z \in \mathbf{X}$  tels que:

- $x \mathbf{P} y , y \mathbf{P} z , x \mathbf{P} z$  et  $(y,z) \mathbf{P}^e (x,z)$   
(on devrait avoir  $\mu(x) > \mu(y)$  et  $\mu(y)-\mu(z) > \mu(x)-\mu(z)$  , ce qui est impossible) ;  
par exemple :

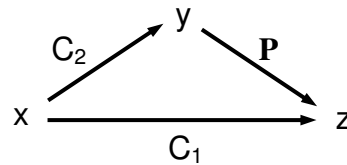


ou

- $x P y, y P z, x P z$  et  $(x,y) P^e(x,z)$

(on devrait avoir  $\mu(y) > \mu(z)$  et  $\mu(x)-\mu(y) > \mu(x)-\mu(z)$ , ce qui est impossible)

par exemple :

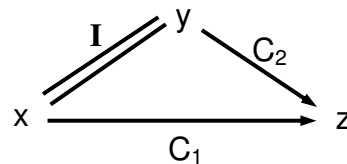


ou

- $x I y, y P z, x P z$  et  $(x,z) P^e(y,z)$

(on devrait avoir  $\mu(x) = \mu(y)$  et  $\mu(x)-\mu(z) > \mu(y)-\mu(z)$ , ce qui est impossible)

par exemple :

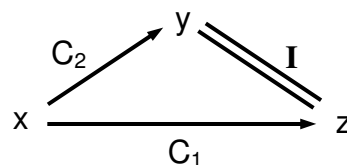


ou

- $x I y, z P y, z P x$  et  $(z,x) P^e(z,y)$

(on devrait avoir  $\mu(x) = \mu(y)$  et  $\mu(z)-\mu(x) > \mu(z)-\mu(y)$ , ce qui est impossible)

par exemple :



Une définition rigoureuse de l' « **inconsistance de type 2-a** » pourrait être :

l'information  $\{ P, I, ?, P^e \}$  présente une « **inconsistance de type 2-a** »

lorsque

$$Ech_1(X, P, I) \neq \phi \quad \text{et} \quad Ech_{1+2}(X, P, I, P^e) = \phi$$

et

$\exists P^* \subset P, I^* \subset I, P_e^* \subset P^e$ ,  $I^*$  réflexive et symétrique telles que

$$Ech_2(X, P_e^*) \neq \phi \quad \text{et} \quad Ech_{1+2}(X, P^*, I^*, P_e^*) = \phi$$

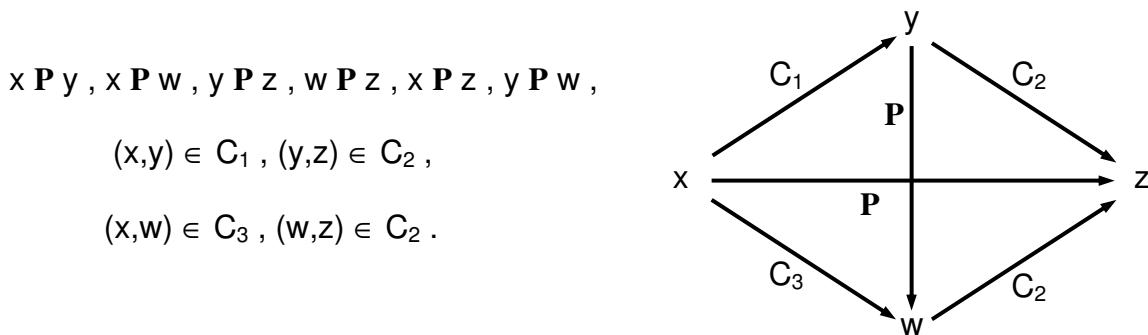
La dernière ligne traduit l'existence d'un conflit entre jugements de type 1 et jugements de type 2 , que l'on ait ou non  $Ech_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}^e) = \phi$  .

### 1.3.3.2. Définition de l'inconsistance de type 2-b

Nous dirons que nous sommes en présence d'une « *inconsistance de type 2-b* » lorsque les jugements de  $\mathbf{J}$  sont tels que

- il existe une échelle de type 1
- il n'y a aucun conflit entre jugements comparatifs et jugements sémantiques mais
- il existe (au moins) un conflit entre jugements sémantiques qui fait qu'il est impossible de satisfaire la condition sémantique .

Un exemple d'un tel conflit est le suivant :



Dans un tel cas, la condition sémantique ne peut pas être respectée ; en effet, on

devrait avoir  $\begin{cases} \mu(x) - \mu(w) > \mu(y) - \mu(z) & (1) \\ \mu(w) - \mu(z) > \mu(x) - \mu(y) & (2) \end{cases}$

ce qui est impossible puisque ces inéquations peuvent encore s'écrire :

$$\begin{cases} \mu(x) - \mu(w) - \mu(y) + \mu(z) > 0 \\ \mu(x) - \mu(w) - \mu(y) + \mu(z) < 0 \end{cases}$$

Par contre, on vérifie aisément que les deux systèmes suivants sont compatibles :

$$\begin{cases} \mu(x) - \mu(w) > \mu(y) - \mu(z) & (1) \\ \mu(x) - \mu(y) > 0 \\ \mu(x) - \mu(w) > 0 \\ \mu(x) - \mu(z) > 0 \\ \mu(y) - \mu(z) > 0 \\ \mu(w) - \mu(z) > 0 \\ \mu(y) - \mu(w) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mu(w) - \mu(z) > \mu(x) - \mu(y) & (2) \\ \mu(x) - \mu(y) > 0 \\ \mu(x) - \mu(w) > 0 \\ \mu(x) - \mu(z) > 0 \\ \mu(y) - \mu(z) > 0 \\ \mu(w) - \mu(z) > 0 \\ \mu(y) - \mu(w) > 0 \end{cases}$$

puisqu'une solution du premier est  $\mu(x) = 4, \mu(y) = 2, \mu(w) = 1$  et  $\mu(z) = 0$   
 et qu'une solution du second est  $\mu(x) = 4, \mu(y) = 3, \mu(w) = 2$  et  $\mu(z) = 0$  .

On n'est donc pas dans un cas d'*inconsistance de type 2-a*.

Une définition de l' « ***inconsistance de type 2-b*** » pourrait être la suivante :

l'information  $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I}, ?, \mathbf{P}^e \}$  présente une « ***inconsistance de type 2-b*** »  
 lorsque  

$$Ech_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}) \neq \phi \quad \text{et} \quad Ech_{1+2}(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}, \mathbf{P}^e) = \phi$$
 et  

$$\forall \mathbf{P}_e^* \subset \mathbf{P}^e : [ Ech_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}_e^*) \neq \phi \Rightarrow Ech_{1+2}(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}, \mathbf{P}_e^*) \neq \phi ]$$

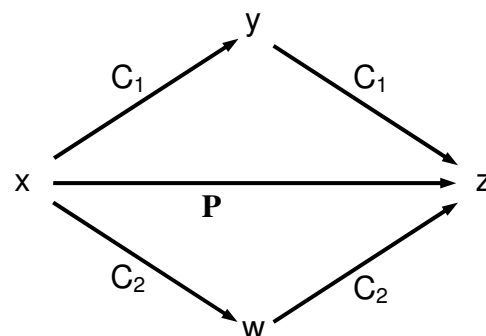
On remarquera que, dans un tel cas, on a nécessairement  $Ech_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}^e) = \phi$ .

1.3.3.3. Inconsistance de type 2-a et inconsistance de type 2-b en cas d'information préférentielle partielle ( $? \neq \phi$ )

A l'aide d'un exemple, nous allons montrer combien une décomposition de l'inconsistance de type 2 en deux cas distincts pourrait être source de confusion dans l'esprit d'un décideur lorsqu'on traite une information préférentielle partielle ( $? \neq \phi$ ).

Supposons que  $\mathbf{X} = \{ x, y, z, w \}$  et que  $\mathbf{J}$  ait formulé les jugements suivants :

$x \mathbf{P} y, x \mathbf{P} w, y \mathbf{P} z, w \mathbf{P} z, x \mathbf{P} z$   
 $(x,y) \in C_1, (y,z) \in C_1,$   
 $(x,w) \in C_2, (w,z) \in C_2$



On peut vérifier aisément que l'on est en présence d'un cas où il est impossible de satisfaire la condition sémantique, donc d'un cas d'inconsistance de type 2-b si l'on adopte les définitions précédentes.

Mais lorsque nous envisageons **toutes** les possibilités de compléter l'information de type 1, à savoir  $y \mathbf{P} w$  ou  $w \mathbf{P} y$  ou  $w \mathbf{I} y$ , on observe que, **quel que soit** le prolongement adopté, on sera en présence d'un cas d'inconsistance de type 2-a!

Pour éliminer cette source de confusion et intégrer, dans notre logiciel, cette distinction entre inconsistance de type 2-a et inconsistance de type 2-b, il aurait évidemment suffi d'introduire la notion de prolongement dans nos définitions :

l'information  $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I}, ?, P^e \}$  présente une « ***inconsistance de type 2-a*** »

lorsque

$$Ech_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}) \neq \phi \quad \text{et} \quad Ech_{1+2}(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}, P^e) = \phi$$

et

$\forall$  préordre complet  $\{ \mathbf{P}', \mathbf{I}', ?' = \phi \}$  prolongement de  $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I}, ? \}$ ,

$\exists \mathbf{P}^* \subset \mathbf{P}', \mathbf{I}^* \subset \mathbf{I}', P_e^* \subset P^e$ ,  $\mathbf{I}^*$  réflexive et symétrique telles que

$$Ech_2(\mathbf{X}, P_e^*) \neq \phi \quad \text{et} \quad Ech_{1+2}(\mathbf{X}, \mathbf{P}^*, \mathbf{I}^*, P_e^*) = \phi$$

et

l'information  $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I}, ?, P^e \}$  présente une « ***inconsistance de type 2-b*** »

lorsque

$$Ech_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}) \neq \phi \quad \text{et} \quad Ech_{1+2}(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}, P^e) = \phi$$

et

$\exists$  un préordre complet  $\{ \mathbf{P}', \mathbf{I}', ?' = \phi \}$  prolongement de  $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I}, ? \}$  tel que

$$\forall P_e^* \subset P^e : [ Ech_2(\mathbf{X}, P_e^*) \neq \phi \Rightarrow Ech_{1+2}(\mathbf{X}, \mathbf{P}', \mathbf{I}', P_e^*) \neq \phi ]$$

Signalons que, sur le plan pratique, nous n'avons pas jugé utile d'introduire une telle distinction à caractère mathématique dans notre logiciel.

### 1.3.4. Troisième type d'inconsistance :

$$\text{Ech}_{1+2}(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}, P^e) \neq \phi \quad \text{et} \quad \text{Ech}_{1+2+3}(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{I}, P^e, \mathbf{R}^b) = \phi$$

L'information préférentielle fournie par  $\mathbf{J}$  est telle qu'il existe une échelle de type 1+2 mais qu'il n'existe pas d'échelle de type 1+2+3.

Un exemple très simple d'un tel conflit est le suivant où, pour 3 éléments  $x, y$  et  $z$  de  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{J}$  déclare que :

$$x \mathbf{P} y, y \mathbf{P} z, x \mathbf{P} z$$

$$(x,y) \in C_2$$

$$(y,z) \in C_3$$

$$0.4 \leq \frac{\Delta_{\text{att}}(y,z)}{\Delta_{\text{att}}(x,z)} \leq 0.5$$

On devrait donc avoir :

$$\mu(x) > \mu(y), \mu(y) > \mu(z), \mu(x) > \mu(z) \quad (1) \quad (\text{car } x \mathbf{P} y, y \mathbf{P} z, x \mathbf{P} z)$$

$$\mu(x) - \mu(y) < \mu(y) - \mu(z) \quad (2) \quad (\text{car } (x,y) \in C_2 \text{ et } (y,z) \in C_3)$$

et

$$0.4 [\mu(x) - \mu(z)] \leq \mu(y) - \mu(z) \leq 0.5 [\mu(x) - \mu(z)] \quad (\text{car } 0.4 \leq \frac{\Delta_{\text{att}}(y,z)}{\Delta_{\text{att}}(x,z)} \leq 0.5)$$

$$\text{donc } \mu(y) - \mu(z) \leq 0.5 [\mu(x) - \mu(y) + \mu(y) - \mu(z)]$$

$$\text{donc } \mu(y) - \mu(z) \leq \mu(x) - \mu(y) \quad (3)$$

On constate que (2) et (3) sont contradictoires.

Ce troisième type d'incompatibilité sera appelé « ***inconsistance de type 3*** ».

La détection de ces trois types d'inconsistance fera l'objet du paragraphe suivant, où nous exposerons les différentes procédures (successives) mises au point afin de tester l'information fournie par  $\mathbf{J}$ .

Quant aux traitements des trois types d'inconsistance, ils seront détaillés dans les paragraphes 1.5 et 1.6.

## 1.4. Test de la consistance de l'information préférentielle

Supposons que  $\mathbf{X} = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$ .

Lors du processus interactif de questionnement du décideur  $\mathbf{J}$ , à **chaque modification** des jugements, nous testons si ses réponses sont *consistantes*, c'est-à-dire compatibles avec l'existence d'une représentation numérique obéissant aux règles de mesurage détaillées au paragraphe précédent.

Le test de la consistance des différents types d'information commence par un *prétest* (noté **PRETEST**) afin de

- **détecter** la présence (éventuelle) de **cycles** dans la relation  $\mathbf{P}$

et

- s'il n'y a pas de tels cycles, **permuter les éléments de  $\mathbf{X}$**  de telle sorte que, dans le tableau des jugements, toutes les « cases  $\mathbf{P}$  ou  $C_{ij}$  » sont situées au-dessus de la diagonale principale.

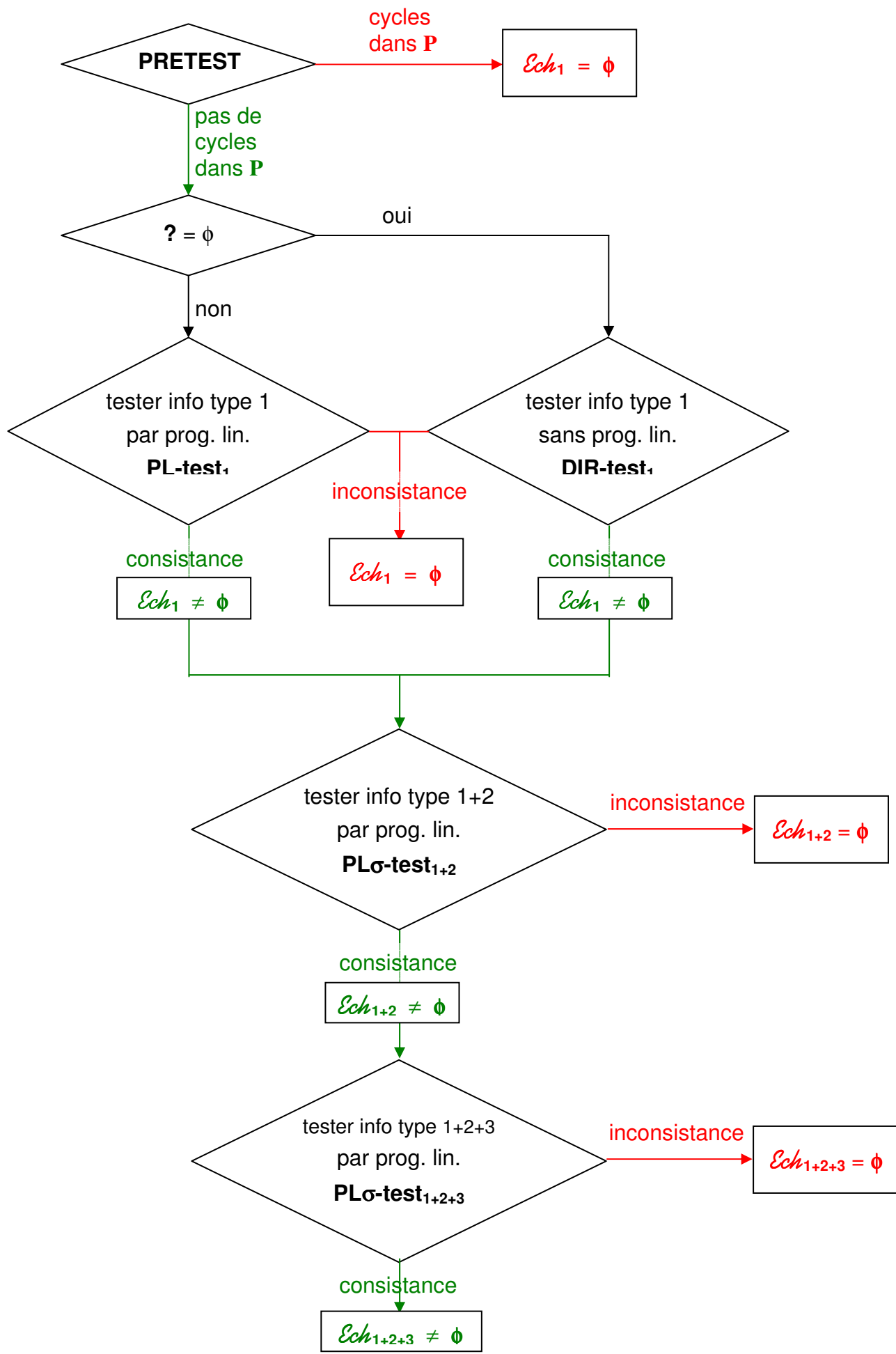
Lorsque ce prétest n'aura pas détecté de cycles dans  $\mathbf{P}$ , nous distinguerons 2 cas pour tester la consistance de l'information de type 1  $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I}, ? \}$  :

- si  $? \neq \phi$  (information préférentielle « incomplète »), nous ferons appel à un programme linéaire de test noté **PL-test<sub>1</sub>**;
- si  $? = \phi$  (information préférentielle « complète »), nous utiliserons une méthode (notée **DIR-test<sub>1</sub>**) qui, non seulement, ne fait pas appel à la programmation linéaire mais, en outre, présente l'avantage de pouvoir être associée à une **visualisation très simple d'un rangement** éventuel dans la représentation des jugements sous forme de tableau.

Lorsque l'information préférentielle de type 1 se sera avérée consistante, on testera la consistance de l'information préférentielle de type 1+2  $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I}, ?, P_e \}$ , à l'aide d'un programme linéaire, que nous noterons **PL $\sigma$ -test<sub>1+2</sub>**.

De même, l'éventuelle inconsistance de l'information préférentielle de type 1+2+3 sera détectée par un programme linéaire, que nous noterons **PL $\sigma$ -test<sub>1+2+3</sub>**.

Cet enchaînement de procédures de tests de l'information préférentielle peut être schématisé comme suit



### 1.4.0. « Prétest » de l'information préférentielle

Notre prétest est basé sur la **propriété** suivante :

soit  $X^* \subset X$  ;

si  $\forall x \in X^*, \exists y \in X^*$  tel que  $x P y$ ,

alors  $\exists x_1, x_2, \dots, x_p \in X^*$  tels que  $x_1 P x_2 P \dots P x_p P x_1$  (cycle)

(évident car  $\#X$  est fini).

Le prétest consiste à chercher une permutation  $\phi : \mathbb{N}_{1,n} \rightarrow \mathbb{N}_{1,n}$  telle que

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_{1,n} : [ i > j \Rightarrow a_{\phi(i)} \not P a_{\phi(j)} ]$$

Pour tenter de permuter les éléments de  $X$ , nous procéderons comme suit :

1°)  $s \leftarrow n$

2°) parmi  $a_1, a_2, \dots, a_s$ , trouver  $a_i$  qui n'est préféré à aucun autre :

si  $a_i$  existe, aller en 3°) ;

sinon, renvoyer FAUX (  $Ech_1 = \phi$ , d'après la propriété ci-dessus) ; terminé.

3°) permuter  $a_i$  et  $a_s$  ;

4°)  $s \leftarrow s - 1$  :

si  $s = 1$ , renvoyer VRAI ; terminé.

sinon, aller en 2°).

Nous avons nommé **PRETEST** cet algorithme de détection de cycles dans  $P$  et de tri des éléments de  $X$ .

Exemple :

supposons que  $X = \{ a_1, a_2, a_3, a_4 \}$  et que  $J$  ait formulé les jugements suivants :

	a1	a2	a3	a4
a1	nulle	tr. faible	?	?
a2		nulle	?	
a3	?	?	nulle	forte
a4	?	fai-mod		nulle

Les termes « tr. faible » en ligne  $a_1$  – colonne  $a_2$  signifient que  $J$  a dit que  $a_1 P a_2$  et que  $(a_1, a_2) \in C_1$ .

Les termes « fai-mod » en ligne  $a_4$  – colonne  $a_2$  signifient que  $J$  a dit que  $a_4 P a_2$  et que  $(a_4, a_2) \in C_{23}$ .

etc...

Après l'application de **TRI**<sub>1</sub>, le tableau des jugements devient :

	a1	a3	a4	a2
a1	nulle	?	?	tr. faible
a3	?	nulle	forte	?
a4	?		nulle	fai-mod
a2		?		nulle

(  $\varphi(1) = 1$      $\varphi(2) = 3$      $\varphi(3) = 4$      $\varphi(4) = 2$  ).

### 1.4.1. Information de type 1

Dans la suite de ce paragraphe 1.4, nous supposons que le **PRETEST** n'a pas détecté de cycles dans **P** et que les éléments de **X** ont été renumérotés de sorte que

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_{1,n} : [ i > j \Rightarrow a_i \not\prec a_j ]$$

(afin d'éviter d'alourdir les notations par l'introduction de la permutation  $\varphi$ ).

L'information de type 1 est consistante si  $Ech_1 \neq \emptyset$ , c'est-à-dire

si  $\exists \mu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall x, y \in \mathbf{X}, [ x \mathbf{P} y \Rightarrow \mu(x) > \mu(y) ] \text{ et } [ x \mathbf{I} y \Rightarrow \mu(x) = \mu(y) ] \quad (1)$$

Nous distinguerons 2 tests de  $[ Ech_1 \neq \emptyset ]$ , selon que l'information de type 1 est complète ou non.

#### 1.4.1.1. Information incomplète de type 1 ( $? \neq \emptyset$ )

Soit le programme linéaire **PL-test**<sub>1</sub>, où

- $d_{\min}$  est une constante strictement positive arbitraire (pour garantir les inégalités **strictes**)
- les variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  représentent les nombres  $\mu(a_1), \mu(a_2), \dots, \mu(a_n)$  qui doivent satisfaire aux conditions (1) pour que  $\mu$  soit une échelle de type 1 :

<b>PL-test</b> <sub>1</sub>	
Variables : $x_1, x_2, \dots, x_n$	
Min $x_1$	
sous	
{	$\forall (a_i, a_j) \in \mathbf{P} \quad x_i - x_j \geq d_{\min}$ $\forall (a_i, a_j) \in \mathbf{I} \quad \text{avec } i < j, \quad x_i - x_j = 0$ $\forall i \in \mathbb{N}_{1,n} \quad x_i \geq 0$

La fonction objectif «  $x_1$  » est évidemment arbitraire.

Il est trivial que :

$$\begin{array}{c} \text{Ech}_1 \neq \phi \\ \Leftrightarrow \\ \text{PL-test}_1 \text{ n'est pas contradictoire} \end{array}$$

Cette méthode brutale de test n'est certes pas la plus élégante mais elle présente l'avantage d'être applicable dans le cas d'une information incomplète ( $? \neq \phi$ ).

1.4.1.2. Information complète de type 1 ( $? = \phi$ )

La proposition suivante nous dit que, lorsque  $? = \phi$  et que les éléments de  $\mathbf{X}$  ont été renumérotés après application du **PRETEST**, il existe un test très simple qui permet de vérifier si  $\mathbf{P} \cup \mathbf{I}$  est un préordre complet sur  $\mathbf{X}$ .

Proposition :

$$\begin{array}{l} \text{Si } \forall i, j \in \mathbb{N}_{1,n} \text{ avec } i < j, (a_i, a_j) \in \mathbf{P} \cup \mathbf{I}, \\ \text{alors} \\ \mathbf{P} \cup \mathbf{I} \text{ est un préordre complet sur } \mathbf{X} \\ \Leftrightarrow \\ \forall i, j \in \mathbb{N}_{1,n} \text{ avec } i < j : [ a_i \mathbf{P} a_j \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall s \leq i, \forall t \geq j, a_s \mathbf{P} a_t \\ \exists s : i \leq s \leq j-1 \text{ et } a_s \mathbf{P} a_{s+1} \end{array} \right\} ] \end{array}$$

En pratique, ceci signifie qu'on dispose d'un rangement lorsque les « cases » du tableau des jugements où figure un «P» forment un « escalier » dont chaque marche s'appuie, au moins en partie, sur la diagonale principale de la matrice (c'est cette méthode de test que nous avons notée **DIR-test**<sub>1</sub> dans notre schéma).

Par exemple :

	a1	a2	a3	a4	a5
a1	I	P	P	P	P
a2		I	I	P	P
a3		I	I	P	P
a4				I	P
a5					I

*rangement*

	a1	a2	a3	a4	a5
a1	I	P	P	P	P
a2		I	I	P	P
a3		I	I	I	P
a4				I	P
a5					I

*pas de rangement  
(semi-ordre)*

Démonstration :

Supposons donc que  $\forall i, j \in \mathbb{N}_{1,n}$  avec  $i < j$ ,  $(a_i, a_j) \in \mathbf{P} \cup \mathbf{I}$  (donc  $\mathbf{?} = \emptyset$ ).

1°) Supposons que  $\mathbf{P} \cup \mathbf{I}$  est un préordre complet sur  $\mathbf{X}$

Soit  $i, j \in \mathbb{N}_{1,n}$  avec  $i < j$  et  $a_i \mathbf{P} a_j$ .

- soient  $s \leq i$  et  $t \geq j$ : on a  $a_s (\mathbf{P} \cup \mathbf{I}) a_i \mathbf{P} a_j (\mathbf{P} \cup \mathbf{I}) a_t$ , donc  $a_s \mathbf{P} a_t$

- démontrons par l'absurde que  $\exists s$  tel que  $i \leq s \leq j-1$  et  $a_s \mathbf{P} a_{s+1}$ .

Supposons que :  $\forall s$  tel que  $i \leq s \leq j-1$ ,  $a_s \not\mathbf{P} a_{s+1}$

donc  $\forall s$  tel que  $i \leq s \leq j-1$ ,  $a_s \mathbf{I} a_{s+1}$

donc  $a_i \mathbf{I} a_j$ : absurde

2°) Supposons que

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_{1,n} \text{ avec } i < j : [ a_i \mathbf{P} a_j \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall s \leq i, \forall t \geq j, a_s \mathbf{P} a_t \\ \exists s : i \leq s \leq j-1 \text{ et } a_s \mathbf{P} a_{s+1} \end{array} \right. ]$$

Soient  $a_i, a_j, a_h \in \mathbf{X}$  (où  $i < j < h$ ).

Démontrons que : [ si  $a_i \mathbf{P} a_j \mathbf{P} a_h$ , alors  $a_i \mathbf{P} a_h$  ] et [ si  $a_i \mathbf{I} a_j \mathbf{I} a_h$ , alors  $a_i \mathbf{I} a_h$  ]

- supposons que  $a_i \mathbf{P} a_j \mathbf{P} a_h$ .

Comme  $a_i \mathbf{P} a_j$  et  $h \geq j$ , on a donc  $a_i \mathbf{P} a_h$ .

- supposons que  $a_i \mathbf{I} a_j \mathbf{I} a_h$ .

On a donc  $a_i \mathbf{I} a_{i+1} \mathbf{I} \dots \mathbf{I} a_{j-1} \mathbf{I} a_j$  (sinon, par hypothèse, on aurait  $a_i \mathbf{P} a_j$ )

De même,  $a_j \mathbf{I} a_{j+1} \mathbf{I} \dots \mathbf{I} a_{h-1} \mathbf{I} a_h$  (sinon, par hypothèse, on aurait  $a_j \mathbf{P} a_h$ )

Démontrons par l'absurde que  $a_i \mathbf{I} a_h$ .

Supposons que  $a_i \mathbf{P} a_h$ .

Par hypothèse, on a donc  $\exists s$  tel que  $i \leq s \leq h-1$  et  $a_s \mathbf{P} a_{s+1}$ .

Si  $s \leq j-1$ , comme  $i \leq s$  et  $j \geq s+1$ , on a donc  $a_i \mathbf{P} a_j$ : absurde.

Si  $j \leq s$ , comme  $j \leq s$  et  $h \geq s+1$ , on a donc  $a_j \mathbf{P} a_h$ : absurde.

□

### 1.4.2. Information de type 1+2

Nous avons vu qu'une échelle de type 1+2 sur  $X$  relative à  $\{P, I, P^e\}$  est une fonction  $\mu : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\forall (x,y) \in I, \quad \mu(x) = \mu(y) \quad (1)$$

$$\forall (x,y) \in P, \quad \mu(x) > \mu(y) \quad (2)$$

$$\forall i, j, s, t \in \mathbb{N}_{1,Q} \text{ avec } i \leq j < s \leq t, \quad \forall (x,y) \in C_{st}, \quad \forall (z,w) \in C_{ij},$$

$$\mu(x) - \mu(y) > \mu(z) - \mu(w) \quad (3)$$

Par défaut, la consistance de l'information est **testée à chaque modification** des jugements. La procédure de vérification peut être décomposée en deux grandes étapes :

- une première étape, que nous avons détaillée ci-avant, où l'on examinera la consistance de la seule information  $\{P, I, ?\}$  ;
- une deuxième étape (si l'information  $\{P, I, ?\}$  est consistante) où l'on tiendra compte de l'information  $P^e$  .

C'est cette deuxième étape que nous allons maintenant expliciter.

Tester l'information de type 1+2 peut se faire à l'aide d'un programme linéaire, que nous noterons **PL-test<sub>1+2</sub>** , où

- $d_{\min}$  est une constante arbitraire  $> 0$  (pour garantir les inégalités **strictes**) ;
- les variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  représentent les nombres  $\mu(a_1), \mu(a_2), \dots, \mu(a_n)$  qui doivent satisfaire aux conditions (1), (2) et (3) pour que  $\mu$  soit une échelle de type 1+2 :

<b>PL-test<sub>1+2</sub></b>	
Variables : $x_1, x_2, \dots, x_n$	
Min $x_1$	
sous	
$\left\{ \begin{array}{l} \forall (a_p, a_r) \in I \text{ avec } p < r, \\ \forall i, j \in \mathbb{N}_{1,Q} \text{ avec } i \leq j, \quad \forall (a_p, a_r) \in C_{ij}, \\ \forall i, j, s, t \in \mathbb{N}_{1,Q} \text{ avec } i \leq j < s \leq t, \\ \quad \quad \quad \forall (a_p, a_r) \in C_{ij}, \quad \forall (a_u, a_v) \in C_{st}, \\ \forall i \in \mathbb{N}_{1,n}, \end{array} \right.$	$x_p - x_r = 0 \quad (t1)$ $x_p - x_r \geq d_{\min} \quad (t2)$ $x_u - x_v \geq x_p - x_r + d_{\min} \quad (t3)$ $x_i \geq 0$

Remarquons que les contraintes de positivité des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dans **PL-test**<sub>1</sub> et **PL-test**<sub>1+2</sub> ne nuisent en rien à la généralité des tests, étant donné que toutes les contraintes vraies ne font intervenir ces variables que par l'intermédiaire des différences de deux de celles-ci et pourront donc toujours s'écrire sous la forme

$$[\text{fonction linéaire des } (x_i - x_j)] \leq \text{constante} \quad (\text{ou } \dots = \text{constante})$$

Cependant, ce n'est pas **PL-test**<sub>1+2</sub> que nous utilisons pour tester la consistance de l'information de type 1+2, mais un autre programme linéaire que nous présenterons plus loin, basé sur des conditions (dites « à seuils ») équivalentes aux conditions de mesurage (1), (2) et (3).

Nous allons maintenant énoncer ces conditions « à seuils » et montrer en quoi elles peuvent permettre d'élaborer un test plus « efficace » que celui que nous venons de présenter.

#### 1.4.2.1. Conditions de mesurage « à seuils »

Lemme : soit  $\mu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{l} \mu \text{ satisfait aux conditions (1), (2) et (3)} \\ \Leftrightarrow \\ \exists Q \text{ « seuils » } 0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_Q \text{ tels que} \\ \forall (x, y) \in \mathbf{I}, \mu(x) = \mu(y) \quad (1) \\ \forall i, j \in \mathbb{N}_{1, Q} \text{ avec } i \leq j, \quad \forall (x, y) \in C_{ij}, \quad \sigma_i < \mu(x) - \mu(y) \quad (2') \\ \forall i, j \in \mathbb{N}_{1, Q-1} \text{ avec } i \leq j, \quad \forall (x, y) \in C_{ij}, \quad \mu(x) - \mu(y) < \sigma_{j+1} \quad (3') \end{array}$$

Démonstration :

$\Leftarrow$  est triviale ;

$\Rightarrow$  est un peu moins évidente puisqu'il faut préciser les seuils  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_Q$  :

Supposons que  $\mathbf{P} \neq \emptyset$  et  $\mathbf{P}^e \neq \emptyset$  (sinon, il n'y a rien à démontrer).

Soit  $i_0 = \min \{ i \in \mathbb{N}_{1, Q} \mid \exists j \text{ avec } C_{ij} \neq \emptyset \}$ .

Prenons  $\sigma_{i_0} = \frac{1}{2} \min \{ \mu(x) - \mu(y) \mid j \geq i_0 \text{ et } (x, y) \in C_{i_0 j} \}$

(on a bien  $\sigma_{i_0} > 0$  puisque  $\mathbf{P}$  est fini et non vide) .

Prenons,  $\forall 1 \leq i < i_0, \sigma_i = \frac{i}{i_0} \sigma_{i_0}$

(donc  $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{i_0}$ ).

Soit  $\varepsilon = \frac{1}{Q} \min \{ \mu(x) - \mu(y) - \mu(z) + \mu(w) \mid ((x,y),(z,w)) \in P^e \}$

$\forall i \in \{ i_0, \dots, Q \}$ , notons

$$G_i = \{ \mu(x) - \mu(y) \mid i_0 \leq j \leq i \text{ et } (x,y) \in C_{ji} \}$$

$$D_i = \{ \mu(x) - \mu(y) \mid i \leq j \leq Q \text{ et } (x,y) \in C_{ij} \}$$

Pour  $i = i_0 + 1, \dots, Q$ , faire :

Si  $G_{i-1} \neq \emptyset$  et  $D_i \neq \emptyset$ , prendre  $\sigma_i = \frac{1}{2} (\max G_{i-1} + \min D_i)$

Si  $G_{i-1} \neq \emptyset$  et  $D_i = \emptyset$ , prendre  $\sigma_i = \max G_{i-1} + \varepsilon$

Si  $G_{i-1} = \emptyset$  et  $D_i \neq \emptyset$ , prendre  $\sigma_i = \min D_i - \varepsilon$

Si  $G_{i-1} = \emptyset$  et  $D_i = \emptyset$ , prendre  $\sigma_i = \sigma_{i-1} + \varepsilon$

□

### Pourquoi utiliser les seuils ?

Lorsqu'on décide d'utiliser les seuils  $\sigma_i$ , il faut compléter les inéquations (2') et (3') par  $Q$  inéquations supplémentaires garantissant que

$$0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_Q \quad (4')$$

Cependant, comme nous allons le voir, cette petite augmentation du nombre de contraintes sera largement « compensée ».

Supposons que  $\# C_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  (pour ne pas alourdir les notations),  
notons  $r_i = \# C_i \quad \forall i \in \mathbb{N}_{1,Q}$

et calculons le nombre d'inéquations (2), (3), (2') et (3') :

« sans seuils »	« avec seuils »
$\sum_{i=1}^Q r_i$ inéquations (2)	$\sum_{i=1}^Q r_i$ inéquations (2')
$\sum_{i=1}^{Q-1} r_i \sum_{j=i+1}^Q r_j$ inéquations (3)	$\sum_{j=1}^{Q-1} r_j$ inéquations (3')
	$Q$ inéquations (4')

Si l'on suppose que  $\forall i \in \mathbb{N}_{1,Q}, r_i > 0$ ,

le nombre d'inéquations (3) peut être réduit, sans restriction, à  $\sum_{i=1}^{Q-1} r_i r_{i+1}$ , en ne considérant que les inégalités relatives aux catégories voisines.

Nous en avons tenu compte dans l'exemple suivant :

si  $Q = 6$  ,  $n = 9$  ,  $r_1 = r_2 = \dots = r_6 = 6$  ,  
on aura,

- d'une part, 216 inéquations (2) et (3)
- d'autre part, 72 inéquations (2'), (3') et (4').

Même si la formulation "à seuils" nécessite l'utilisation de 6 variables supplémentaires (5 suffiraient), le gain important en termes de nombre de contraintes est évident. Aussi, nous préférons utiliser systématiquement ces  $Q$  « seuils » dans les différents programmes linéaires que nous envisagerons dans la suite.

#### 1.4.2.2. Test de l'information de type 1+2

Le programme linéaire **PL $\sigma$ -test<sub>1+2</sub>**, basé sur les conditions de mesurage (1), (2') et (3'), est le suivant :

<b>PL<math>\sigma</math>-test<sub>1+2</sub></b>	
Variables : $x_1, x_2, \dots, x_n, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_Q$	
Min $x_1$	
sous	
$\forall (a_p, a_r) \in \mathbf{I}$ avec $p < r$ ,	$x_p - x_r = 0$ <span style="float: right;">(t1)</span>
$\forall i, j \in \mathbf{IN}_{1,Q}$ avec $i \leq j$ , $\forall (a_p, a_r) \in C_{ij}$ ,	$\sigma_i + d_{\min} \leq x_p - x_r$ <span style="float: right;">(t2')</span>
$\forall i, j \in \mathbf{IN}_{1,Q-1}$ avec $i \leq j$ , $\forall (a_p, a_r) \in C_{ij}$ ,	$x_p - x_r \leq \sigma_{j+1} - d_{\min}$ <span style="float: right;">(t3')</span>
	$d_{\min} \leq \sigma_1$ <span style="float: right;">(t4')</span>
$\forall i \in \mathbf{IN}_{2,Q}$ ,	$\sigma_{i-1} + d_{\min} \leq \sigma_i$ <span style="float: right;">(t5')</span>
$\forall i \in \mathbf{IN}_{1,n}$ ,	$x_i \geq 0$
$\forall i \in \mathbf{IN}_{1,Q}$ ,	$\sigma_i \geq 0$

Il est trivial que

$Ech_{1+2} \neq \emptyset$
$\Leftrightarrow$
PL $\sigma$ -test <sub>1+2</sub> n'est pas contradictoire

Les contraintes (t5') garantissent les inégalités **strictes** figurant dans les conditions

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_{1,Q} \text{ avec } i \leq j, \quad \forall (x,y) \in C_{ij}, \quad \sigma_i < \mu(x) - \mu(y) \quad (2')$$

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_{1,Q-1} \text{ avec } i \leq j, \quad \forall (x,y) \in C_{ij}, \quad \mu(x) - \mu(y) < \sigma_{j+1} \quad (3')$$

puisque  $d_{\min} > 0$ .

### 1.4.3. Information de type 1+2+3

Soit le programme linéaire **PL $\sigma$ -test<sub>1+2+3</sub>**, où  $d_{\min}$  est une constante strictement positive arbitraire :

<b>PL<math>\sigma</math>-test<sub>1+2+3</sub></b>	
Variables : $x_1, x_2, \dots, x_n, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_Q$	
Min $x_1$	
sous	
{	$\forall (a_p, a_r) \in \mathbf{I} \text{ avec } p < r, \quad x_p - x_r = 0 \quad (t1)$
{	$\forall i, j \in \mathbb{N}_{1,Q} \text{ avec } i \leq j, \forall (a_p, a_r) \in C_{ij}, \quad \sigma_i + d_{\min} \leq x_p - x_r \quad (t2')$
{	$\forall i, j \in \mathbb{N}_{1,Q-1} \text{ avec } i \leq j, \forall (a_p, a_r) \in C_{ij}, \quad x_p - x_r \leq \sigma_{j+1} - d_{\min} \quad (t3')$
{	$d_{\min} \leq \sigma_1 \quad (t4')$
{	$\forall i \in \mathbb{N}_{2,Q}, \quad \sigma_{i-1} + d_{\min} \leq \sigma_i \quad (t5')$
{	$\forall ((a_r, a_s), (a_t, a_u), (\alpha, \beta)) \in \mathbf{R}^b, \quad \alpha (x_t - x_u) \leq x_r - x_s \leq \beta (x_t - x_u) \quad (t6)$
{	$\forall i \in \mathbb{N}_{1,n}, \quad x_i \geq 0$
{	$\forall i \in \mathbb{N}_{1,Q}, \quad \sigma_i \geq 0$

Il est trivial que

$Ech_{1+2+3} \neq \emptyset$
$\Leftrightarrow$
PL $\sigma$ -test <sub>1+2+3</sub> n'est pas contradictoire

## 1.5. Traitement des inconsistances de type 1+2

Dans les paragraphes précédents, nous avons précisé les différents types d'*inconsistance* que l'on peut détecter dans les réponses du décideur lors du processus interactif d'interrogation, si l'on exige que ses jugements soient compatibles avec une représentation numérique obéissant à certaines règles assez intuitives ("*conditions de mesurage*").

Une fois ces inconsistances détectées, il est important de montrer au décideur pourquoi ses jugements sont inconsistants et de lui *suggérer* des modifications qui pourraient les rendre « *consistants* ».

Nous envisagerons, dans ce paragraphe, le traitement des **inconsistances** qui sont « **de type 1 ou de type 2** », sans distinction, c'est-à-dire des cas où  $Ech_{1+2} = \phi$ . Nous dirons dans la suite qu'il s'agit d'**inconsistances** « **de type 1+2** ».

Les inconsistances de type 3 seront, elles, abordées dans le paragraphe suivant.

Lorsque  $Ech_{1+2} = \phi$ , il convient de montrer au décideur (dans cet ordre ou non) :

- un ou plusieurs systèmes de contraintes que ses jugements rendent incompatibles,
- une ou plusieurs modification(s) de ces jugements qui rendrai(en)t le programme **PL $\sigma$ -test $_{1+2}$**  non contradictoire.

### 1.5.1. Systèmes de contraintes incompatibles

Supposons que PL $\sigma$ -test $_{1+2}$  soit contradictoire,

ou, autrement dit, que  $Ech_{1+2} = \phi$ ,

ou, autrement dit, que le système d'inéquations suivant soit incompatible

(variables  $x_1, x_2, \dots, x_n, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_Q$  positives ou nulles) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall (a_p, a_r) \in \mathbf{I} \quad \text{avec } p < r, & x_p - x_r = 0 \quad (t1) \\ \forall i, j \in \mathbf{IN}_{1,Q} \quad \text{avec } i \leq j, \forall (a_p, a_r) \in C_{ij}, & \sigma_i < x_p - x_r \quad (t2') \\ \forall i, j \in \mathbf{IN}_{1,Q-1} \quad \text{avec } i \leq j, \forall (a_p, a_r) \in C_{ij}, & x_p - x_r < \sigma_{j+1} \quad (t3') \\ 0 < \sigma_1 & (t4') \\ \forall i \in \mathbf{IN}_{2,Q}, \quad \sigma_{i-1} < \sigma_i & (t5') \end{array} \right.$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} > \mathbf{0} \quad (\text{en regroupant les contraintes (t2')}) \\ \mathbf{D} \cdot \mathbf{X} > \mathbf{0} \quad (\text{en regroupant les contraintes (t3')}) \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} > \mathbf{0} \quad (\text{en regroupant les contraintes (t4') et (t5')}) \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (\text{en regroupant les contraintes (t1)}) \end{array} \right.$$

$$\text{où } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_Q \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p_1 \times (n+Q)} \quad (\text{où } p_1 \text{ est le nombre de contraintes (t2')}), \\ \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p_2 \times (n+Q)}, \quad (\text{où } p_2 \text{ est le nombre de contraintes (t3')}), \\ \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{p_3 \times (n+Q)}, \quad (\text{où } p_3 \text{ est le nombre de contraintes (t4') et (t5')}), \\ \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{r \times (n+Q)}, \quad (\text{où } r \text{ est le nombre de contraintes (t1)}). \end{array}$$

Remarque : si  $r = 0$ , on pourra considérer dans la suite que  $\mathbf{B} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{1 \times (n+Q)}$ , sans perte de généralité.

Notons  $\mathbf{A}$  la matrice  $\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times (n+Q)}$  ( $p = p_1 + p_2 + p_3$ ).

Notre système s'écrit plus simplement

$$\mathbf{S} \begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} > \mathbf{0} & (\text{en regroupant les contraintes (t2'), (t3'), (t4') et (t5')}) \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0} & (\text{en regroupant les contraintes (t1)}) \end{cases}$$

Pour détecter les incompatibilités entre les contraintes (t1), (t2'), (t3'), (t4') et (t5') et proposer des corrections éventuelles, nous allons appliquer un corollaire d'une des versions du **théorème de l'alternative**, qu'on pourra trouver en annexe :

Soit  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times m}$   
et  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{r \times m}$   
avec  $p, m \geq 1$ .

Alors,

ou bien le système  $\begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} > \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0} \end{cases}$  admet une solution  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$

ou bien il existe  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}^r$  avec  $\mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{Y} \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{V} \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{W} \geq \mathbf{0}$   
tels que

$${}^t\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} + {}^t\mathbf{B} \cdot (\mathbf{V} - \mathbf{W}) = \mathbf{0} \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}_{1,r}, \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{W}_i = 0$$

L'intérêt de ce corollaire par rapport au théorème énoncé dans l'annexe est que les vecteurs  $Y$ ,  $V$  et  $W$  sont à composantes positives ou nulles: ceci nous permet d'utiliser la programmation linéaire pour arriver à nos fins. Mais avant de détailler notre approche de manière générale, il nous paraît utile de l'illustrer par un petit exemple.

### 1.5.2. Exemple

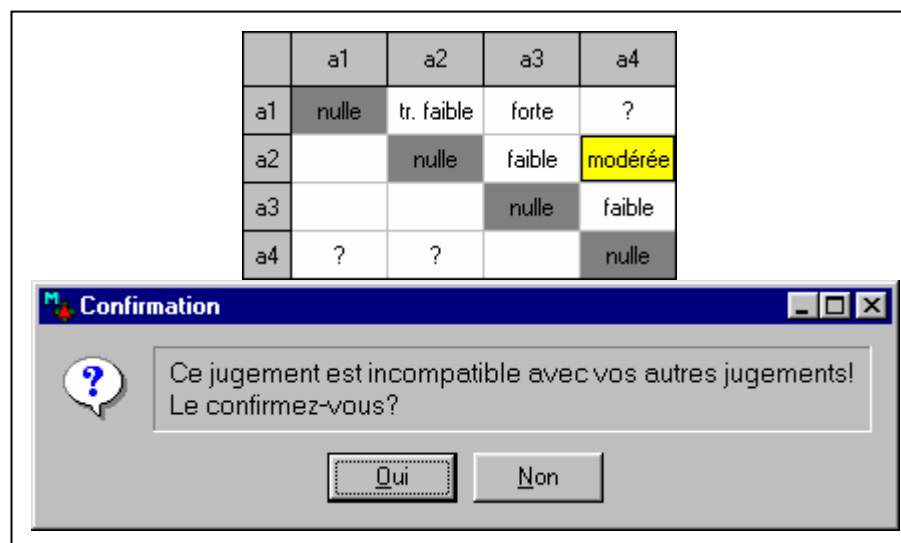
Supposons que  $X = \{ a_1, a_2, a_3, a_4 \}$  et que  $J$  ait formulé les jugements suivants :

	a1	a2	a3	a4
a1	nulle	tr. faible	forte	?
a2		nulle	faible	?
a3			nulle	faible
a4	?	?		nulle

Supposons que  $J$  ajoute que  $a_2 P a_4$  et que  $(a_2, a_4) \in C_3$  (« la différence d'attractivité entre  $a_2$  et  $a_4$  est modérée »).

**PLtest<sub>1</sub>** n'est pas contradictoire : les jugements sont compatibles avec un rangement .

**PLtest<sub>1+2</sub>** est contradictoire : notre logiciel signale à  $J$  que ses jugements sont « inconsistants ».



Supposons maintenant que  $J$  confirme son jugement. Il faut donc:

- |                        |      |                        |      |
|------------------------|------|------------------------|------|
| $\sigma_1 < X_1 - X_2$ | (1)  | $X_1 - X_2 < \sigma_2$ | (2)  |
| $\sigma_2 < X_2 - X_3$ | (3)  | $X_2 - X_3 < \sigma_3$ | (4)  |
| $\sigma_2 < X_3 - X_4$ | (5)  | $X_3 - X_4 < \sigma_3$ | (6)  |
| $\sigma_3 < X_2 - X_4$ | (7)  | $X_2 - X_4 < \sigma_4$ | (8)  |
| $\sigma_4 < X_1 - X_3$ | (9)  | $X_1 - X_3 < \sigma_5$ | (10) |
| $0 < \sigma_1$         | (11) | $\sigma_1 < \sigma_2$  | (12) |
| $\sigma_2 < \sigma_3$  | (13) | $\sigma_3 < \sigma_4$  | (14) |
| $\sigma_4 < \sigma_5$  | (15) | $\sigma_5 < \sigma_6$  | (16) |

$$\begin{array}{llll}
\text{ou encore} & x_1 - x_2 - \sigma_1 > 0 & (1) & -x_1 + x_2 + \sigma_2 > 0 & (2) \\
& x_2 - x_3 - \sigma_2 > 0 & (3) & -x_2 + x_3 + \sigma_3 > 0 & (4) \\
& x_3 - x_4 - \sigma_2 > 0 & (5) & -x_3 + x_4 + \sigma_3 > 0 & (6) \\
& x_2 - x_4 - \sigma_3 > 0 & (7) & -x_2 + x_4 + \sigma_4 > 0 & (8) \\
& x_1 - x_3 - \sigma_4 > 0 & (9) & -x_1 + x_3 + \sigma_5 > 0 & (10) \\
& \sigma_1 > 0 & (11) & \sigma_2 - \sigma_1 > 0 & (12) \\
& \sigma_3 - \sigma_2 > 0 & (13) & \sigma_4 - \sigma_3 > 0 & (14) \\
& \sigma_5 - \sigma_4 > 0 & (15) & \sigma_6 - \sigma_5 > 0 & (16)
\end{array}$$

ou encore, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} > 0$$

qu'on peut noter  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} > \mathbf{0}$

Comme nous savons que ce système n'a pas de solution, d'après le corollaire du théorème de l'alternative vu en 1.5.1,

il existe nécessairement  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{16}$  ( $\mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{Y} \geq \mathbf{0}$ ) tel que  ${}^t\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{0}$

Autrement dit, il existe des réels positifs ou nuls (mais non tous nuls)  $y_1, y_2, \dots, y_{16}$  tels que

$$\sum_{i=1}^{16} y_i \cdot \text{Col}_i = 0 \quad (\text{où } \text{Col}_i \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de la matrice } {}^t\mathbf{A})$$

On constate, en effet, qu'il suffit de prendre

$$y_2 = y_5 = y_8 = y_9 = 1 \quad \text{et} \quad y_1 = y_3 = y_4 = y_6 = y_7 = y_{10} = y_{11} = y_{12} = y_{13} = y_{14} = y_{15} = y_{16} = 0 :$$

$$\begin{array}{cccccc}
 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & +1. & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & +1. & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & +1. & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{Col}_2 & & \text{Col}_5 & & \text{Col}_8 & & \text{Col}_9 & & & 
 \end{array}$$

Ces 4 vecteurs correspondent aux 4 contraintes (2), (5), (8) et (9) ci-dessus:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_4 > x_2 - x_4 \quad (8) \\ x_1 - x_3 > \sigma_4 \quad (9) \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 - x_3 > x_2 - x_4 \quad (*)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_2 > x_1 - x_2 \quad (2) \\ x_3 - x_4 > \sigma_2 \quad (5) \end{array} \right\} \Rightarrow x_3 - x_4 > x_1 - x_2 \quad (**)$$

Sommer (\*) et (\*\*) membre à membre amène à la contradiction

$$x_1 - x_4 > x_1 - x_4$$

Cette idée de "détection algébrique" de systèmes de contraintes incompatibles a été présentée pour la première fois dans [Mousset C., Vansnick J.-C., à paraître].

L'incompatibilité entre (\*) et (\*\*) est présentée comme suit dans notre logiciel :

Exemple				
Problèmes	Diff.	Couples	Couples	Diff.
1	forte	a1 - a3 >	a2 - a4	modérée
	faible	a3 - a4 >	a1 - a2	tr. faible

On constate que le problème disparaît si

$$(a_1, a_3) \in C_3 \text{ au lieu de } C_4 \quad ( (*) \text{ disparaît } )$$

$$\text{ou } (a_2, a_4) \in C_4 \text{ au lieu de } C_3 \quad ( (*) \text{ disparaît } )$$

$$\text{ou } (a_3, a_4) \in C_1 \text{ au lieu de } C_2 \quad ( (**) \text{ disparaît } )$$

$$\text{ou } (a_1, a_2) \in C_2 \text{ au lieu de } C_1 \quad ( (**) \text{ disparaît } ) .$$

Remarquons qu'aucune modification du jugement «  $(a_2, a_3) \in C_2$  » ne permettrait d'éliminer l'incompatibilité mise en évidence ci-dessus.

Si **J** confirme son jugement ( différence d'attractivité modérée entre  $a_2$  et  $a_4$  ), le logiciel calcule le nombre de possibilités qu'il a de rendre ses jugements consistants en un nombre « minimum » de modifications :

### Jugements inconsistants

Macbeth a trouvé **4** possibilité(s) de rendre la matrice des jugements consistante par **1** changement(s) de catégorie.

(nous préciserons plus loin ce qu'il faut entendre par « nombre minimum » de modifications et « 1 changement de catégorie »)

Les « suggestions » de modifications sont présentées dans le tableau des jugements :

	a1	a2	a3	a4
a1	nulle	tr. faible	forte	?
a2		nulle	faible	modérée
a3			nulle	faible
a4	?			nulle

→ suggère de remplacer le jugement  $(a_1, a_3) \in C_4$  par le jugement  $(a_1, a_3) \in C_3$  ;

	a1	a2	a3	a4
a1	nulle	tr. faible	forte	?
a2		nulle	faible	modérée
a3			nulle	faible
a4	?			nulle

→ suggère de remplacer le jugement  $(a_2, a_4) \in C_3$  par le jugement  $(a_2, a_4) \in C_4$  ;

	a1	a2	a3	a4
a1	nulle	tr. faible	forte	?
a2		nulle	faible	modérée
a3			nulle	faible
a4	?			nulle

→ suggère de remplacer le jugement  $(a_3, a_4) \in C_2$  par le jugement  $(a_3, a_4) \in C_1$  ;

	a1	a2	a3	a4
a1	nulle	tr. faible	forte	?
a2		nulle	faible	modérée
a3			nulle	faible
a4	?			nulle

→ suggère de remplacer le jugement  $(a_1, a_2) \in C_1$  par le jugement  $(a_1, a_2) \in C_2$  .

Nous allons expliciter, dans la suite de ce paragraphe, les différentes étapes de notre recherche de « suggestions ».

### 1.5.3. Contraintes génératrices d'inconsistance

La première étape consiste à rechercher les contraintes (t1), (t2') et (t3') qui sont « à l'origine des **incompatibilités** » existant dans le système

$$S \begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} > \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{voir 1.5.1})$$

Nous considérerons qu'une contrainte est « à l'origine d'une incompatibilité » lorsqu'elle fait partie d'un système S'

- qui est un « sous-système » de S ,
- qui est incompatible ,
- qui ne contient pas de « sous-système » incompatible.

Mathématiquement, on peut traduire cette idée par la définition suivante :

On appelle " **système élémentaire incompatible** " (noté SEI ) un système

$$S' \begin{cases} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{X} > \mathbf{0} \\ \mathbf{B}' \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{tel que}$$

1°)  $\mathbf{A}' \in \mathbb{R}^{p' \times (n+Q)}$  est une sous-matrice de  $\mathbf{A}$ ,

$\mathbf{B}' \in \mathbb{R}^{r' \times (n+Q)}$  est une sous-matrice de  $\mathbf{B}$

2°) S' est incompatible

3°) si  $\begin{cases} \mathbf{A}'' \in \mathbb{R}^{p'' \times (n+Q)} \text{ est une sous-matrice de } \mathbf{A}', \\ \mathbf{B}'' \in \mathbb{R}^{r'' \times (n+Q)} \text{ est une sous-matrice de } \mathbf{B}', \\ p'' + r'' < p' + r' \end{cases}$

alors le système  $S'' \begin{cases} \mathbf{A}'' \cdot \mathbf{X} > \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'' \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0} \end{cases}$  est compatible

Il nous faut donc rechercher toutes les équations (t1) et inéquations (t2') et (t3') qui font partie d'un SEI.

Comme on peut le constater, nous ne cherchons pas à déterminer tous les systèmes de contraintes incompatibles que l'on peut extraire des contraintes de  $PL\sigma\text{-test}_{1+2}$  . Nous nous contentons de rechercher tous les jugements du type «  $(a_s, a_t) \in C_{ij}$  » qui « engendrent » une incompatibilité. Nous verrons plus loin ce que nous ferons de ces jugements.

Nous avons vu qu'il y a « inconsistance de type 2 » lorsque le système  $S \begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} > \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0} \end{cases}$  est incompatible, ce qui revient à dire que

$$\exists \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^p, \mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}^r \text{ tels que } \begin{cases} {}^t\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} + {}^t\mathbf{B} \cdot (\mathbf{V} - \mathbf{W}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{Y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{V} \geq \mathbf{0}, \mathbf{W} \geq \mathbf{0} \\ \forall i \in \mathbb{N}_{1,r}, \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{W}_i = 0, \\ \exists i_0 \in \mathbb{N}_{1,p} \text{ tel que } \mathbf{Y}_{i_0} \neq 0. \end{cases}$$

Dans un tel cas, si  $i_0 \leq p_1 + p_2$ ,  
(où  $p_1$  est le nombre de contraintes (t2') et  $p_2$  est le nombre de contraintes (t3'), voir page 41),  
il lui correspond une contrainte de la forme  $x_s - x_t < \sigma_j$  ou  $x_s - x_t > \sigma_j$ .

Considérons alors le système **Syst- $\mathbf{Y}_i$**  suivant (avec  $i \leq p_1 + p_2$ ) :

$$\mathbf{Syst-}\mathbf{Y}_i \begin{cases} {}^t\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} + {}^t\mathbf{B} \cdot (\mathbf{V} - \mathbf{W}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_i = 1 \end{cases}$$

- si **Syst- $\mathbf{Y}_i$**  est **compatible**, il correspond, à une de ses solutions, un système de contraintes (t1), (t2'), (t3'), (t4') et (t5') incompatibles dont une au moins (celle qui correspond à  $\mathbf{Y}_i = 1$ ) est de la forme  $x_s - x_t < \sigma_j$  ou  $x_s - x_t > \sigma_j$  et fait partie d'un SEI ;
- si **Syst- $\mathbf{Y}_i$**  est **incompatible**, nous savons que la contrainte correspondant à  $\mathbf{Y}_i$  ne fait partie d'**aucun** SEI.

Pour trouver toutes les contraintes (t2') et (t3') qui font partie d'un SEI, il nous suffira d'étudier la compatibilité de tous les systèmes **Syst- $\mathbf{Y}_i$** , pour  $i = 1, 2, \dots, p_1 + p_2$ .

On procédera de manière analogue, en utilisant des systèmes **Syst- $\mathbf{V}_i$**  et **Syst- $\mathbf{W}_i$** , pour trouver toutes les contraintes (t1) qui font partie d'un SEI :

$$\mathbf{Syst-}\mathbf{V}_i \begin{cases} {}^t\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} + {}^t\mathbf{B} \cdot (\mathbf{V} - \mathbf{W}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{W}_i = 0 \\ \mathbf{V}_i = 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{Syst-}\mathbf{W}_i \begin{cases} {}^t\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} + {}^t\mathbf{B} \cdot (\mathbf{V} - \mathbf{W}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_i = 0 \\ \mathbf{W}_i = 1 \end{cases}$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'examiner **tous** les systèmes **Syst- $\mathbf{Y}_i$** , **Syst- $\mathbf{V}_i$**  et **Syst- $\mathbf{W}_i$**  :

- si **Syst-Y<sub>i</sub>** est compatible et a pour solution **Y, V, W** , alors
  - $\forall j > i$  tel que  $Y_j \neq 0$ , **Syst-Y<sub>i</sub>** est compatible ;
  - $\forall j \in \mathbb{N}_{1,r}$  tel que  $v_j \neq 0$ , **Syst-V<sub>i</sub>** est compatible ;
  - $\forall j \in \mathbb{N}_{1,r}$  tel que  $w_j \neq 0$ , **Syst-W<sub>i</sub>** est compatible ;
- si **Syst-V<sub>i</sub>** est compatible et a pour solution **Y, V, W** , alors
  - $\forall j > i$  tel que  $V_j \neq 0$ , **Syst-V<sub>i</sub>** est compatible ;
  - $\forall j \in \mathbb{N}_{1,r}$  tel que  $W_j \neq 0$ , **Syst-W<sub>i</sub>** est compatible ;
- si **Syst-W<sub>i</sub>** est compatible et a pour solution **Y, V, W** , alors
  - $\forall j > i$  tel que  $W_j \neq 0$ , **Syst-W<sub>i</sub>** est compatible .

C'est pour cette raison que nous avons utilisé un « vecteur-témoin »  $Z \in \mathbb{N}^{p_1+p_2+2r}$ , initialement nul , qu'on mettra à jour comme suit :

- pour toute solution **Y, V, W** d'un système **Syst-Y<sub>i</sub>, Syst-V<sub>i</sub>** ou **Syst-W<sub>i</sub>** ,
  - faire :  $\forall j \in \mathbb{N}_{1,p_1+p_2}$  , [  $Y_j \neq 0 \Rightarrow Z_j = 1$  ]
  - $\forall j \in \mathbb{N}_{1,r}$  , [  $V_j \neq 0 \Rightarrow Z_{p_1+p_2+j} = 1$  ] et [  $W_j \neq 0 \Rightarrow Z_{p_1+p_2+r+j} = 1$  ]

Pour trouver les couples qui nous intéressent, nous devons donc étudier la compatibilité de [ **au plus**  $p_1 + p_2 + 2r$  ] systèmes. L'algorithme général de recherche des équations (t1) et inéquations (t2') et (t3') qui font partie d'un SEI est le suivant :

$Z = (0, 0, \dots, 0)$

pour  $i = 1, 2, \dots, p_1+p_2$ , faire :

si  $Z_i = 0$  ,

alors 

si	<b>Syst-Y<sub>i</sub></b> compatible et <b>Y, V, W</b> solution de <b>Syst-Y<sub>i</sub></b> ,
alors	mettre <b>Z</b> à jour

pour  $i = 1, 2, \dots, r$ , faire :

si  $Z_{p_1+p_2+i} = 0$  ,

alors 

si	<b>Syst-V<sub>i</sub></b> compatible et <b>Y, V, W</b> solution de <b>Syst-V<sub>i</sub></b>
alors	mettre <b>Z</b> à jour

pour  $i = 1, 2, \dots, r$  faire :

si  $Z_{p_1+p_2+r+i} = 0$  ,

alors 

si	<b>Syst-W<sub>i</sub></b> compatible et <b>Y, V, W</b> solution de <b>Syst-W<sub>i</sub></b>
alors	mettre <b>Z</b> à jour

On obtient, de cette façon, l'ensemble de toutes les équations et inéquations qui composent les SEI.

**Remarque** : pour vérifier la compatibilité (ou l'incompatibilité) d'un système **Syst-Y<sub>i</sub>**, et pour, en cas de compatibilité, en trouver une solution, nous avons choisi d'utiliser le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{l} \text{Max } Y_i \\ \text{sous } \left\{ \begin{array}{l} {}^t\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} + {}^t\mathbf{B} \cdot (\mathbf{V} - \mathbf{W}) = \mathbf{0} \\ Y_i \leq 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Si **PL-Y<sub>i</sub>** est contradictoire, alors le système **Syst-Y<sub>i</sub>** est incompatible ; sinon, alors **Syst-Y<sub>i</sub>** est compatible et la solution optimale de **PL-Y<sub>i</sub>** est une solution de **Syst-Y<sub>i</sub>**.

De la même façon, des programmes linéaires ont été associés aux systèmes **Syst-V<sub>i</sub>** et **Syst-W<sub>i</sub>**.

#### 1.5.4. Augmentation – diminution d'un jugement de p catégories

Dans ce paragraphe, nous commencerons par préciser les notions de

- « changement **d'un** jugement de p catégories » (qui correspond intuitivement à « augmenter » ou « diminuer » la différence d'attractivité) et de
- « modification **des** jugements de m catégories », qui sont des combinaisons de « changements ».

La deuxième étape de notre recherche consiste à déterminer, pour chacun des jugements trouvés lors de la première étape, le type de changement qu'il faudrait lui appliquer pour « contribuer » éventuellement à rendre les jugements consistants.

##### 1.5.4.1. Préliminaires

Notations : on représentera

- le jugement «  $(x,y) \in C_{ij}$  » par l'élément  $(x, y, i, j)$  de  $\mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathbb{N}_{1,Q} \times \mathbb{N}_{1,Q}$
- le jugement «  $(x,y) \in \mathbf{I}$  » par l'élément  $(x, y, 0, 0)$  de  $\mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathbb{N}_{1,Q} \times \mathbb{N}_{1,Q}$

##### Définitions

- 1) On appelle « **diminution du jugement (s, t, i, j) de p catégories** » ( $1 \leq p \leq Q+i$ ) le remplacement de ce jugement
  - par le jugement  $(s, t, i-p, i-p)$  si  $i \geq p$
  - par le jugement  $(t, s, p-i, p-i)$  si  $i < p$

- 2) On appelle « **augmentation du jugement (s, t, i, j) de p catégories** » ( $1 \leq p \leq Q-j$ ) le remplacement de ce jugement par le jugement (s, t, j+p, j+p) .
- 3) On appelle « **changement du jugement (s, t, i, j) de p catégories** » une augmentation ou une diminution de ce jugement de p catégories.

Remarque : il est évident qu'on obtient le même jugement final comme résultat  
d' « 1 diminution d'un jugement de p catégories »  
ou  
de « p diminutions successives d'un jugement de 1 catégorie »

Convention :

on représentera un « **changement du jugement (s, t, i, j) de p catégories** »  
par un élément  $(s, t, i, j, p) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathbb{N}_{1,Q} \times \mathbb{N}_{1,Q} \times \mathbf{Z}$   
(augmentation si  $p > 0$ , diminution si  $p < 0$ ).

1.5.4.2. Exploitation des contraintes des SEI (voir 1.5.3)

Rappelons que

- si  $Z_i > 0$ , il lui correspond une contrainte (t2') ou (t3') ou (t1) qui fait partie d'un SEI ;
- si  $Z_i = 0$ , il ne lui correspond aucune contrainte qui fait partie d'un SEI ;

Ces variables nous donnent aussi une indication quant à la « modification » future éventuelle à apporter aux jugements associés à ces contraintes.

En effet, supposons que  $Z_i > 0$  :

- a) si  $1 \leq i \leq p_1$ , à cette variable  $Z_i$  correspond une contrainte  $\sigma_u < x_s - x_t$  qui fait partie d'un SEI; si une modification du seul jugement (s, t, ..., ...) peut aider à éliminer le SEI, il faut que ce soit une « diminution » (évident).
- b) si  $p_1+1 \leq i \leq p_1+p_2$ , à cette variable  $Z_i$  correspond une contrainte  $x_s - x_t < \sigma_u$  qui fait partie d'un SEI; si une modification du seul jugement (s, t, ..., ...) peut aider à éliminer le SEI, il faut que ce soit une « augmentation » (évident).
- c) si  $p_1+p_2+1 \leq i \leq p_1+p_2 + r$ , à cette variable  $Z_i$  correspond une contrainte  $x_s - x_t = 0$  qui fait partie d'un SEI; si une modification du seul jugement (s, t, 0, 0) peut aider à éliminer le SEI, il faut que ce soit une « diminution » (démontré ci-après).

d) si  $p_1+p_2+r+1 \leq i \leq p_1+p_2+2r$ , à cette variable  $Z_i$  correspond une contrainte  $x_s - x_t = 0$  qui fait partie d'un SEI; si une modification du seul jugement  $(s, t, 0, 0)$  peut aider à éliminer le SEI, il faut que ce soit une « augmentation » (démonstration analogue à celle de c)).

Démonstration de c) :

Soit  $h = i - (p_1+p_2)$ . On sait (par définition des  $Z_i$ ) que

$\exists Y \in \mathbb{R}^p, \exists V, W \in \mathbb{R}^r$  avec  $Y \geq 0, V \geq 0, W \geq 0, Y \neq 0, V_h \neq 0$  et  $W_h = 0$  tels que

$${}^t(A') \cdot Y + {}^t(B') \cdot (V - W) = 0$$

ou encore, si on note **LineB<sub>j</sub>** la  $j^{\text{ème}}$  ligne de **B'**,

$${}^t(A') \cdot Y + {}^t(\text{LineB}_h) \cdot v_h + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^r {}^t(\text{LineB}_j) \cdot V_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^r {}^t(\text{LineB}_j) \cdot W_j = 0 \quad (\text{car } W_h = 0) \quad (*)$$

Le SEI incompatible correspondant  $\begin{cases} A' \cdot X > 0 \\ B' \cdot X = 0 \end{cases}$  peut encore s'écrire  $\begin{cases} A'' \cdot X > 0 \\ x_s - x_t = 0 \\ B'' \cdot X = 0 \end{cases}$

où  $B'' = \begin{bmatrix} \text{LineB}_1 \\ \vdots \\ \text{LineB}_{h-1} \\ \text{LineB}_{h+1} \\ \vdots \\ \text{LineB}_r \end{bmatrix}$  (la matrice **B'** « amputée » de la ligne **LineB<sub>h</sub>**)

Si l'on envisageait une « augmentation » du jugement  $(s, t, 0, 0)$ , on remplacerait la contrainte  $x_s - x_t = 0$  par une contrainte  $x_s - x_t > 0$ .

Ce nouveau système  $\begin{cases} A' \cdot X > 0 \\ x_s - x_t > 0 \\ B'' \cdot X = 0 \end{cases}$  peut s'écrire  $\begin{cases} A'' \cdot X > 0 \\ B'' \cdot X = 0 \end{cases}$

où  $A'' = \begin{bmatrix} A' \\ \text{LineB}_h \end{bmatrix}$  (la matrice **A'** « augmentée » de la ligne **LineB<sub>h</sub>**)

Ce système est encore incompatible ;

en effet, si on pose  $Y' = (Y_1, Y_2, \dots, Y_p, V_h) \in \mathbb{R}^{p+1}$

$$V' = (V_1, \dots, V_{h-1}, V_{h+1}, \dots, V_r) \in \mathbb{R}^{r-1}$$

$$\mathbf{W}' = (\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_{h-1}, \mathbf{W}_{h+1}, \dots, \mathbf{W}_r) \in \mathbb{R}^{r-1}$$

(\*) peut s'écrire :  ${}^t(\mathbf{A}'') \cdot \mathbf{Y}' + {}^t(\mathbf{B}'') \cdot (\mathbf{V}' - \mathbf{W}') = \mathbf{0}$  , où  $\mathbf{Y}' \neq \mathbf{0}$  ( puisque  $\mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$  ), ce qui prouve l'incompatibilité du système. □

Chaque « suggestion » potentielle de modification (  $\mathbf{Z}_i = 1$  ) d'un jugement ( s, t, ..., ... ) peut ainsi être stockée dans un vecteur S de  $\mathbb{N}^4$  où

- $S_1 = s$
- $S_2 = t$
- $S_3 = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists i \in \mathbb{N}_{1,p_1} \cup \mathbb{N}_{p_1+p_2+1,p_1+p_2+r} \text{ tel que } \mathbf{Z}_i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  (diminution)
- $S_4 = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists i \in \mathbb{N}_{p_1+1,p_1+p_2} \cup \mathbb{N}_{p_1+p_2+r+1,p_1+p_2+2r} \text{ tel que } \mathbf{Z}_i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  (augmentation)

Notons **PreSugg** l'ensemble de ces « pré-suggestions ».

Dans notre exemple,

$$\mathbf{PreSugg} = \{ (a_1, a_3, 1, 0), (a_3, a_4, 1, 0), (a_1, a_2, 0, 1), (a_2, a_4, 0, 1) \}.$$

#### 1.5.4.3. « Modification des jugements »

Définition : on appellera « **modification des jugements de m catégories** » tout ensemble  $\text{Modif}_m$  de la forme

$$\text{Modif}_m = \{ (s_1, t_1, i_1, j_1, p_1), (s_2, t_2, i_2, j_2, p_2), \dots, (s_u, t_u, i_u, j_u, p_u) \mid \forall v \in \mathbb{N}_{1,u}, \\ (s_v, t_v, i_v, j_v, p_v) \text{ est un changement du jugement } (s_v, t_v, i_v, j_v) \text{ de } p_v \text{ catégories} \}$$

$$\text{tel que } \sum_{v=1}^u |p_v| = m$$

Dans notre exemple,

$\{ (a_1, a_2, 1, 1, 2), (a_3, a_4, 2, 2, -1) \}$  est une « modification des jugements de 3 catégories », qui consiste à

- remplacer le jugement «  $(a_1, a_2) \in C_1$  » par le jugement «  $(a_1, a_2) \in C_3$  »  
(*augmentation* de 2 catégories)
- remplacer le jugement «  $(a_3, a_4) \in C_2$  » par le jugement «  $(a_3, a_4) \in C_1$  »  
(*diminution* de 1 catégorie)

Si on effectue cette modification, on remplace les jugements inconsistants

	a1	a2	a3	a4
a1	nulle	tr. faible	forte	?
a2		nulle	faible	modérée
a3			nulle	faible
a4	?	?		nulle

par les jugements consistants suivants :

	a1	a2	a3	a4
a1	nulle	modérée	forte	?
a2		nulle	faible	modérée
a3			nulle	tr. faible
a4	?			nulle

Notation : notons  $Sugg_m$  l'ensemble des « modifications des jugements de m catégories » qui rendent les jugements consistants.

Dans notre exemple,

- $\{ (a_1, a_2, 1, 1, 2), (a_3, a_4, 2, 2, -1) \} \in Sugg_3$
- $\{ (a_1, a_3, 4, 4, -1) \}, \{ (a_3, a_4, 2, 2, -1) \}, \{ (a_1, a_2, 1, 1, 1) \}$   
 et  $\{ (a_2, a_4, 3, 3, 1) \} \in Sugg_1$   
 (ce sont les 4 modifications suggérées en 1.5.2).

### 1.5.5. Recherche de suggestions

Une fois l'ensemble PreSugg déterminé, la troisième étape consiste à :

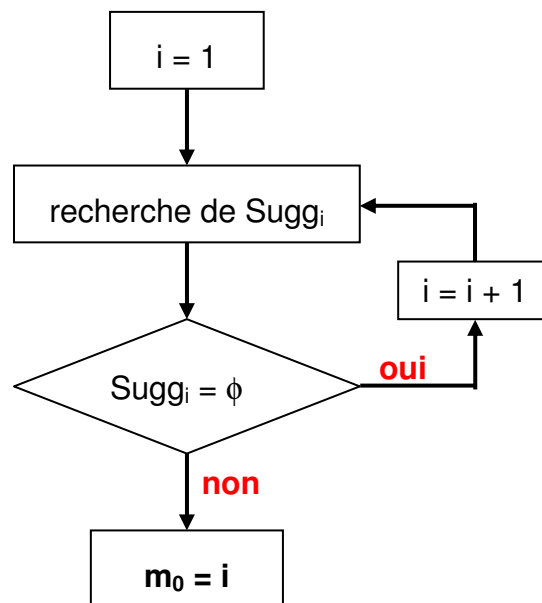
- déterminer le « **nombre minimum de changements** » (certains éventuellement successifs) nécessaire pour rendre les jugements consistants;
- déterminer **toutes les combinaisons** de tels changements "minimaux".

Plus rigoureusement, ceci revient à

- trouver  $m_0 = \min \{ m \in \mathbb{N}^* \mid Sugg_m \neq \emptyset \}$
- expliciter  $Sugg_{m_0}$

Dans notre exemple, nous avons déjà vu que  $m_0 = 1$  ( puisque  $Sugg_1 \neq \emptyset$  )

Nous pouvons schématiser comme suit la façon dont nous avons décidé de procéder, dans tous les cas d'inconsistance 1+2 :



A chaque étape  $i$ ,

- on considère l'ensemble de **toutes** les « modifications des jugements de  $i$  catégories », construit sur base des éléments de **PreSugg** ;
- pour chacun des éléments de cet ensemble :
  - effectuer les modifications reprises dans l'élément choisi ;
  - tester la consistance de la nouvelle matrice des jugements ; si elle est consistante, stocker l'élément dans  $Sugg_i$  ;
  - restaurer la matrice de jugements initiale.

Remarquons que nous envisageons la possibilité de modifier un jugement de plusieurs catégories.

Il va de soi que cet algorithme est toujours convergent puisqu'on peut toujours rendre des jugements consistants en un nombre fini de changements.

Une telle méthode de recherche de suggestions doit impérativement faire appel à un test particulièrement rapide de consistance, que nous avons mis au point et que nous décrivons ci-après, en 1.5.7.

Soulignons qu'en pratique, les cas d'inconsistance qui nécessitent plus de 2 « changements de 1 catégorie » sont quasi inexistantes. La raison principale en est que toute modification de jugement qui engendre une inconsistance est **immédiatement** signalée à **J**, qui doit alors confirmer ou infirmer son jugement.

Cette façon de procéder permet d'éviter

- les erreurs grossières de distraction (en infirmant le jugement) ;
- l'« accumulation » d'inconsistances puisque, si **J** confirme son jugement, des suggestions de modification pour éliminer l'inconsistance lui sont aussitôt proposées.

### 1.5.6. Exemple

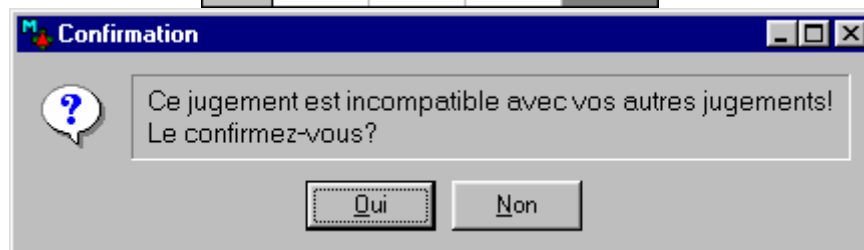
Supposons que  $X = \{ a_1, a_2, a_3, a_4 \}$  et que **J** ait formulé les jugements consistants suivants :

	a1	a2	a3	a4
a1	nulle	tr. faible	tr. forte	?
a2		nulle	faible	?
a3			nulle	modérée
a4	?	?		nulle

**Jugements consistants**

Supposons que **J** ajoute que  $a_2 \mathbf{P} a_4$  et que  $(a_2, a_4) \in C_3$  (« la différence d'attractivité entre  $a_2$  et  $a_4$  est modérée ») :

	a1	a2	a3	a4
a1	nulle	tr. faible	tr. forte	?
a2		nulle	faible	modérée
a3			nulle	modérée
a4	?			nulle



Supposons que **J** confirme ce jugement :

**Jugements inconsistants**

Macbeth a trouvé **6** possibilité(s) de rendre la matrice des jugements consistante par **2** changement(s) de catégorie.

Cette fois, il faudra effectuer au moins **2** « changements de 1 catégorie » pour rendre les jugements consistants, et il y a **6** combinaisons distinctes de tels changements. On remarquera ci-après que, pour chacune de ces 6 suggestions, le logiciel présente un système élémentaire incompatible et montre pourquoi la suggestion proposée élimine cette incompatibilité :

changement de 2 catégories

	a1	a2	a3	a4
a1	nulle	↑ tr. faible <sup>2</sup>	tr. forte	?
a2		nulle	faible	modérée
a3			nulle	modérée
a4	?			nulle

Jugements inconsistants  
Suggestion 1 de 6 : 2 modification(s)

tr. forte	a1 - a3	>	a2 - a4	modérée
modérée	a3 - a4	>	a1 - a2	tr. faible

le jugement qu'on suggère d'« augmenter de 2 catégories »

la contrainte qui sera « éliminée » si on adopte la suggestion

	a1	a2	a3	a4
a1	nulle	↑ tr. faible	tr. forte	?
a2		nulle	faible	modérée
a3			nulle	↓ modérée
a4	?			nulle

Jugements inconsistants  
Suggestion 2 de 6 : 2 modification(s)

tr. forte	a1 - a3	>	a2 - a4	modérée
modérée	a3 - a4	>	a1 - a2	tr. faible

	a1	a2	a3	a4
a1	nulle	tr. faible	tr. forte	?
a2		nulle	faible	modérée
a3			nulle	↓ modérée <sub>2</sub>
a4	?			nulle

Jugements inconsistants  
Suggestion 3 de 6 : 2 modification(s)

tr. forte	a1 - a3	>	a2 - a4	modérée
modérée	a3 - a4	>	a1 - a2	tr. faible

	a1	a2	a3	a4
a1	nulle	tr. faible	↓ tr. forte <sub>2</sub>	?
a2		nulle	faible	modérée
a3			nulle	modérée
a4	?			nulle

Jugements inconsistants  
Suggestion 4 de 6 : 2 modification(s)

tr. forte	a1 - a3	>	a2 - a4	modérée
modérée	a3 - a4	>	a1 - a2	tr. faible

	a1	a2	a3	a4
a1	nulle	tr. faible	↓ tr. forte	?
a2		nulle	faible	↑ modérée <sub>2</sub>
a3			nulle	modérée
a4	?			nulle

Jugements inconsistants  
Suggestion 5 de 6 : 2 modification(s)

tr. forte	a1 - a3	>	a2 - a4	modérée
modérée	a3 - a4	>	a1 - a2	tr. faible

	a1	a2	a3	a4
a1	nulle	tr. faible	tr. forte	?
a2		nulle	faible	↑ modérée <sub>2</sub>
a3			nulle	modérée
a4	?			nulle

Jugements inconsistants  
Suggestion 6 de 6 : 2 modification(s)

tr. forte	a1 - a3	>	a2 - a4	modérée
modérée	a3 - a4	>	a1 - a2	tr. faible

### 1.5.7. Test « accéléré » de consistance

Expérimentalement, nous avons constaté que, dans la plupart des cas d'inconsistance de type 1+2, il existait au moins un SEI de la forme

$$\begin{cases} X_i - X_r < X_i - X_s \\ X_r - X_j < X_s - X_j \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} X_i - X_r < X_s - X_j \\ X_r - X_j < X_i - X_s \end{cases}$$

donc un cas d'inconsistance de type 2-b.

Utiliser la programmation linéaire pour détecter une contradiction aussi triviale nous a paru malheureux. Il en va de même pour les SEI de la forme:

$$\begin{cases} X_i - X_r < X_i - X_s \\ 0 < X_s - X_r \end{cases}$$

(inconsistance de type 2-a).

C'est pourquoi nous avons amélioré le test **PL $\sigma$ -test<sub>1+2</sub>** en le faisant précéder d'une fonction de « pré-test », qui détecte ces inconsistances et évite la résolution d'un programme linéaire chaque fois qu'un de ces cas est rencontré.

## 1.6. Traitement des inconsistances de type 3

### 1.6.1. Traiter l'inconsistance

Dans le paragraphe précédent, nous avons exposé notre système de « détection - suggestions » en cas d'inconsistance de type 1+2 ( $Ech_{1+2} = \phi$ ).

Dans ce paragraphe, nous allons expliquer comment nous avons choisi de traiter les cas d'inconsistance de type 3, c'est-à-dire les situations où

$$Ech_{1+2}(X, P, I, P^e) \neq \phi \quad \text{et} \quad Ech_{1+2+3}(X, P, I, P^e, R^b) = \phi$$

Supposons que l'information préférentielle de type 1+2+3  $\{P, I, ?, P^e, R^b\}$  soit consistante ( $Ech_{1+2+3}(X, P, I, P^e, R^b) \neq \phi$ ) et que **J** souhaite ajouter l'information de type 3 suivante :

$$\alpha \leq \frac{\Delta_{att}(x, y)}{\Delta_{att}(z, w)} \leq \beta \quad (\text{où } x P y, z P w, 0 \leq \alpha \leq \beta)$$

Soit  $R^{b*} = R^b \cup \{((x, y), (z, w)), (\alpha, \beta)\}$

et supposons que  $Ech_{1+2+3}(X, P, I, P^e, R^{b*}) = \phi$  (inconsistance de type 3)

1°) si  $Ech_{1+2+3}(X, P, I, P^e, \{((x, y), (z, w)), (\alpha, \beta)\}) = \phi$ ,

cela signifie que  $[\alpha \leq \frac{\Delta_{att}(x, y)}{\Delta_{att}(z, w)} \leq \beta]$  est incompatible avec

l'information  $\{P, I, ?, P^e\}$ , ce que le logiciel signale à **J** de la façon suivante :

Cette contrainte n'est pas compatible avec le tableau des jugements.

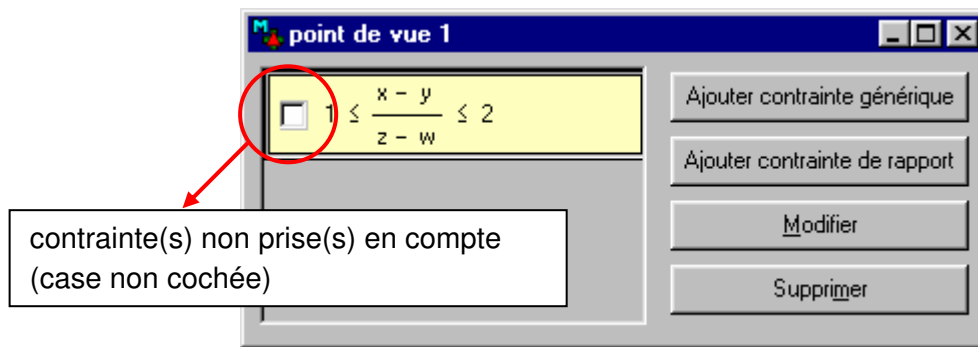
2°) si  $\left\{ \begin{array}{l} Ech_{1+2+3}(X, P, I, P^e, \{((x, y), (z, w)), (\alpha, \beta)\}) \neq \phi, \\ Ech_{1+2+3}(X, P, I, P^e, R^{b*}) = \phi, \end{array} \right.$

cela signifie que  $[\alpha \leq \frac{\Delta_{att}(x, y)}{\Delta_{att}(z, w)} \leq \beta]$  est incompatible avec

l'information  $R^b$ , ce que le logiciel signale à **J** de la façon suivante :

Cette contrainte n'est pas compatible avec vos autres contraintes.

Dans les deux cas, **la nouvelle information** sera ajoutée à la *liste des contraintes* mais **ne sera pas prise en compte** dans l'information  $\mathbf{R}^b$  :



### 1.6.2. Eviter l'inconsistance

Notre traitement des inconsistances de type 3 consiste, en fait, à « **interdire** » l'existence de tels cas, en offrant à  $\mathbf{J}$  le moyen de les éviter :

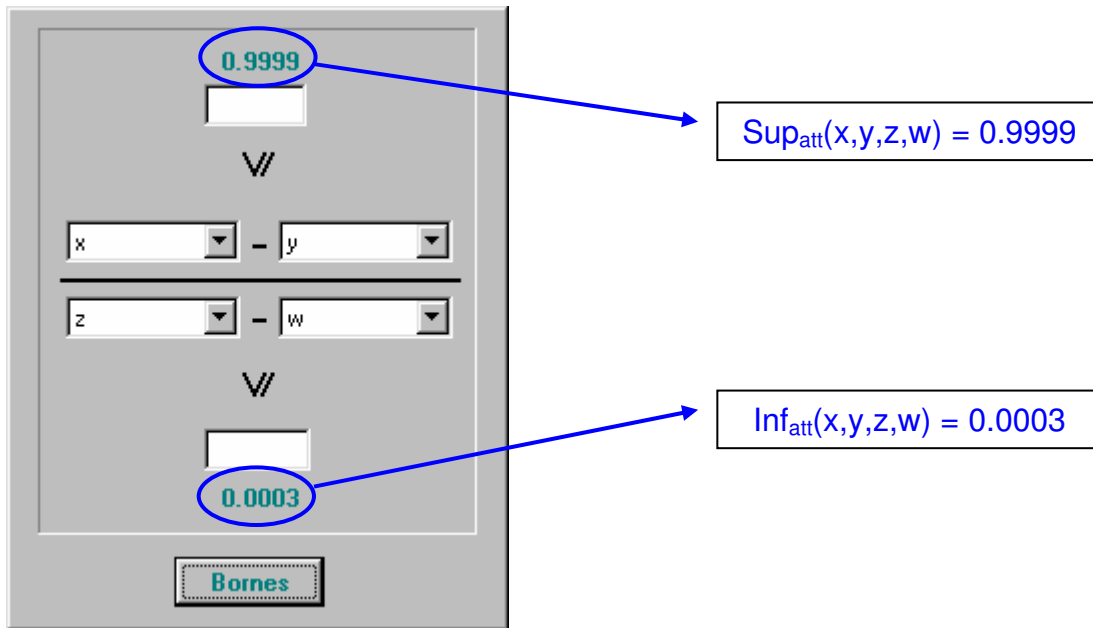
lorsque  $\mathbf{J}$  désire fournir l'information  $\alpha \leq \frac{\Delta_{att}(x,y)}{\Delta_{att}(z,w)} \leq \beta$ , le logiciel lui fournit des

« bornes »  $Inf_{att}(x,y,z,w)$  et  $Sup_{att}(x,y,z,w)$  où

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq Inf_{att}(x,y,z,w) - \inf_{\mu \in Ech_{1+2+3}} \frac{\mu(x) - \mu(y)}{\mu(z) - \mu(w)} < 0.0001 \\ 0 \leq \sup_{\mu \in Ech_{1+2+3}} \frac{\mu(x) - \mu(y)}{\mu(z) - \mu(w)} - Sup_{att}(x,y,z,w) < 0.0001 \\ 10000 * Inf_{att}(x,y,z,w) \in \mathbb{IN}, \quad 10000 * Sup_{att}(x,y,z,w) \in \mathbb{IN} \\ \text{(valeurs arrondies au } 10000^{\text{ème}}) \end{array} \right.$$

et n'acceptera l'information que

$$\text{si } [\alpha, \beta] \cap [Inf_{att}(x,y,z,w), Sup_{att}(x,y,z,w)] \neq \emptyset.$$



### 1.6.3. Suggestions ?

A notre avis, l'ajout d'une information de type 3 est plus destiné à « enrichir » une information préférentielle existante qu'à fournir une information qu'on pourrait qualifier de « nouvelle ». Comme nous donnons au décideur **J** l'outil suffisant (*bornes*) pour ne pas entrer en conflit avec l'information préférentielle existante, nous n'avons développé, pour les inconsistances de type 3, aucun système de « suggestions » généralisant celui que nous avons développé pour l'inconsistance de type 1+2.

Cependant, sur le plan mathématique, on peut considérer le problème comme résolu. Il suffirait en effet de généraliser la notion de *système élémentaire incompatible* aux contraintes du type

$$\alpha (x_u - x_v) \leq (x_p - x_q) \quad (*)$$

Le problème se situe plutôt sur le plan de la méthodologie : une fois ces systèmes détectés, quelle « *suggestion* » proposer à **J** en ce qui concerne les contraintes (\*) ? Trouver une réponse satisfaisante à cette question fait partie de nos projets.

## 1.7. L'échelle MACBETH

### 1.7.1. Définition « intuitive » de l'échelle MACBETH

Un cas particulier d'échelle de type 1+2+3 est l'« *échelle Macbeth* ».

Lorsque  $\mathcal{P} = \emptyset$  et que les jugements fournis par  $\mathbf{J}$  (en réponse au questionnaire utilisé dans l'approche MACBETH) sont « **consistants** », il existe de nombreuses échelles  $\mu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  de type 1+2+3.

Illustrons ceci par un exemple. Supposons que  $\mathbf{J}$  ait fourni les jugements suivants:

	d	a	e	b	c
d	nulle	faible	forte	forte	extrême
a		nulle	modérée	modérée	tr. forte
e			nulle	tr. faible	faible
b				nulle	faible
c					nulle

Supposons en outre que  $\mathbf{J}$  n'ait pas fourni d'information de type 3.

Voici (parmi une infinité d'autres) quatre échelles  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  et  $\mu_4$ , de type 1+2 :

	Echelle $\mu_1$	Echelle $\mu_2$	Echelle $\mu_3$	Echelle $\mu_4$
d	100	100	11	55
a	80	85	9	45
e	35	30	4	20
b	25	20	3	15
c	0	0	0	0

Il est évident que  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathcal{Ech}_1$ .

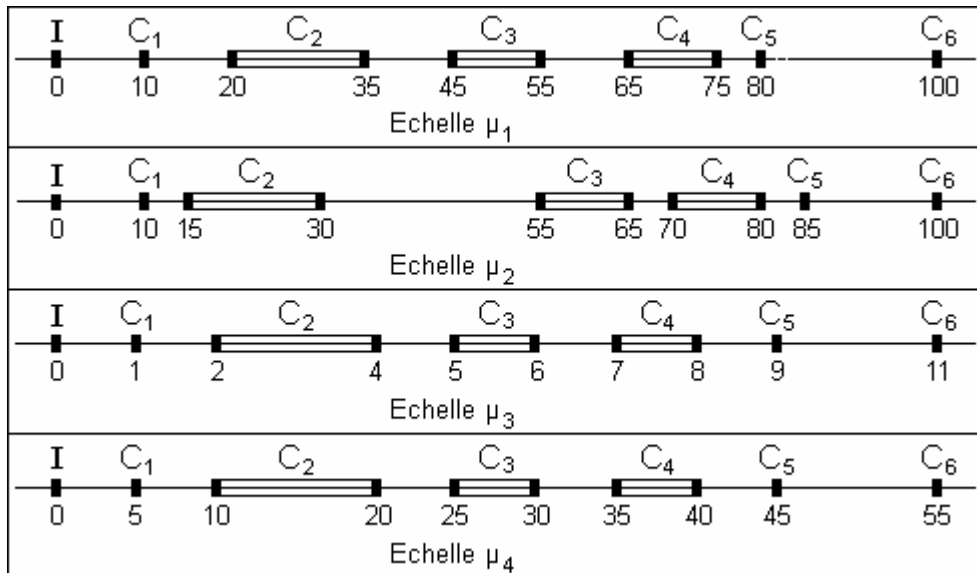
On peut vérifier aisément que  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathcal{Ech}_{1+2}$  en se référant au tableau des différences numériques  $\mu_1(x) - \mu_1(y)$ ,  $\mu_2(x) - \mu_2(y)$ ,  $\mu_3(x) - \mu_3(y)$  et  $\mu_4(x) - \mu_4(y)$ , réparties par catégories, pour les couples  $(x, y) \in \mathbf{P} \cup \mathbf{I}$ :

Couples (x,y) de $P \cup I$	$\Delta_{att}(x,y)$	$\mu_1(x) - \mu_1(y)$	$\mu_2(x) - \mu_2(y)$	$\mu_3(x) - \mu_3(y)$	$\mu_4(x) - \mu_4(y)$
(a,a)	nulle ( I )	0	0	0	0
(b,b)		0	0	0	0
(c,c)		0	0	0	0
(d,d)		0	0	0	0
(e,e)		0	0	0	0
(e,b)	très faible ( C <sub>1</sub> )	10	10	1	5
(d,a)	faible ( C <sub>2</sub> )	20	15	2	10
(e,c)		35	30	4	20
(e,b)		25	20	3	15
(a,e)	modérée ( C <sub>3</sub> )	45	55	5	25
(a,b)		55	65	6	30
(d,e)	forte ( C <sub>4</sub> )	65	70	7	35
(d,b)		75	80	8	40
(a,c)	très forte ( C <sub>5</sub> )	80	85	9	45
(d,c)	extrême ( C <sub>6</sub> )	100	100	11	55

Ce tableau fait aussi apparaître que les différences numériques associées par une échelle aux couples d'une **même** catégorie ne sont pas nécessairement égales.

Ainsi par exemple, l'échelle  $\mu_1$  associe aux couples de la catégorie C<sub>2</sub> les valeurs 20, 25 et 35. Dans l'approche MACBETH, on dit alors que « l'échelle  $\mu_1$  associe à la catégorie C<sub>2</sub> l'intervalle [20, 35] » .

De façon générale, chaque échelle associe un intervalle fermé (pouvant être réduit à un point) à chaque catégorie non vide et l'intervalle [0,0] à la relation I. Les intervalles associés aux différentes catégories (et à la relation I) par chacune des échelles  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  et  $\mu_4$  sont représentés graphiquement ci-après.



Observons qu'il est tout à fait naturel que les intervalles qui représentent numériquement les catégories puissent être de longueur non nulle, étant donné le caractère un peu vague des termes très faible, faible, modéré, fort ... utilisés pour caractériser ces catégories.

Notons qu'on n'associe pas d'intervalle à une catégorie vide mais, pour ne pas alourdir cette présentation intuitive de l'échelle MACBETH, nous supposons ci-dessous qu'aucune catégorie  $C_{ij}$  n'est vide.

Pour simplifier, nous ferons aussi l'hypothèse (provisoire) que toutes les catégories  $C_{ij}$  avec  $i < j$  sont vides.

Pour déterminer, lorsque les jugements de  $\mathbf{J}$  sont consistants, une première échelle numérique (parmi toutes celles qui satisfont les conditions ordinale et sémantique), on considère dans l'approche MACBETH que

- 1°) il est souhaitable de minimiser la « longueur » des intervalles qui représentent numériquement les catégories  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  et  $C_6$
- 2°) il n'y a aucune raison pour que les « distances » séparant  $\mathbf{I}$  et  $C_1$ ,  $C_1$  et  $C_2$ ,  $C_2$  et  $C_3$ ,  $C_3$  et  $C_4$ ,  $C_4$  et  $C_5$ ,  $C_5$  et  $C_6$  soient différentes.

Ceci conduit, sur le plan pratique, à l'idée de rechercher une échelle telle que, en prenant comme unité de mesure la « distance » minimale séparant  $\mathbf{I}$  et  $C_1$ ,  $C_1$  et  $C_2$ ,  $C_2$  et  $C_3$ ,  $C_3$  et  $C_4$ ,  $C_4$  et  $C_5$ ,  $C_5$  et  $C_6$ ,

[la moyenne des longueurs des intervalles qui représentent numériquement les catégories  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  et  $C_6$ ] + [la moyenne des distances séparant les catégories  $\mathbf{I}$  et  $C_1$ ,  $C_1$  et  $C_2$ ,  $C_2$  et  $C_3$ ,  $C_3$  et  $C_4$ ,  $C_4$  et  $C_5$ ,  $C_5$  et  $C_6$ ]

est la plus petite possible.

Cette idée intuitive mais peu rigoureuse peut être formalisée, moyennant l'introduction de quelques notations.

Notations : soit  $\mu \in \mathcal{Ech}_{1+2}$

-  $\forall i \in \mathbb{N}_{1,6}$  :  $m(C_i) = \max \{ \mu(x) - \mu(y) \mid (x,y) \in C_i \} - \min \{ \mu(x) - \mu(y) \mid (x,y) \in C_i \}$   
 (  $m(C_i)$  est la « longueur » de l'intervalle associé à  $C_i$  )

-  $\forall i \in \mathbb{N}_{2,6}$  :  $m\Delta(C_i) = \min \{ \mu(x) - \mu(y) \mid (x,y) \in C_i \} - \max \{ \mu(x) - \mu(y) \mid (x,y) \in C_{i-1} \}$   
 $m\Delta(C_1) = \min \{ \mu(x) - \mu(y) \mid (x,y) \in C_1 \}$   
 (  $m\Delta(C_i)$  est la « distance » séparant  $C_i$  et  $C_{i-1}$  )

-  $\delta = \min \{ m\Delta(C_i) \mid i \in \mathbb{N}_{1,6} \}$   
 (  $\delta$  est la « distance minimale » séparant  $\mathbf{I}$  et  $C_1$ ,  $C_1$  et  $C_2$ , ... )

Notre objectif peut maintenant s'écrire :

$$\text{Minimiser } \left[ \frac{1}{\delta} \cdot \left( \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 m(C_i) + \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 m\Delta(C_i) \right) \right]$$

ou, plus simplement,

$$\text{Minimiser } \left[ \frac{1}{\delta} \cdot \left( \sum_{i=1}^6 m(C_i) + \sum_{i=1}^6 m\Delta(C_i) \right) \right]$$

ou encore, d'après les définitions des  $m(C_i)$  et  $m\Delta(C_i)$ ,

$$\text{Minimiser } \left[ \frac{1}{\delta} \cdot \max \{ \mu(x) - \mu(y) \mid (x,y) \in C_6 \} \right]$$

donc,

$$\text{Minimiser } \left[ \frac{1}{\delta} \cdot \left( \mu(a_1) - \mu(a_n) \right) \right]$$

où  $\forall x \in \mathbf{X}$ ,  $a_1 (\mathbf{P} \cup \mathbf{I}) x$  et  $x (\mathbf{P} \cup \mathbf{I}) a_n$

On constate que,

dans le cas particulier où  $[ \forall i, j \in \mathbb{N}_{1,6}$  avec  $i < j$ ,  $C_{ij} = \phi ]$  et  $[ \forall i \in \mathbb{N}_{1,6}$ ,  $C_i \neq \phi ]$ ,  
 notre idée intuitive nous a conduit à minimiser la différence entre les plus attractif(s) et  
 moins attractif(s) éléments de  $\mathbf{X}$ .

Dans le cas général, il a été décidé de prendre la même fonction objectif pour  
 déterminer une première échelle de type 1+2 à présenter au décideur  $\mathbf{J}$ .

### 1.7.2. Définition « rigoureuse » de l'échelle MACBETH

Parmi toutes les échelles satisfaisant au principe décrit ci-dessus, on réserve le nom d'**échelle MACBETH « de base »** à celle(s) obtenue en posant

- $\mu(a_n) = 0$  (choix de l' « origine » de l'échelle)
- $\delta = 1$  (choix de l' « unité » de l'échelle)

Les autres échelles satisfaisant au principe énoncé ci-dessus sont des « **échelles MACBETH transformées** ».

Comme on a supposé que  $Ech_{1+2+3} \neq \emptyset$  et  $a_1$  (PUI)  $a_2 \dots a_{n-1}$  (PUI)  $a_n$ , on obtiendra une échelle MACBETH de base en résolvant le programme linéaire (tout à fait général) **PL-MACBETH** suivant :

**PL-MACBETH**

Variables :  $x_1, x_2, \dots, x_n, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_Q$

Min  $x_1$   
sous

$\forall (a_p, a_r) \in I$ avec $p < r$ ,	$x_p - x_r = 0$	(t1)
$\forall i, j \in \mathbb{N}_{1,Q}$ avec $i \leq j$ , $\forall (a_p, a_r) \in C_{ij}$ ,	$\sigma_i + \frac{1}{2} \leq x_p - x_r$	(t2')
$\forall i, j \in \mathbb{N}_{1,Q-1}$ avec $i \leq j$ , $\forall (a_p, a_r) \in C_{ij}$ ,	$x_p - x_r \leq \sigma_{j+1} - \frac{1}{2}$	(t3')
	$\sigma_1 = \frac{1}{2}$	(t4')
$\forall i \in \mathbb{N}_{2,Q}$ ,	$\sigma_{i-1} + 1 \leq \sigma_i$	(t5')
$\forall ((a_r, a_s), (a_t, a_u), (\alpha, \beta)) \in \mathbf{R}^b$ ,	$\alpha (x_t - x_u) \leq x_r - x_s \leq \beta (x_t - x_u)$	(t6)
$\forall i \in \mathbb{N}_{1,n}$ ,	$x_i \geq 0$	
$\forall i \in \mathbb{N}_{1,Q}$ ,	$\sigma_i \geq 0$	

La fonction  $EchMac : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall i \in \mathbb{N}_{1,n}, EchMac(a_i) = x_i$

est une échelle MACBETH de base.

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}$  avec  $(a,b) \neq (1,0)$ ,

$a \cdot EchMac + b$  est une « **échelle Macbeth transformée** ».

Dans le cas de l'exemple,

**PL-MACBETH** donne l'échelle  $\mu_3$  comme échelle MACBETH de base.

Si on compare les 4 échelles, on observe :

pour  $\mu_1$ ,  $\delta = 5$  et  $\frac{1}{\delta} \cdot ((\mu_1(a_1) - \mu_1(a_n))) = 20$

pour  $\mu_2$ ,  $\delta = 5$  et  $\frac{1}{\delta} \cdot ((\mu_2(a_1) - \mu_2(a_n))) = 20$

pour  $\mu_3$ ,  $\delta = 1$  et  $\frac{1}{\delta} \cdot ((\mu_3(a_1) - \mu_3(a_n))) = 11$  (échelle MACBETH de base)

pour  $\mu_4$ ,  $\delta = 5$  et  $\frac{1}{\delta} \cdot ((\mu_4(a_1) - \mu_4(a_n))) = 11$  (échelle MACBETH transformée  $\mu_4 = 5 \mu_3$ )

### 1.7.3. Unicité de l'échelle MACBETH de base ?

Rien ne garantit qu'une solution optimale de **PL-MACBETH** est unique.

Par exemple, considérons le tableau de jugements et une échelle MACBETH de base  $\mu$  correspondante suivants :

	a1	a2	a3	a4	a5	a6
a1	nulle	tr. faible	faible	modérée	modérée	forte
a2		nulle	tr. faible	modérée	modérée	modérée
a3			nulle	faible	modérée	modérée
a4				nulle	tr. faible	tr. faible
a5					nulle	tr. faible
a6						nulle

Echelle MACBETH de base	
a1	8.00
a2	6.50
a3	5.00
a4	2.00
a5	1.00
a6	0.00

Pour cette échelle  $\mu$ , on a évidemment  $\delta = 1$  et  $\frac{1}{\delta} \cdot ((\mu(a_1) - \mu(a_6))) = 8$ .

Mais on peut vérifier que,  $\forall x \in [6, 7]$ , on obtiendra **AUSSI**

$\delta = 1$  et  $\frac{1}{\delta} \cdot ((\mu(a_1) - \mu(a_6))) = 8$

pour l'échelle ci-contre :

a1	8.00
a2	X
a3	5.00
a4	2.00
a5	1.00
a6	0.00

Une échelle MACBETH de base obtenue par résolution de **PL-MACBETH** n'est donc **pas nécessairement unique**.

Lorsque l'échelle MACBETH n'est qu'une étape technique destinée à fournir une base de discussion avec **J**, ceci ne constitue pas un véritable problème.

Cependant, dans les cas d'études réelles, il arrive que les décideurs adoptent l'échelle MACBETH comme échelle finale afin de ne pas pouvoir être attaqués juridiquement (voir Bana e Costa *et al.*, 2002a) pour cause de favoritisme. Aussi, nous avons cru bon de devoir garantir l'unicité de l'échelle MACBETH de base par l'adjonction à **PL-MACBETH** d'un artifice purement technique.

Notons  $S_{mac}$  l'ensemble des contraintes de **PL-MACBETH**. Nous avons décidé de procéder comme suit :

1°) résolution de **PL-MACBETH**

→ solution optimale  $x_1, x_2, \dots, x_n$

→  $\mu(a_1) = x_1, \mu(a_n) = x_n = 0$

(  $\mu(a_1)$  est unique )

2°) pour  $i = 2$  à  $n-1$ , faire :

<p>résoudre <math>\text{Max } x_i</math> sous <math>\begin{cases} S_{mac} \\ x_1 = \mu(a_1) \\ \vdots \\ x_{i-1} = \mu(a_{i-1}) \end{cases}</math></p> <p>→ solution optimale <math>x_1, x_2, \dots, x_n</math></p> <p>→ <math>x_{max} = x_i</math></p>	<p>résoudre <math>\text{Min } x_i</math> sous <math>\begin{cases} S_{mac} \\ x_1 = \mu(a_1) \\ \vdots \\ x_{i-1} = \mu(a_{i-1}) \end{cases}</math></p> <p>→ solution optimale <math>x_1, x_2, \dots, x_n</math></p> <p>→ <math>x_{min} = x_i</math></p>
$\mu(a_i) = \frac{1}{2} (x_{min} + x_{max})$	

Ainsi,

- pour calculer  $\mu(a_2)$ , on « fixe » la variable  $x_1$  à la valeur  $\mu(a_1)$ , on calcule les valeurs minimale et maximale de  $x_2$  et on prend la moyenne de ces deux valeurs comme valeur de  $\mu(a_2)$  ;
- pour calculer  $\mu(a_3)$ , on « fixe » la variable  $x_1$  à la valeur  $\mu(a_1)$ , la variable  $x_2$  à la valeur  $\mu(a_2)$ , on calcule les valeurs minimale et maximale de  $x_3$  et on prend la moyenne de ces deux valeurs comme valeur de  $\mu(a_3)$  ;
- etc...

Cette méthode garantit que  $\mu(a_1), \mu(a_2), \dots, \mu(a_n)$  sont uniques pour une information préférentielle  $\{ P, I, ? = \phi, P^e, R^b \}$  donnée. Elle nous permet de parler de « I' » échelle MACBETH de base, et non plus d' « une » échelle MACBETH.

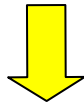
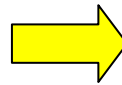
### 1.7.4. Présentation de l'échelle MACBETH

Dans notre logiciel, l'échelle MACBETH correspondant à une information  $\{ P, I, ? = \phi, P^e, R^b \}$  consistante est représentée sous 2 formes : un tableau et un... « thermomètre », ainsi dénommé à cause de son apparence, les éléments de  $X$  étant positionnés sur un axe vertical gradué. Dans l'exemple ci-dessous, les abscisses des éléments d et c ont été fixées respectivement (et arbitrairement) à 100 et 0.

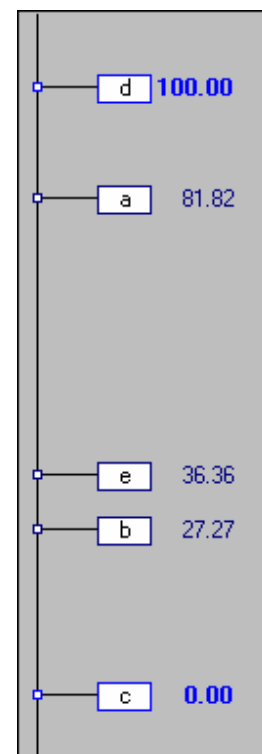
	d	a	e	b	c
d	nulle	faible	forte	forte	extrême
a		nulle	modérée	modérée	tr. forte
e			nulle	tr. faible	faible
b				nulle	faible
c					nulle

**Jugements consistants**

d et c fixés à 100 et 0



	Echelle courante	Macbeth transformée	Macbeth de base
d	100.00	100.00	11.00
a	81.82	81.82	9.00
e	36.36	36.36	4.00
b	27.27	27.27	3.00
c	0.00	0.00	0.00



Même si l'on fixe les valeurs attribuées à c et d, il existe en général une **infinité d'échelles** 1+2+3. Il faut donc permettre au décideur **J** de **modifier**, s'il le désire, les valeurs proposées et lui fournir des outils qui peuvent à la fois le guider et le **limiter** dans ses choix. C'est l'objet du paragraphe suivant.

## 1.8. Discussion autour d'une échelle

Supposons que, dans l'exemple précédent, **J** estime que l'élément **a** est « mal positionné » par rapport aux éléments **c** et **d** et souhaite lui associer une autre valeur.

Dans un tel processus de discussion interactive, il est intéressant pour **J** de disposer de **limites** pour la valeur de **a** qui tiennent compte de l'information préférentielle disponible.

Dans un premier temps, pour simplifier, nous considérerons que  $\mathbf{R}^b = \phi$ , ne traiterons qu'une information  $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I}, ? = \phi, \mathbf{P}^e \}$  et n'envisagerons que des échelles de type 1+2.

Mais nous verrons plus loin comment ce qui suit peut être généralisé au cas  $\mathbf{R}^b \neq \phi$ .

### 1.8.1. Intervalles « libres » et « liés »

Notons  $\mathbf{I}(\mathbf{a}) = \{ z \in \mathbf{X} \mid \mathbf{a} \mathbf{I} z \}$ .

Supposons que l'information  $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I}, ?, \mathbf{P}^e \}$  soit consistante ( $Ech_{1+2} \neq \phi$ ).

Soient  $\mu_0 \in Ech_{1+2}$  (une échelle particulière)

$L, H \in \mathbf{X}$  avec  $H \mathbf{P} L$  (deux éléments « fixés »)

$\mathbf{a} \in \mathbf{X} \setminus (\mathbf{I}(L) \cup \mathbf{I}(H))$  (l'élément qu'on souhaite repositionner, non ex æquo avec L ou H)

$Ech-libre = \{ \mu \in Ech_{1+2} \mid \mu(H) = \mu_0(H) \text{ et } \mu(L) = \mu_0(L) \}$

$Ech-liée(\mathbf{a}) = \{ \mu \in Ech_{1+2} \mid \forall y \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{I}(\mathbf{a}) : \mu(y) = \mu_0(y) \}$

*Ech-libre* est l'ensemble de toutes les échelles pour lesquelles on a fixé les valeurs associées aux seuls H et L.

*Ech-liée(a)* est l'ensemble de toutes les échelles pour lesquelles on a fixé les valeurs de **tous** les éléments de **X** sauf **a** (et ses éventuels ex æquo) ; autrement dit, seul **a** « bouge ».

On appelle « **intervalle libre** » associé à **a** l'intervalle  $] \inf_{\mu \in Ech-libre} \mu(\mathbf{a}), \sup_{\mu \in Ech-libre} \mu(\mathbf{a}) [$

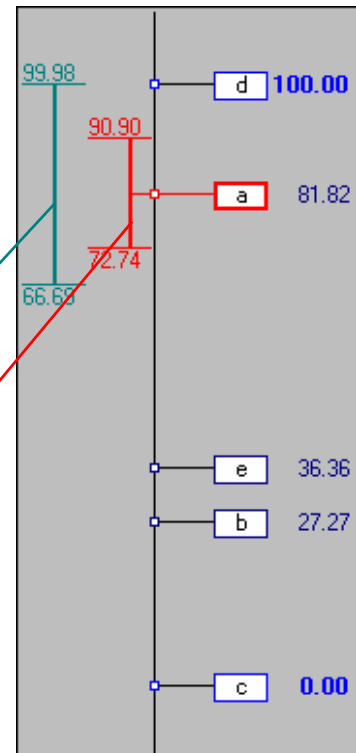
On appelle « **intervalle lié** » associé à **a** l'intervalle  $] \inf_{\mu \in Ech-liée} \mu(\mathbf{a}), \sup_{\mu \in Ech-liée} \mu(\mathbf{a}) [$

Dans l'exemple, si on sélectionne **a**, deux intervalles sont présentés, qu'il faut donc interpréter comme suit :

$\forall \mu \in \text{Ech}_{1+2} :$

$$\begin{aligned}
 & [ \mu(c) = 0 , \mu(d) = 100 ] \\
 & \quad \Downarrow \\
 & 66.69 \leq \mu(\mathbf{a}) \leq 99.98
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [ \mu(c) = 0 , \mu(d) = 100 , \mu(e) = 36.36 , \mu(b) = 27.27 ] \\
 & \quad \Downarrow \\
 & 72.74 \leq \mu(\mathbf{a}) \leq 90.9
 \end{aligned}$$



$[66.69, 99.98]$  et  $[72.74, 90.9]$  sont « presque » les intervalles libre et lié associés à **a**.

Presque, parce que nous avons choisi de présenter au décideur les « plus grands » intervalles **fermés** inclus aux intervalles libre et lié définis ci-dessus (nécessairement ouverts si  $\mathbf{R}^b = \emptyset$ ), en tenant compte de la précision courante dans le logiciel qui est de 0.01.

Ainsi, par exemple,  $90.9 = 0.01 * \text{int}( 100 * \sup_{\mu \in \text{Ech-liee}} \mu(\mathbf{a}) - \varepsilon )$ ,

où  $\varepsilon$  est un nombre « très petit » ( $10^{-6}$  dans ce cas) qui garantit l'obtention d'un intervalle fermé inclus à l'ouvert.

Comme nous le verrons ci-après, les intervalles libres seront déterminés par résolution de programmes linéaires, tandis que nous avons établi des **formules de calcul** « direct » (et rapide !) des intervalles liés.

Nous signalerons enfin qu'il est permis, dans le logiciel, de déplacer l'élément **a** par simple « glisser-déposer à la souris » mais, évidemment, uniquement à l'intérieur de l'intervalle lié.

Cette manipulation étant très courante en pratique, il est assez intéressant de permettre l'affichage de ces intervalles liés pour **tous** les éléments de **X** simultanément et d'observer leurs modifications dans le cas d'un tel déplacement « à la souris ».

### 1.8.2. Calcul des intervalles « libres »

Supposons que  $L = a_{i_1}$  et  $H = a_{i_2}$  et que  $\mu_0(a_{i_1}) = r_1$  et  $\mu_0(a_{i_2}) = r_2$

Soit  $\mathbf{a}_i \in \mathbf{X} \setminus (\mathbf{I}(a_{i_1}) \cup \mathbf{I}(a_{i_2}))$ .

L'intervalle libre (fermé)  $[\min\text{-}a_i, \max\text{-}a_i]$  associé à  $\mathbf{a}_i$  est déterminé par les valeurs de

$$d_{\min} \cdot (x_i - x_{i_1}) + \mu_0(a_{i_1}) \quad (*)$$

dans les solutions optimales des programmes linéaires suivants

**PLinterv-libre-inf(a<sub>i</sub>)** et **PLinterv-libre-sup(a<sub>i</sub>)**,

où

- $d_{\min}$  est la constante strictement positive qui représente la précision choisie (0.01) :
- chaque variable **entière**  $x_i$  représente la valeur  $\frac{1}{d_{\min}} \cdot \mu(a_i)$  (donc,  $100 \mu(a_i)$ ).

Les contraintes  $[x_i \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}_{1,n}]$  garantissent l'obtention d'une solution exacte tenant compte de la précision adoptée en évitant qu'un arrondi d'une solution optimale en variables réelles ne fournisse des valeurs « interdites » pour les bornes de l'intervalle cherché. En effet, une solution entachée d'erreurs d'arrondis serait catastrophique dans un tel calcul de valeurs limites.

**PLinterv-libre-inf(a<sub>i</sub>)** et **PLinterv-libre-sup(a<sub>i</sub>)**

Variables :  $x_1, x_2, \dots, x_n, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_Q$

**Min**  $x_i - x_{i_1}$  ( ou **Max** )

sous

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall (a_s, a_t) \in \mathbf{I} \text{ avec } s < t, & x_s - x_t = 0 \quad (t1) \\ \forall i, j \in \mathbb{N}_{1,Q} \text{ avec } i \leq j, \quad \forall (a_s, a_t) \in C_{ij}, & \sigma_i + 1 \leq x_s - x_t \quad (t2) \\ \forall i, j \in \mathbb{N}_{1,Q-1} \text{ avec } i \leq j, \quad \forall (a_s, a_t) \in C_{ij}, & x_s - x_t \leq \sigma_{j+1} \quad (t3) \\ & x_{i_2} - x_{i_1} = \frac{1}{d_{\min}} (r_2 - r_1) \quad (t4) \\ \forall i \in \mathbb{N}_{2,Q}, & \sigma_{i-1} \leq \sigma_i \quad (t5) \\ \forall i \in \mathbb{N}_{1,n}, & x_i \in \mathbb{N} \quad (\text{variables entières}) \\ \forall i \in \mathbb{N}_{1,Q}, & \sigma_i \geq 0 \end{array} \right.$$

## Remarques

1) utiliser les contraintes (naturelles)  $x_{i_1} = \frac{1}{d_{\min}} \cdot r_1$  et  $x_{i_2} = \frac{1}{d_{\min}} \cdot r_2$  au lieu de la contrainte (t4) nous aurait posé de sérieux problèmes puisque les valeurs associées aux éléments de  $\mathbf{X}$  peuvent être négatives.

Le résultat correct est garanti en translatant la valeur  $x_i$  comme précisé en (\*).

2) La contrainte d'intégralité des variables nous a amené à réduire le temps de calcul de ces intervalles en résolvant plusieurs programmes linéaires successifs :

- le premier en variables **réelles** en supposant que  $d_{\min} = 0.01$  ; nous obtenons un majorant de max- $a_i$  et un minorant de min- $a_i$  ;
- le second en variables **entières** en supposant que  $d_{\min} = 1$  nous obtenons un minorant de max- $a_i$  et un majorant de min- $a_i$  ;
- le 3<sup>ème</sup> en variables **entières** en supposant que  $d_{\min} = 0.1$  nous obtenons un meilleur minorant de max- $a_i$  et un meilleur majorant de min- $a_i$  ;
- le dernier en variables **entières** en supposant que  $d_{\min} = 0.01$  nous obtenons max- $a_i$  et min- $a_i$  .

### 1.8.3. Calcul des intervalles « liés »

Afin de ne pas alourdir les notations, nous énoncerons et démontrerons les formules de calcul des intervalles liés en faisant l'hypothèse que

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_{1,Q} \text{ avec } i < j : C_{ij} = \phi$$

pour n'envisager que des catégories  $C_1, C_2, \dots, C_Q$ . Mais il va de soi que l'algorithme de calcul de ces intervalles que nous avons construit sur base de ces formules et intégré à notre logiciel est, lui, tout à fait général.

Conventions :

- lorsque  $(x,y) \in C_i$ , nous conviendrons que  $cat(x,y) = i$  ;
- lorsque  $(x,y) \in I$ , nous conviendrons que  $cat(x,y) = 0$  ;
- comme certains des ensembles envisagés ci-dessous peuvent être vides, nous conviendrons que  $\min \phi = +\infty$  et  $\max \phi = -\infty$  .

On peut démontrer que:

$\inf_{\mu \in \text{Ech-lies}} \mu(\mathbf{a}) = \text{Max} (G_1 \cup G_2 \cup G_3)$ $\sup_{\mu \in \text{Ech-lies}} \mu(\mathbf{a}) = \text{Min} (D_1 \cup D_2 \cup D_3)$
---

où

$$\mathbf{P}^+(\mathbf{a}) = \{ z \in X \mid z \mathbf{P} \mathbf{a} \}$$

$$\mathbf{P}^-(\mathbf{a}) = \{ y \in X \mid \mathbf{a} \mathbf{P} y \}$$

$$\text{diffmax}_i = \max \{ \mu_0(x) - \mu_0(y) \mid (x,y) \in C_i, x,y \notin I(\mathbf{a}) \} \quad (i = 1, 2, \dots, Q)$$

$$\text{diffmin}_i = \min \{ \mu_0(x) - \mu_0(y) \mid (x,y) \in C_i, x,y \notin I(\mathbf{a}) \} \quad (i = 1, 2, \dots, Q)$$

$$D_1 = \{ \mu_0(y) + \min_{i > \text{cat}(\mathbf{a},y)} \text{diffmin}_i \mid y \in \mathbf{P}^-(\mathbf{a}) \}$$

$$D_2 = \{ \mu_0(z) - \max_{i < \text{cat}(z,\mathbf{a})} \text{diffmax}_i \mid z \in \mathbf{P}^+(\mathbf{a}) \}$$

$$D_3 = \{ 0.5 (\mu_0(y) + \mu_0(z)) \mid z \in \mathbf{P}^+(\mathbf{a}), y \in \mathbf{P}^-(\mathbf{a}), \text{cat}(\mathbf{a},y) < \text{cat}(z,\mathbf{a}) \}$$

$$G_1 = \{ \mu_0(z) - \min_{i > \text{cat}(z,\mathbf{a})} \text{diffmin}_i \mid z \in \mathbf{P}^+(\mathbf{a}) \}$$

$$G_2 = \{ \mu_0(y) + \max_{i < \text{cat}(\mathbf{a},y)} \text{diffmax}_i \mid y \in \mathbf{P}^-(\mathbf{a}) \}$$

$$G_3 = \{ 0.5 (\mu_0(y) + \mu_0(z)) \mid z \in \mathbf{P}^+(\mathbf{a}), y \in \mathbf{P}^-(\mathbf{a}), \text{cat}(\mathbf{a},y) > \text{cat}(z,\mathbf{a}) \}$$

Démonstration :

1) Démontrons que,  $\forall \mu \in \text{Ech-lée}$ ,  $\text{Max} (G_1 \cup G_2 \cup G_3) < \mu(\mathbf{a})$

$\forall z \in \mathbf{P}^+(\mathbf{a}), \forall i > \text{cat}(z, \mathbf{a}), \forall (x, y) \in C_i$  avec  $x, y \notin \mathbf{I}(\mathbf{a}) : \mu(z) - \mu(\mathbf{a}) < \mu(x) - \mu(y)$

Mais  $\mu(z) = \mu_0(z)$  (car  $z \mathbf{P} \mathbf{a}$ )

et  $\mu(x) = \mu_0(x)$  et  $\mu(y) = \mu_0(y)$  ( car  $x, y \notin \mathbf{I}(\mathbf{a})$  )

Donc

$\forall z \in \mathbf{P}^+(\mathbf{a}), \forall i > \text{cat}(z, \mathbf{a}), \forall (x, y) \in C_i$  avec  $x, y \notin \mathbf{I}(\mathbf{a}) : \mu_0(z) - \mu(\mathbf{a}) < \mu_0(x) - \mu_0(y)$

Donc  $\forall z \in \mathbf{P}^+(\mathbf{a}), \forall i > \text{cat}(z, \mathbf{a}), \mu_0(z) - \mu(\mathbf{a}) < \text{diffmin}_i$

Donc  $\forall z \in \mathbf{P}^+(\mathbf{a}), \mu_0(z) - \mu(\mathbf{a}) < \min_{i > \text{cat}(z, \mathbf{a})} \text{diffmin}_i$

Donc  $\mu(\mathbf{a}) > \text{Max } G_1$

$\forall y \in \mathbf{P}^-(\mathbf{a}), \forall i < \text{cat}(\mathbf{a}, y), \forall (z, w) \in C_i$  avec  $z, w \notin \mathbf{I}(\mathbf{a}) : \mu(z) - \mu(w) < \mu(\mathbf{a}) - \mu(y)$

Mais  $\mu(y) = \mu_0(y)$  (car  $\mathbf{a} \mathbf{P} y$ )

et  $\mu(z) = \mu_0(z)$  et  $\mu(w) = \mu_0(w)$  ( car  $z, w \notin \mathbf{I}(\mathbf{a})$  )

Donc

$\forall y \in \mathbf{P}^-(\mathbf{a}), \forall i < \text{cat}(\mathbf{a}, y), \forall (z, w) \in C_i$  avec  $z, w \notin \mathbf{I}(\mathbf{a}) : \mu_0(z) - \mu_0(w) < \mu(\mathbf{a}) - \mu_0(y)$

Donc  $\forall y \in \mathbf{P}^-(\mathbf{a}), \forall i < \text{cat}(\mathbf{a}, y), \text{diffmax}_i < \mu(\mathbf{a}) - \mu_0(y)$

Donc  $\forall y \in \mathbf{P}^-(\mathbf{a}), \max_{i < \text{cat}(\mathbf{a}, y)} \text{diffmax}_i < \mu(\mathbf{a}) - \mu_0(y)$

Donc  $\mu(\mathbf{a}) > \text{Max } G_2$

$\forall z \in \mathbf{P}^+(\mathbf{a}), \forall y \in \mathbf{P}^-(\mathbf{a})$  tel que  $\text{cat}(\mathbf{a}, y) > \text{cat}(z, \mathbf{a}) : \mu(z) - \mu(\mathbf{a}) < \mu(\mathbf{a}) - \mu(y)$

Mais  $\mu(y) = \mu_0(y)$  et  $\mu(z) = \mu_0(z)$  (car  $z \mathbf{P} \mathbf{a}$  et  $\mathbf{a} \mathbf{P} y$ )

Donc  $\forall z \in \mathbf{P}^+(\mathbf{a}), \forall y \in \mathbf{P}^-(\mathbf{a})$  tel que  $\text{cat}(\mathbf{a}, y) > \text{cat}(z, \mathbf{a}) : \mu_0(z) - \mu(\mathbf{a}) < \mu(\mathbf{a}) - \mu_0(y)$

Donc  $\forall z \in \mathbf{P}^+(\mathbf{a}), \forall y \in \mathbf{P}^-(\mathbf{a})$  tel que  $\text{cat}(\mathbf{a}, y) > \text{cat}(z, \mathbf{a}) : 0.5 (\mu_0(y) + \mu_0(z)) < \mu(\mathbf{a})$

Donc  $\mu(\mathbf{a}) > \text{Max } G_3$

Donc  $\text{Max} (G_1 \cup G_2 \cup G_3) < \mu(\mathbf{a})$

On démontre, de manière analogue, que  $\forall \mu \in \mathcal{Ech}\text{-liée}$ ,  $\mu(\mathbf{a}) < \text{Min}(D_1 \cup D_2 \cup D_3)$ .

2) Démontrons que,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \mu \in \mathcal{Ech}\text{-liée}$  tel que  $\text{Max}(G_1 \cup G_2 \cup G_3) + \varepsilon > \mu(\mathbf{a})$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\delta = \frac{1}{2} \min \{ \varepsilon, \text{Min}(D_1 \cup D_2 \cup D_3) - \text{Max}(G_1 \cup G_2 \cup G_3) \}$

Soit la fonction  $\mu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\mu(x) = \begin{cases} \text{Max}(G_1 \cup G_2 \cup G_3) + \delta & \text{si } x \in \mathbf{I}(\mathbf{a}) \\ \mu_0(x) & \text{si } x \notin \mathbf{I}(\mathbf{a}) \end{cases}$$

Il suffit de démontrer que  $\mu \in \mathcal{Ech}_{1+2}$ , c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in \mathbf{X}, [x \mathbf{P} y \Rightarrow \mu(x) > \mu(y)] \text{ et } [x \mathbf{I} y \Rightarrow \mu(x) = \mu(y)] \quad (1)$$

$$\forall j, s \in \mathbb{N}_{1, \mathbb{Q}} \text{ avec } j < s, \forall (x, y) \in C_s, \forall (z, w) \in C_j, \mu(x) - \mu(y) > \mu(z) - \mu(w) \quad (2)$$

Comme  $\mu_0 \in \mathcal{Ech}_{1+2}$ , et que  $\forall x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{I}(\mathbf{a}) : \mu(x) = \mu_0(x)$ ,

il suffit de vérifier (1) et (2) dans les cas où  $x, y, z$  ou  $w \in \mathbf{I}(\mathbf{a})$ .

Soit  $x, y \in \mathbf{X}$ .

Si  $x \mathbf{I} \mathbf{a}$ , alors  $\mu(x) = \mu(\mathbf{a})$  (trivial par définition de  $\mu$ ).

Si  $x \mathbf{P} \mathbf{a}$  (autrement dit si  $x \in \mathbf{P}^+(\mathbf{a})$ ), alors

$$\mu(\mathbf{a}) = \text{Max}(G_1 \cup G_2 \cup G_3) + \delta < \text{Min}(D_1 \cup D_2 \cup D_3) \leq \text{Min } D_2 \leq \mu_0(x) = \mu(x)$$

Si  $\mathbf{a} \mathbf{P} y$  (autrement dit si  $y \in \mathbf{P}^-(\mathbf{a})$ ), alors

$$\mu(\mathbf{a}) = \text{Max}(G_1 \cup G_2 \cup G_3) + \delta > \text{Max}(G_1 \cup G_2 \cup G_3) \geq \text{Max } G_2 \geq \mu_0(y) = \mu(y)$$

Donc (1) est vérifiée.

Soient  $x, y, z, w \in \mathbf{X}$ ,  $s, j \in \mathbb{N}_{1, \mathbb{Q}}$  avec  $s > j$ .

Si  $(\mathbf{a}, y) \in C_s$  et  $(z, w) \in C_j$  (et  $z, w \notin \mathbf{I}(\mathbf{a})$ ), alors

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{a}) - \mu(y) &= \text{Max}(G_1 \cup G_2 \cup G_3) + \delta - \mu_0(y) \\ &> \text{Max } G_2 - \mu_0(y) \\ &\geq \mu_0(y) + \max_{i < \text{cat}(\mathbf{a}, y)} \text{diffmax}_i - \mu_0(y) \\ &= \max_{i < \text{cat}(\mathbf{a}, y)} \text{diffmax}_i \\ &\geq \mu_0(z) - \mu_0(w) \\ &= \mu(z) - \mu(w) \end{aligned}$$

Si  $(x, \mathbf{a}) \in C_s$  et  $(z, \mathbf{w}) \in C_j$  (et  $z, \mathbf{w} \notin \mathbf{I}(\mathbf{a})$ ), alors

$$\begin{aligned}
 \mu(x) - \mu(\mathbf{a}) &= \mu_0(x) - [ \text{Max} (G_1 \cup G_2 \cup G_3) + \delta ] \\
 &> \mu_0(x) - \text{Min} (D_1 \cup D_2 \cup D_3) \\
 &\geq \mu_0(x) - \text{Min} D_2 \\
 &\geq \mu_0(x) - [ \mu_0(x) - \max_{i < \text{cat}(x, \mathbf{a})} \text{diffmax}_i ] \\
 &= \max_{i < \text{cat}(x, \mathbf{a})} \text{diffmax}_i \\
 &\geq \mu_0(z) - \mu_0(\mathbf{w}) \\
 &= \mu(z) - \mu(\mathbf{w})
 \end{aligned}$$

Si  $(x, y) \in C_s$  et  $(\mathbf{a}, \mathbf{w}) \in C_j$  (et  $x, y \notin \mathbf{I}(\mathbf{a})$ ), alors

$$\begin{aligned}
 \mu(\mathbf{a}) - \mu(\mathbf{w}) &= \text{Max} (G_1 \cup G_2 \cup G_3) + \delta - \mu_0(\mathbf{w}) \\
 &< \text{Min} (D_1 \cup D_2 \cup D_3) - \mu_0(\mathbf{w}) \\
 &\leq \text{Min} D_1 - \mu_0(\mathbf{w}) \\
 &\leq \mu_0(\mathbf{w}) + \min_{i > \text{cat}(\mathbf{a}, \mathbf{w})} \text{diffmin}_i - \mu_0(\mathbf{w}) \\
 &= \min_{i > \text{cat}(\mathbf{a}, \mathbf{w})} \text{diffmin}_i \\
 &\leq \mu_0(x) - \mu_0(y) \\
 &= \mu(x) - \mu(y)
 \end{aligned}$$

Si  $(x, y) \in C_s$  et  $(z, \mathbf{a}) \in C_j$  (et  $x, y \notin \mathbf{I}(\mathbf{a})$ ), alors

$$\begin{aligned}
 \mu(z) - \mu(\mathbf{a}) &= \mu_0(z) - [ \text{Max} (G_1 \cup G_2 \cup G_3) + \delta ] \\
 &< \mu_0(z) - \text{Max} (G_1 \cup G_2 \cup G_3) \\
 &\leq \mu_0(z) - \text{Max} G_1 \\
 &\leq \mu_0(z) - [ \mu_0(z) - \min_{i > \text{cat}(z, \mathbf{a})} \text{diffmin}_i ] \\
 &= \min_{i > \text{cat}(z, \mathbf{a})} \text{diffmin}_i \\
 &\leq \mu_0(x) - \mu_0(y) \\
 &= \mu(x) - \mu(y)
 \end{aligned}$$

Si  $[(x, \mathbf{a}) \in C_s \text{ et } (z, \mathbf{a}) \in C_j]$  ou  $[(\mathbf{a}, y) \in C_s \text{ et } (\mathbf{a}, \mathbf{w}) \in C_j]$ ,

alors (2) est trivialement vérifiée puisque  $\mu_0 \in \mathcal{Ech}_{1+2}$

Si  $(\mathbf{a}, y) \in C_s$  et  $(z, \mathbf{a}) \in C_j$ , alors

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{a}) - \mu(y) > \mu(z) - \mu(\mathbf{a}) &\Leftrightarrow \mu(\mathbf{a}) - \mu_0(y) > \mu_0(z) - \mu(\mathbf{a}) \\ &\Leftrightarrow \mu(\mathbf{a}) > 0.5 (\mu_0(y) + \mu_0(z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mais } \mu(\mathbf{a}) &= \text{Max} (G_1 \cup G_2 \cup G_3) + \delta \\ &> \text{Max } G_3 \\ &\geq 0.5 (\mu_0(y) + \mu_0(z)) \end{aligned}$$

Donc  $\mu(\mathbf{a}) - \mu(y) > \mu(z) - \mu(\mathbf{a})$ .

Si  $(x, \mathbf{a}) \in C_s$  et  $(\mathbf{a}, w) \in C_j$ , démonstration analogue.

□

Remarque : les formules précédentes peuvent évidemment être « raffinées » mais les lourdeurs d'écriture consécutives à leur formulation « optimale » aurait nui considérablement à leur clarté. Il va de soi que les algorithmes associés à ces formules tiennent compte de ces optimisations et sont basés sur les formules qui suivent.

$$\begin{aligned} \text{Notations : } \forall i \in \mathbb{N}_{1, Q-1} : \quad \text{next}(i) &= \min (\{ j \in \mathbb{N}_{i+1, Q} \mid C_j \neq \emptyset \} \cup \{ Q+1 \}) \\ \text{prev}(i) &= \max \{ j \in \mathbb{N}_{0, i-1} \mid C_j \neq \emptyset \} \\ \text{next}(Q) &= Q+1 \end{aligned}$$

On conviendra que  $\text{diffmin}_{Q+1} = +\infty$  et  $\text{diffmax}_{Q+1} = -\infty$

Si on note

$$D'_1 = \{ \mu_0(y) + \text{diffmin}_{\text{next}(\text{cat}(\mathbf{a}, y))} \mid y \in \mathbf{P}^-(\mathbf{a}) \}$$

$$D'_2 = \{ \mu_0(z) - \text{diffmax}_{\text{prev}(\text{cat}(z, \mathbf{a}))} \mid z \in \mathbf{P}^+(\mathbf{a}) \}$$

$$D_3 = \{ 0.5 (\mu_0(y) + \mu_0(z)) \mid z \in \mathbf{P}^+(\mathbf{a}), y \in \mathbf{P}^-(\mathbf{a}), \text{cat}(\mathbf{a}, y) < \text{cat}(z, \mathbf{a}) \}$$

$$G'_1 = \{ \mu_0(z) - \text{diffmin}_{\text{next}(\text{cat}(z, \mathbf{a}))} \mid z \in \mathbf{P}^+(\mathbf{a}) \}$$

$$G'_2 = \{ \mu_0(y) + \text{diffmax}_{\text{prev}(\text{cat}(\mathbf{a}, y))} \mid y \in \mathbf{P}^-(\mathbf{a}) \}$$

$$G_3 = \{ 0.5 (\mu_0(y) + \mu_0(z)) \mid z \in \mathbf{P}^+(\mathbf{a}), y \in \mathbf{P}^-(\mathbf{a}), \text{cat}(\mathbf{a}, y) > \text{cat}(z, \mathbf{a}) \},$$

on peut démontrer que:

$$\begin{array}{l} \inf_{\mu \in \text{Coh-Liée}} \mu(\mathbf{a}) = \text{Max} (G'_1 \cup G'_2 \cup G_3) \\ \sup_{\mu \in \text{Coh-Liée}} \mu(\mathbf{a}) = \text{Min} (D'_1 \cup D'_2 \cup D_3) \end{array}$$

Remarque : il est même possible d' « optimiser » les ensembles  $D_3$  et  $G_3$ , en ne tenant compte que de certains des couples  $(\mathbf{a}, y)$  et  $(z, \mathbf{a})$ , ce que nous avons fait dans l'algorithme.

#### 1.8.4. Généralisation à une information de type 1+2+3

1) Les programmes linéaires PLinterv-libre peuvent être généralisés à une information préférentielle  $\{ \mathbf{P}, \mathbf{I}, ? = \phi, \mathbf{P}^e, \mathbf{R}^b \}$  où  $\mathbf{R}^b \neq \phi$ . Il suffit d'y ajouter les contraintes

$$\forall ( (a_r, a_s), (a_t, a_u), (\alpha, \beta) ) \in \mathbf{R}^b, \quad \alpha (x_t - x_u) \leq x_r - x_s \leq \beta (x_t - x_u) \quad (t6)$$

2) L'algorithme de calcul des intervalles liés peut également être facilement étendu à ce type d'information.

En effet, toute contrainte de la forme

$$\alpha \leq \frac{\mu(x) - \mu(y)}{\mu(z) - \mu(w)} \leq \beta$$

où au moins un des éléments  $x, y, z$  et  $w$  serait  $\mathbf{a}$  pourrait s'écrire

$$\gamma \leq \mu(\mathbf{a}) \leq \delta$$

Par exemple,

$$\alpha \leq \frac{\mu(\mathbf{a}) - \mu(y)}{\mu(z) - \mu(\mathbf{a})} \leq \beta \quad \text{peut s'écrire} \quad \frac{\alpha \mu_0(z) + \mu_0(y)}{1 + \alpha} \leq \mu(\mathbf{a}) \leq \frac{\beta \mu_0(z) + \mu_0(y)}{1 + \beta}$$

## 1.9. Simplifications du mode de questionnement 3

On appelle **information de type 3**, l'information préférentielle obtenue en utilisant le mode de questionnement suivant, appelé mode de **questionnement 3** :

$\forall (x,y), (z,w) \in \mathbf{P}$  avec  $(x,y) \neq (z,w)$ , on pose la question :

Q4 : si vous représentiez  $\Delta_{\text{att}}(z,w)$  par un segment de longueur 1, entre quelles valeurs situeriez-vous la longueur du segment représentant  $\Delta_{\text{att}}(x,y)$  ?

La réponse à cette question doit être de la forme « entre  $\alpha$  et  $\beta$  » (où  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \alpha \leq \beta$ ) ou « je ne sais pas ».

La réponse « entre  $\alpha$  et  $\beta$  » à la question Q4 sera notée :  $\alpha \leq \frac{\Delta_{\text{att}}(x,y)}{\Delta_{\text{att}}(z,w)} \leq \beta$

Comme il est assez difficile de répondre à une telle question, nous proposerons plusieurs simplifications de ce mode de questionnement.

### 1.9.1. Première simplification

Dans cette première simplification, on va tenir compte de l'information préférentielle déjà fournie par **J** pour « borner le rapport  $\frac{\Delta_{\text{att}}(x,y)}{\Delta_{\text{att}}(z,w)}$  » :

$\forall (x,y), (z,w) \in \mathbf{P}$  avec  $(x,y) \neq (z,w)$ , on calcule :

$$- \quad \text{Inf}_{\text{att}}(x,y,z,w) = \inf_{\mu \in \text{Ech}_{1+2+3}} \frac{\mu(x) - \mu(y)}{\mu(z) - \mu(w)} \quad \text{et} \quad \text{Sup}_{\text{att}}(x,y,z,w) = \sup_{\mu \in \text{Ech}_{1+2+3}} \frac{\mu(x) - \mu(y)}{\mu(z) - \mu(w)}$$

On a évidemment :

$$\text{Inf}_{\text{att}}(x,y,z,w) \geq 0 \quad \text{et} \quad \text{Sup}_{\text{att}}(x,y,z,w) > 0 \quad (\text{éventuellement } +\infty)$$

Ces bornes permettent d'améliorer le mode de questionnement 3 :

$\forall (x,y), (z,w) \in \mathbf{P}$  avec  $(x,y) \neq (z,w)$ , on pose la question :

Q4 : si vous représentiez  $\Delta_{\text{att}}(z,w)$  par un segment de longueur 1, entre quelles valeurs situeriez-vous la longueur  $L$  du segment représentant  $\Delta_{\text{att}}(x,y)$ , sachant qu'il résulte de l'information disponible que

$$\text{Inf}_{\text{att}}(x,y,z,w) \leq L \leq \text{Sup}_{\text{att}}(x,y,z,w) \quad ?$$

### 1.9.2. Deuxième simplification

En pratique, répondre à la question précédente reste encore très difficile puisque cela nécessite une comparaison faisant intervenir 4 niveaux. C'est pourquoi nous avons envisagé une deuxième simplification où nous prenons pour « deuxième couple »  $(z,w)$  le couple  $(H, L)$ , où  $H$  et  $L$  sont deux « états de référence » précisés par  $\mathbf{J}$  et qui font sens pour lui (nous reviendrons sur la définition de tels états dans le chapitre 2) :

$\forall (x,y) \in \mathbf{P}$  avec  $(x,y) \neq (H,L)$ , on pose la question :

Q4 : si vous représentiez  $\Delta_{\text{att}}(H,L)$  par un segment de longueur 1,  
entre quelles valeurs situeriez-vous la longueur  $\mathbb{L}$  du segment  
représentant  $\Delta_{\text{att}}(x,y)$ ,  
sachant qu'il résulte de l'information disponible que

$$\text{Inf}_{\text{att}}(x,y,H,L) \leq \mathbb{L} \leq \text{Sup}_{\text{att}}(x,y,H,L) ?$$

### 1.9.3. Troisième simplification

Même s'il devient envisageable en pratique de répondre à une telle question, il est intéressant d'en encore la simplifier, en prenant systématiquement pour  $y$  l'état de référence  $L$ .

$\forall x \in \mathbf{X}$  avec  $x \neq L$  et  $(x,H) \notin \mathbf{I}$ , on pose la question :

Q4 : si vous représentiez  $\Delta_{\text{att}}(H,L)$  par un segment de longueur 1,  
entre quelles valeurs situeriez-vous la longueur  $\mathbb{L}$  du segment  
représentant  $\Delta_{\text{att}}(x,L)$ ,  
sachant qu'il résulte de l'information disponible que

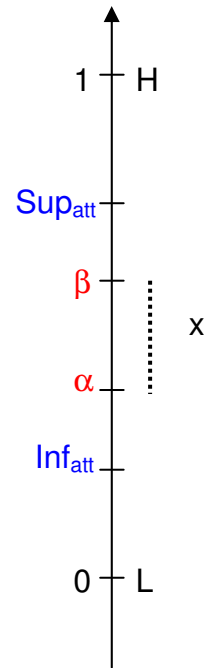
$$\text{Inf}_{\text{att}}(x,L,H,L) \leq \mathbb{L} \leq \text{Sup}_{\text{att}}(x,L,H,L) ?$$

$\forall x \in \mathbf{X}$  avec  $L \neq x$ , on pose la question :

Q4 : si vous représentiez  $\Delta_{\text{att}}(H,L)$  par un segment de longueur 1,  
entre quelles valeurs situeriez-vous la longueur  $\mathbb{L}$  du segment  
représentant  $\Delta_{\text{att}}(L,x)$ ,  
sachant qu'il résulte de l'information disponible que

$$\text{Inf}_{\text{att}}(L,x,H,L) \leq \mathbb{L} \leq \text{Sup}_{\text{att}}(L,x,H,L) ?$$

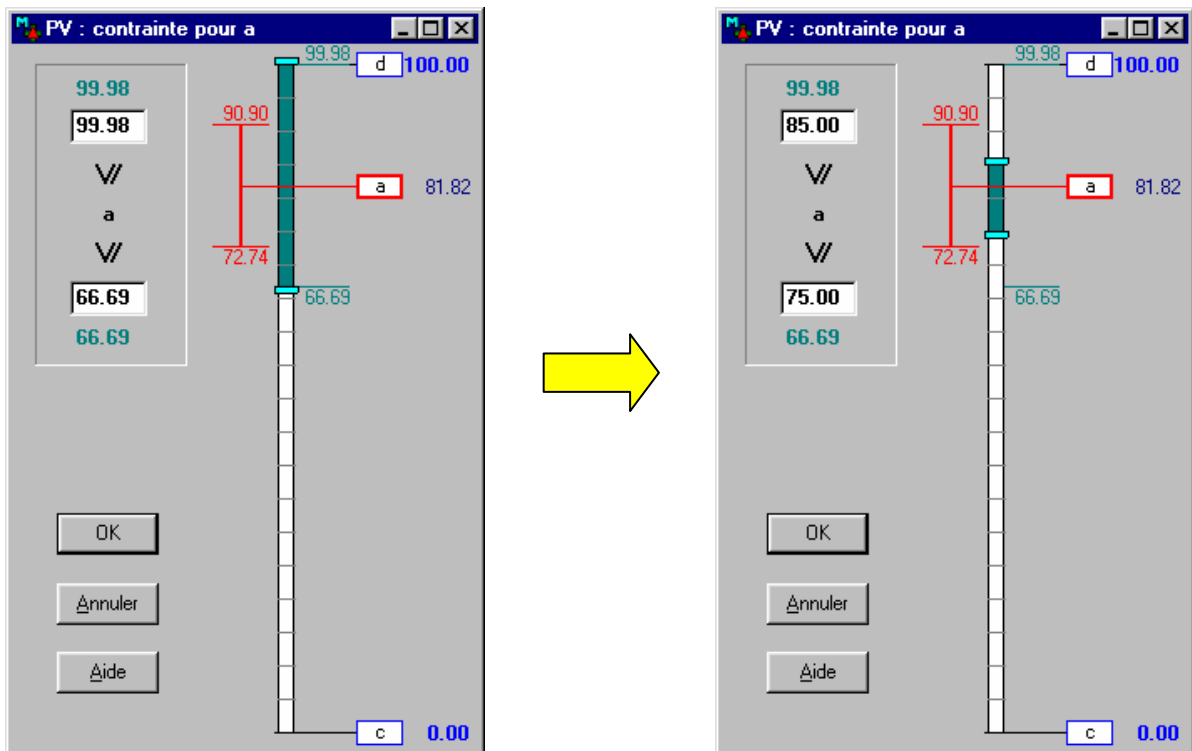
Observons que, graphiquement, si on a positionné H et L sur un axe vertical, la question Q4 revient à demander de placer sur cet axe un intervalle dans lequel doit se trouver x (voir graphique ci-contre correspondant au cas x P L).



#### 1.9.4. Quatrième simplification

Lorsqu'on dispose d'une représentation numérique de l'information, il est permis à J de donner l'information demandée lors du questionnement 3 sous forme graphique.

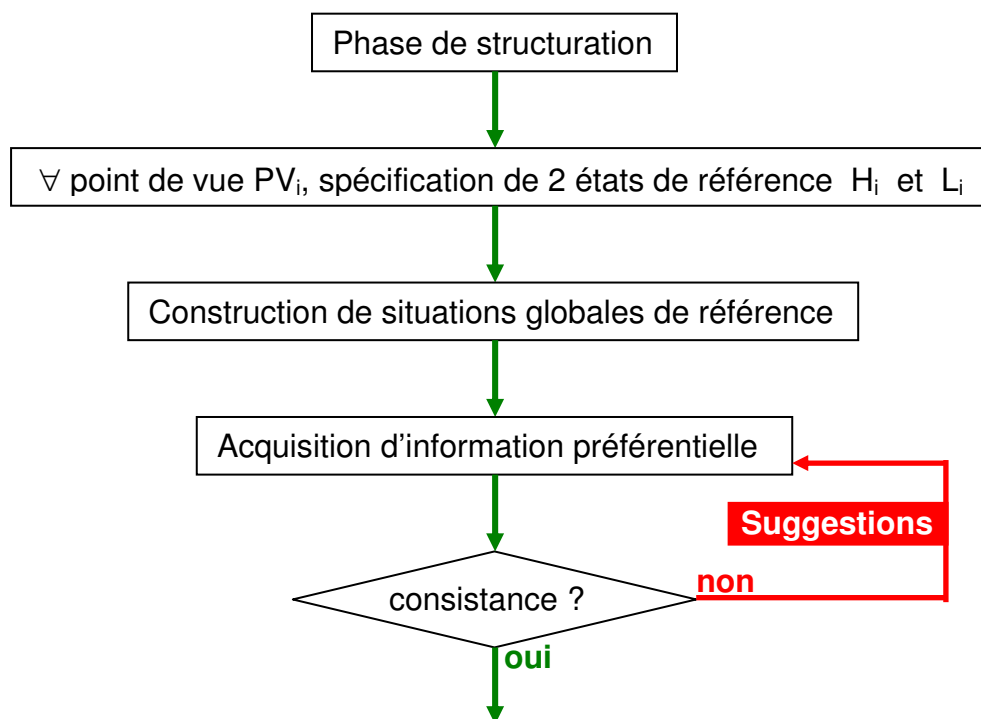
Dans l'exemple du paragraphe 1.8.1, où l'intervalle libre associé à **a** est [66.69,99.98] et l'intervalle lié associé à **a** est [72.74,90.9], J peut, par exemple, décider que  $\mu(\mathbf{a})$  doit être comprise entre 75 et 85 :



## Chapitre 2 : l'agrégation dans le cadre de l'approche d'aide multicritère à la décision MACBETH.

Afin de bien faire comprendre la portée de notre travail au niveau de la phase d'agrégation, il est important de présenter les grandes lignes de l'approche MACBETH, non pas seulement, comme dans le premier chapitre, en ce qui concerne l'acquisition de l'information préférentielle, mais bien dans le cadre général d'une étude d'aide multicritère à la décision.

C'est la raison pour laquelle le paragraphe 2.1 est un paragraphe introductif dont l'objet est d'explicitier le diagramme suivant, qui représente les premières étapes d'une étude d'aide à la décision dans l'optique MACBETH.



C'est après ces différentes étapes que se situe, dans la méthodologie MACBETH pour l'aide multicritère à la décision, la phase d'agrégation. Celle-ci repose essentiellement sur les deux idées fondamentales suivantes :

- 1) définir la notion d'attractivité globale ( c'est-à-dire en tenant compte de tous les points de vue ) sur base d'un modèle d'agrégation additif
- 2) déclarer qu'une action **a** est globalement plus attractive qu'une action **b** lorsque l'attractivité globale de **a** est supérieure à l'attractivité globale de **b**.

Dans le paragraphe 2.2 de ce chapitre, nous montrons comment nous avons procédé pour définir, de manière rigoureuse tout en se plaçant dans l'optique MACBETH, la notion d'attractivité globale. Dans le paragraphe 2.3, nous faisons de même pour la notion de comparaison globale et situons notre façon de faire par rapport au problème de la signifiante. Le paragraphe 2.4 est consacré à la présentation des algorithmes permettant de mettre en pratique les idées théoriques du paragraphe 2.3. Dans le paragraphe 2.5, nous expliquons comment, dans le logiciel MACBETH, peuvent s'effectuer les comparaisons globales des actions et comment se présentent les résultats de ces comparaisons. Dans ce même paragraphe, nous montrons comment nos idées peuvent aussi s'appliquer à l'étude de la robustesse des résultats d'une étude d'aide à la décision.

## 2.1. Introduction à la méthodologie MACBETH

Soit **A** un ensemble d'actions potentielles qu'une personne ou un groupe de personnes, que nous noterons **J**, souhaite comparer en tenant compte de plusieurs points de vue simultanément.

### 2.1.1. Structuration du problème

La première étape d'une étude d'aide à la décision consiste à structurer le problème.

Cette phase difficile consiste notamment à identifier les points de vue qu'il convient de prendre en compte pour comparer les actions. Par **point de vue**, on entend un « aspect du contexte décisionnel rencontrant une préoccupation de **J** ». Il est commode de représenter l'ensemble des points de vue sous la forme d'un **arbre** (voir ci-après).

Une étape importante de la phase de structuration consiste à sélectionner, parmi ces points de vue, un sous-ensemble de **points de vue fondamentaux**. Ceux-ci doivent satisfaire un certain nombre de propriétés parmi lesquelles la plus importante, pour ce qui nous concerne, est qu'ils doivent être indépendants au sens des préférences. Sans entrer dans des détails qui nous éloigneraient de l'objet de notre travail, cette propriété signifie qu'il est possible d'acquérir de l'information préférentielle concernant l'attractivité des actions relativement à chaque point de vue fondamental considéré séparément des autres.

Dans la suite de ce chapitre, nous supposerons que la phase de structuration du problème a conduit à la construction d'un arbre de points de vue parmi lesquels **K** points de vue fondamentaux ont été mis en évidence :  $PV_1, PV_2, \dots, PV_K$ .

#### Exemple

« Une université doit acheter un grand nombre d'imprimantes à jet d'encre.

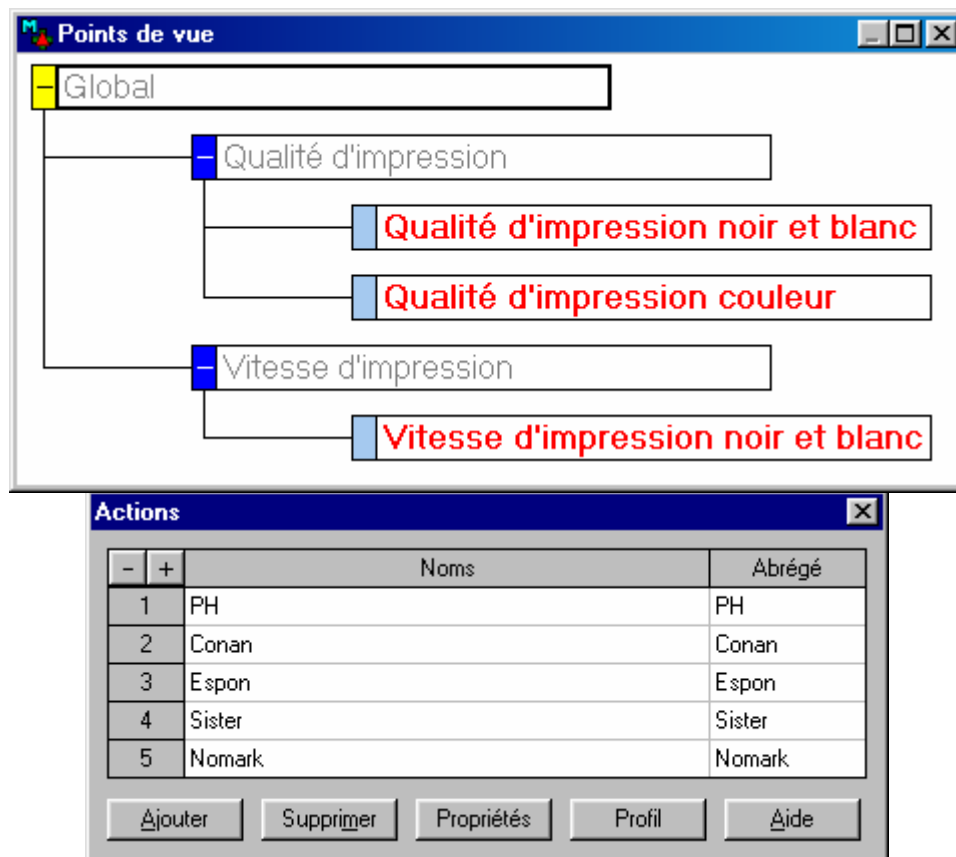
La personne **J** responsable de cet achat doit choisir parmi les cinq modèles (de prix similaires) suivants :

- PH
- Conan
- Espon
- Sister
- Nomark

en tenant compte des **points de vue** (fondamentaux) suivants:

- qualité d'impression en noir et blanc en mode courrier ( abrégé : NB )
- qualité d'impression en couleurs en mode courrier ( abrégé : Color )
- vitesse d'impression en noir et blanc en mode courrier ( abrégé : Speed ) » .

Dans le logiciel que nous avons créé, ces informations apparaissent comme suit :



Lorsque les points de vue fondamentaux ont été déterminés, l'étape suivante de la phase de structuration consiste à associer à chacun d'entre eux un « *descripteur* » d'impacts.

Par définition, un **descripteur associé à  $PV_i$**  est un ensemble de niveaux, que nous noterons  $D_i$ , en termes desquels peuvent être décrits les **impacts** (les performances, les conséquences) des actions potentielles sur  $PV_i$ .

Il est commode, pour présenter un descripteur, d'ordonner ses niveaux par ordre d'**attractivité locale** (c'est-à-dire relative au seul  $PV_i$ ) décroissante, ce qui est possible compte tenu de l'hypothèse d'indépendance au sens des préférences des points de vue fondamentaux.

Signalons que le logiciel permet de prendre les **actions potentielles comme niveaux de descripteur**. Ceci correspond à une situation dans laquelle **J** connaît bien les actions et qu'il n'est pas nécessaire de spécifier explicitement leur impact sur le point de vue pour qu'il puisse les comparer. Nous écrirons alors  $D_i = A_{(i)}$ , faisant ainsi apparaître que, dans ce cas, les actions ne doivent pas être vues globalement mais uniquement en relation avec  $PV_i$ .

Symboliquement, on pourrait écrire :  $A = A_{(1)} \times A_{(2)} \times \dots \times A_{(K)}$ .

Exemple (suite)

**Propriétés de Qualité d'impression noir et blanc** [X]

Qualité d'impression noir et blanc [NB]

Niveaux du descripteur :

-	+	Noms	Abrégé
1		"On croirait une impression laser"	NB1
2		Pas de bavures, quelques défauts difficiles à voir à l'oeil nu	NB2
3		Très rares bavures minimales, quelques légers défauts imperceptibles lors d'une lecture rapide	NB3
4		Quelques bavures peu importantes, peu ou pas d'"ondulations".	NB4
5		Quelques grosses bavures, petits caractères difficiles à lire, quelques "ondulations".	NB5
6		" Gutenberg aurait pu faire aussi bien "	NB6

**Propriétés de Qualité d'impression couleur** [X]

Qualité d'impression couleur [Color]

Niveaux du descripteur :

-	+	Noms	Abrégé
1		"Les photos imprimées semblent sortir d'un labo photo classique"	col1
2		Excellent rendu des couleurs, peut servir à reproduire des photos	col2
3		Bon rendu des couleurs sauf lors d'impression de photos	col3
4		Rendu des couleurs satisfaisant pour du dessin mais inutile de penser à imprimer une photo	col4
5		Qualité des couleurs juste suffisante pour agrémenter du texte	col5
6		"Le bleu n'est pas bleu, le vert n'est pas vert, le rouge n'est pas rouge"	col6

**Propriétés de Vitesse d'impression en noir et blanc** [X]

Vitesse d'impression en noir et blanc [Speed]

Niveaux du descripteur :

-	+	Noms	Abrégé
1		au moins 11 pages par minute	vit1
2		10 pages par minute	vit2
3		9 pages par minute	vit3
4		8 pages par minute	vit4
5		7 pages par minute	vit5
6		6 pages par minute	vit6
7		au plus 5 pages par minute	vit7

## 2.1.2. Spécification de deux états de référence

Pour **chaque** point de vue fondamental  $PV_i$ , on demande à **J** de spécifier **deux états de référence** ( que nous noterons  $H_i$  et  $L_i$  , avec  $H_i$  plus attractif que  $L_i$  ) qui font sens pour lui .

Ce sens peut provenir

- soit du **caractère réaliste et concret** de ces états lorsqu'ils sont explicitement décrits,
- soit du **caractère symbolique** de ces états lorsqu'ils sont définis par leur niveau d'attractivité (ou de satisfaction), en tenant compte du seul point de vue considéré.

Ainsi, par exemple, on pourrait prendre :

$H_i$  : état tout à fait satisfaisant en tenant compte du seul  $PV_i$

(un tel état pourrait être appelé « **bon<sub>i</sub>** »)

$L_i$  : état ni satisfaisant, ni insatisfaisant en tenant compte du seul  $PV_i$

(un tel état pourrait être appelé « **neutre<sub>i</sub>** ») .

### Exemple (suite)

-	+	Noms	Abrégé
1		"On croirait une impression laser"	NB1
2		Pas de bavures, quelques défauts difficiles à voir à l'oeil nu	H1=NB2
3		Très rares bavures minimales, quelques légers défauts imperceptibles lors d'une lecture rapide	NB3
4		Quelques bavures peu importantes, peu ou pas d'"ondulations".	NB4
5		Quelques grosses bavures, petits caractères difficiles à lire, quelques "ondulations".	L1=NB5
6		" Gutenberg aurait pu faire aussi bien "	NB6

-	+	Noms	Abrégé
1		"Les photos imprimées semblent sortir d'un labo photo classique"	col1
2		Excellent rendu des couleurs, peut servir à reproduire des photos	H2=col2
3		Bon rendu des couleurs sauf lors d'impression de photos	col3
4		Rendu des couleurs satisfaisant pour du dessin mais inutile de penser à imprimer une photo	col4
5		Qualité des couleurs juste suffisante pour agrémenter du texte	L2=col5
6		"Le bleu n'est pas bleu, le vert n'est pas vert, le rouge n'est pas rouge"	col6

-	+	Noms	Abrégé
1		au moins 11 pages par minute	vit1
2		10 pages par minute	H3=vit2
3		9 pages par minute	vit3
4		8 pages par minute	vit4
5		7 pages par minute	vit5
6		6 pages par minute	L3=vit6
7		au plus 5 pages par minute	vit7

Signalons que les états  $H_i$  et  $L_i$  peuvent être

- soit spécifiés parmi les niveaux du descripteur  $D_i$ ,
- soit ajoutés à ceux-ci.

Dans chacun des cas, nous noterons  $X_i = D_i \cup \{ H_i, L_i \}$ .

Lorsqu'on dispose de deux états de référence sur chaque point de vue fondamental, il est possible de définir des « situations globales de référence ».

### 2.1.3. Construction de situations globales de référence

Cette étape consiste à définir  $(K+1)$  « **situations globales de référence** », notées  $[PV_1], [PV_2], \dots, [PV_K], [L]$ , de la façon suivante :

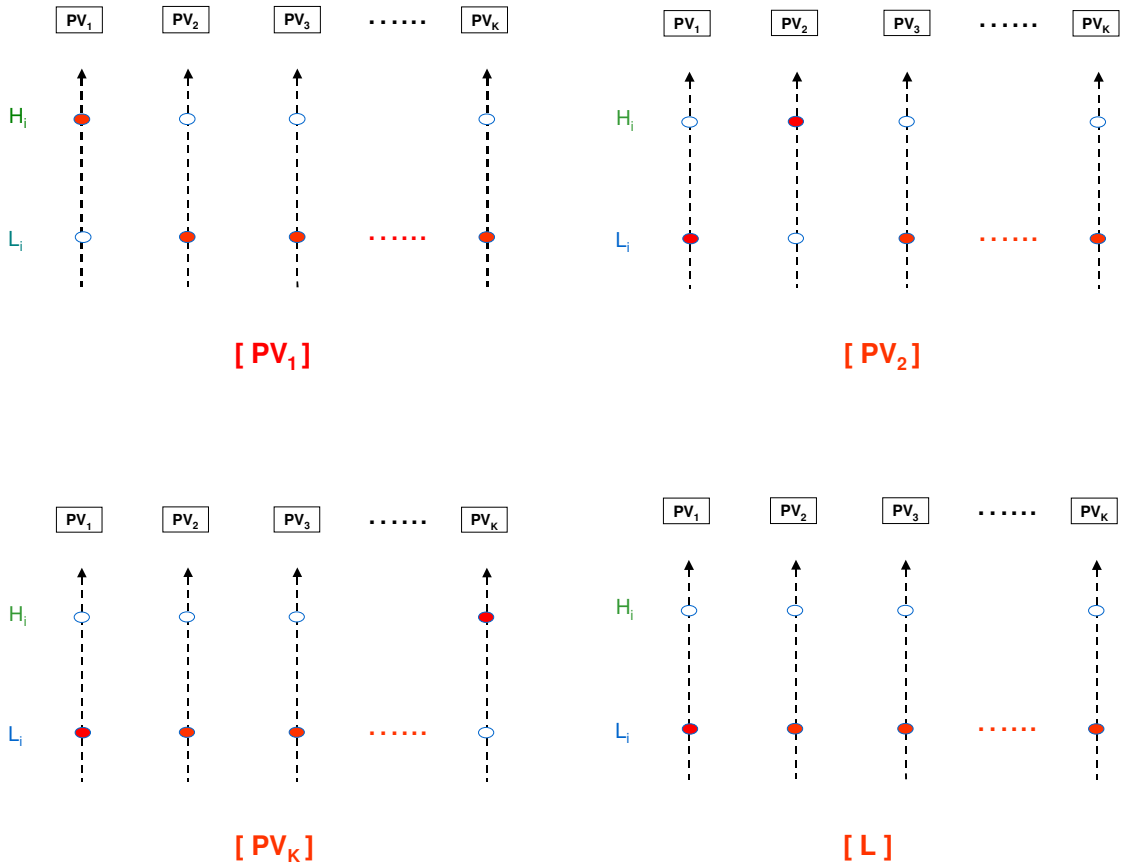
- $\forall i \in \mathbb{N}_{1,K} : [PV_i] = \begin{cases} H_i & \text{sur le point de vue } PV_i \\ L_j & \text{sur chaque point de vue } PV_j \text{ avec } j \neq i \end{cases}$
- $[L] = L_i$  sur chaque point de vue  $PV_i, i \in \{ 1, 2, \dots, K \}$

Plus rigoureusement,

$[PV_1], [PV_2], \dots, [PV_K], [L]$  sont  $(K+1)$  éléments de  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_K$  définis par

- $\forall i \in \mathbb{N}_{1,K} : [PV_i]_j = \begin{cases} H_i & \text{si } j=i \\ L_j & \text{si } j \neq i \end{cases}$
- $[L] = (L_1, L_2, \dots, L_K)$

Il est facile de donner une représentation visuelle de ces situations :



*Exemple (suite)*

Sit. glob. réf.	NB	Color	Speed
[ NB ]	NB1	col1	vit1
[ Color ]	<b>H1=NB2</b>	H2=col2	H3=vit2
[ Speed ]	NB3	col3	vit3
[ L ]	NB4	col4	vit4
	L1=NB5	<b>L2=col5</b>	vit5
	NB6	col6	<b>L3=vit6</b>
			vit7

$[ NB ] = ( H_1, L_2, L_3 )$

Sit. glob. réf.	NB	Color	Speed
[ NB ]	NB1	col1	vit1
[ Color ]	H1=NB2	<b>H2=col2</b>	H3=vit2
[ Speed ]	NB3	col3	vit3
[ L ]	NB4	col4	vit4
	<b>L1=NB5</b>	L2=col5	vit5
	NB6	col6	<b>L3=vit6</b>
			vit7

$[ Color ] = ( L_1, H_2, L_3 )$

Sit. glob. réf.	NB	Color	Speed
[ NB ]	NB1	col1	vit1
[ Color ]	H1=NB2	H2=col2	H3=vit2
[ Speed ]	NB3	col3	vit3
[ L ]	NB4	col4	vit4
	<b>L1=NB5</b>	<b>L2=col5</b>	vit5
	NB6	col6	L3=vit6
			vit7

$[ Speed ] = ( L_1, L_2, H_3 )$

Sit. glob. réf.	NB	Color	Speed
[ NB ]	NB1	col1	vit1
[ Color ]	H1=NB2	H2=col2	H3=vit2
[ Speed ]	NB3	col3	vit3
[ L ]	NB4	col4	vit4
	<b>L1=NB5</b>	<b>L2=col5</b>	vit5
	NB6	col6	<b>L3=vit6</b>
			vit7

$[ L ] = ( L_1, L_2, L_3 )$

#### 2.1.4. Acquisition d'une information préférentielle

L'étape suivante consiste à recueillir auprès de **J** :

- $\forall i \in \mathbb{N}_{1,K}$ , une information concernant l'attractivité *locale* (en tenant compte du seul  $PV_i$ ) des éléments de  $\mathbf{X}_i = \mathbf{D}_i \cup \{ H_i, L_i \}$  ;
- une information concernant l'attractivité *globale* des éléments de l'ensemble des situations globales de référence  $\mathbf{X}_0 = \{ [ PV_1 ], [ PV_2 ], \dots, [ PV_K ], [ L ] \}$ .

#### **Remarque**

1°) Pour comparer deux situations globales de référence  $[ PV_i ]$  et  $[ PV_j ]$ , on peut poser la question suivante :

« partant de la situation de référence  $[ L ]$ ,

préfèreriez-vous - passer de l'état  $L_i$  à l'état  $H_i$  sur  $PV_i$

ou - passer de l'état  $L_j$  à l'état  $H_j$  sur  $PV_j$  ? »

Si la réponse est « ... sur  $PV_i$  »,

on en déduit que  $[ PV_i ]$  est plus attractive que  $[ PV_j ]$ .

Si la réponse est « ... sur  $PV_j$  »,

on en déduit que  $[ PV_j ]$  est plus attractive que  $[ PV_i ]$ .

Si la réponse est « c'est pareil »,

on en déduit que  $[ PV_i ]$  est aussi attractive que  $[ PV_j ]$ .

2°)  $\forall i \in \mathbb{N}_{1,K}$ ,  $[ PV_i ]$  est plus attractif que  $[ L ]$ .

*Exemple (suite)*

Qualité d'impression noir et blanc						
	NB1	H1=NB2	NB3	NB4	L1=NB5	NB6
NB1	nulle	faible	modérée	positive	positive	positive
H1=NB2		nulle	tr. faible	modérée	positive	positive
NB3			nulle	faible	forte	positive
NB4				nulle	faible	positive
L1=NB5					nulle	tr. faible
NB6						nulle

Qualité d'impression couleur						
	col1	H2=col2	col3	col4	L2=col5	col6
col1	nulle	faible	forte	positive	positive	positive
H2=col2		nulle	tr. faible	modérée	positive	positive
col3			nulle	tr. faible	modérée	positive
col4				nulle	faible	positive
L2=col5					nulle	modérée
col6						nulle

Vitesse d'impression noir et blanc							
	vit1	H3=vit2	vit3	vit4	vit5	L3=vit6	vit7
vit1	nulle	modérée	forte	positive	positive	positive	positive
H3=vit2		nulle	faible	forte	positive	positive	positive
vit3			nulle	faible	forte	positive	positive
vit4				nulle	faible	forte	positive
vit5					nulle	faible	forte
L3=vit6						nulle	modérée
vit7							nulle

Global				
	[ NB ]	[ Color ]	[ Speed ]	[ L ]
[ NB ]	nulle	positive	positive	positive
[ Color ]		nulle	positive	positive
[ Speed ]			nulle	positive
[ L ]				nulle

### 2.1.5. Consistance de l'information préférentielle ?

$\forall i \in \{0,1,2, \dots, K\}$ ,

lors du recueil d'une information  $\{ P_i, I_i, ?_i, P_i^e, R_i^b \}$ , on vérifie que

$$Ech_{1+2+3} ( X_i, P_i, I_i, P_i^e, R_i^b ) \neq \phi \quad (\text{voir 1.5}).$$

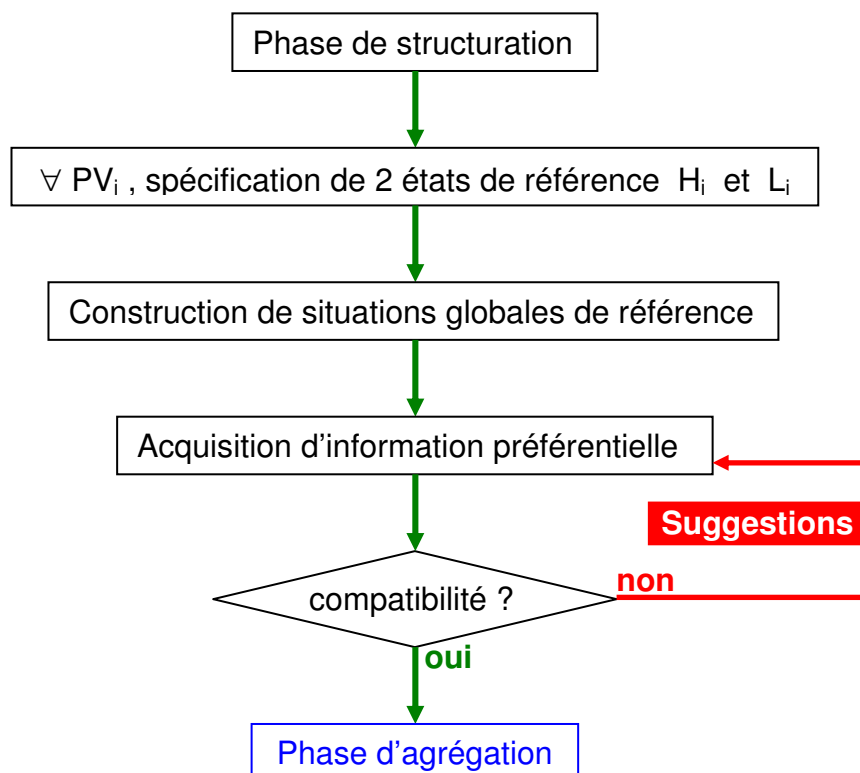
Si  $\exists i \in \{0,1,2, \dots, K\}$  tel que  $Ech_{1+2+3} ( X_i, P_i, I_i, P_i^e, R_i^b ) = \phi$ , autrement dit, en cas d' inconsistance, le logiciel

- propose des suggestions de modifications (« minimales ») qui élimineront l'inconsistance (voir 1.6.5) ;
- présente quelques « systèmes élémentaires incompatibles (SEI) » où apparaissent les jugements qui sont à l'origine de l'incompatibilité et l'« effet » de chaque suggestion sur chaque SEI.

Le décideur sera invité à revoir ses jugements en s'aidant (éventuellement) de ces suggestions.

*Des exemples de cas d'inconsistance ont été présentés en 1.5.*

Dans les paragraphes suivants, nous présenterons la phase dite « d'agrégation ».



## 2.2. Construction d'une échelle d'attractivité globale

A ce stade, on dispose d'informations préférentielles consistantes :

$$\forall i \in \mathbb{N}_{0,K} : \text{Ech}_{1+2+3}(\mathbf{X}_i, \mathbf{P}_i, \mathbf{I}_i, \mathbf{P}_i^e, \mathbf{R}_i^b) \neq \emptyset$$

$$\text{Soient } n_0 \in \text{Ech}_{1+2+3}(\mathbf{X}_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{I}_0, \mathbf{P}_0^e, \mathbf{R}_0^b),$$

$$n_1 \in \text{Ech}_{1+2+3}(\mathbf{X}_1, \mathbf{P}_1, \mathbf{I}_1, \mathbf{P}_1^e, \mathbf{R}_1^b),$$

...

$$n_K \in \text{Ech}_{1+2+3}(\mathbf{X}_K, \mathbf{P}_K, \mathbf{I}_K, \mathbf{P}_K^e, \mathbf{R}_K^b)$$

Notre idée est de définir, pour ces échelles  $n_0, n_1, \dots, n_K$ , une **échelle d'attractivité globale** sur  $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_K$  en utilisant, conformément à l'optique MACBETH, le modèle d'agrégation additif, c'est-à-dire

$$\text{att}_{\text{Glob.}(n_0, n_1, \dots, n_K)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^K c_i \cdot n_i(x_i)$$

et de déterminer les coefficients  $c_i$  de telle sorte que,

sur le sous-ensemble  $\mathbf{X}_0$  de  $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_K$ ,  $\text{att}_{\text{Glob.}(n_0, n_1, \dots, n_K)}$  « prolonge »  $n_0$ .

Il ne nous reste dès lors plus qu'à préciser ce que nous entendons par « prolongement » pour obtenir une définition complète de la notion d'échelle d'attractivité globale (observons que celle-ci est relative aux échelles  $n_0, n_1, \dots, n_K$ , comme cela apparaît bien dans la notation que nous utilisons).

$$\text{Notons } \mathcal{X}\text{Ech}_{1+2+3} = \text{Ech}_{1+2+3}(\mathbf{X}_0, \dots) \times \text{Ech}_{1+2+3}(\mathbf{X}_1, \dots) \times \dots \times \text{Ech}_{1+2+3}(\mathbf{X}_K, \dots)$$

$$\text{et } n = (n_0, n_1, \dots, n_K).$$

On pourrait être tenté de définir  $[\text{att}_{\text{Glob.}n} \text{ « prolonge » } n_0]$  de la façon suivante :

$$\forall x \in \mathbf{X}_0, \text{att}_{\text{Glob.}n}(x) = n_0(x)$$

c'est-à-dire en exigeant que

$$\begin{cases} \text{att}_{\text{Glob.}n}([PV_j]) = n_0([PV_j]), \forall j \in \mathbb{N}_{1,K} \\ \text{att}_{\text{Glob.}n}([L]) = n_0([L]) \end{cases}$$

$$\text{ou encore } \begin{cases} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^K c_i \cdot n_i(L_i) + c_j \cdot n_j(H_j) = n_0([PV_j]), \forall j \in \mathbb{N}_{1,K} & (j) \\ \sum_{i=1}^K c_i \cdot n_i(L_i) = n_0([L]) & (0) \end{cases}$$

$$\text{ou encore} \quad \begin{cases} c_j \cdot (n_j(H_j) - n_j(L_j)) = n_0([PV_j]) - n_0([L]) , \forall j \in \mathbb{N}_{1,K} & (j)-(0) \\ \sum_{i=1}^K c_i \cdot n_i(L_i) = n_0([L]) & (0) \end{cases}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad S \begin{cases} c_j = \frac{n_0([PV_j]) - n_0([L])}{n_j(H_j) - n_j(L_j)} , \forall j \in \mathbb{N}_{1,K} & (j)-(0) \\ \sum_{i=1}^K c_i \cdot n_i(L_i) = n_0([L]) & (0) \end{cases}$$

Malheureusement, le système S n'est pas forcément compatible. En effet, rien ne nous permet d'affirmer que  $\sum_{i=1}^K \frac{n_0([PV_i]) - n_0([L])}{n_i(H_i) - n_i(L_i)} \cdot n_i(L_i) = n_0([L])$ .

C'est la raison pour laquelle nous avons adopté, pour définir [ att<sub>Glob.n</sub> « prolonge » n<sub>0</sub> ], la convention suivante :

$$\exists \beta \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbf{X}_0, \text{ att}_{\text{Glob.n}}(x) = \mathbf{n}_0(x) + \beta \quad (*)$$

$$\text{Dans ce cas, on a toujours : } \forall j \in \mathbb{N}_{1,K}, c_j = \frac{n_0([PV_j]) - n_0([L])}{n_j(H_j) - n_j(L_j)}$$

$$\text{mais l'équation (0) est remplacée par : } \exists \beta \in \mathbb{R} \text{ tel que } \sum_{i=1}^K c_i \cdot n_i(L_i) = n_0([L]) + \beta,$$

et le problème d'incompatibilité est éliminé.

Nous définissons donc comme suit une échelle **att<sub>G.n</sub>** d'**attractivité globale** sur  $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_K$  relativement à  $n \in \mathcal{Ech}_{1+2+3}$  :

$$\forall x \in \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_K ,$$

$$\text{att}_{\text{G.n}}(x) = \sum_{i=1}^K \frac{n_0([PV_i]) - n_0([L])}{n_i(H_i) - n_i(L_i)} \cdot n_i(x_i) \quad (3)$$

$$\text{et on a } \forall x \in \mathbf{X}_0, \text{ att}_{\text{Glob.n}}(x) = \mathbf{n}_0(x) + \beta \quad \text{où } \beta = \sum_{i=1}^K c_i \cdot n_i(L_i) - n_0([L])$$

### Remarques

1) L'obligation de définir le prolongement comme en (\*) (à cause du choix du modèle) ne constitue pas un « problème » ou « une sorte de restriction ». En effet,

$$\text{si } n_0 \in \mathcal{Ech}_{1+2+3}(\mathbf{X}_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{I}_0, \mathbf{P}_0^e, \mathbf{R}_0^b),$$

$$\text{alors } n_0 + \beta \in \mathcal{Ech}_{1+2+3}(\mathbf{X}_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{I}_0, \mathbf{P}_0^e, \mathbf{R}_0^b)$$

2) Dans le cas particulier où

$$\begin{cases} \mathbf{n}_0([L]) = 0, \\ \sum_{i=1}^K \mathbf{n}_0([PV_i]) = 100, \\ n_i(H_i) = 100 \text{ et } n_i(L_i) = 0, \forall i \in \mathbb{N}_{1,K} \end{cases}$$

la formule donnant l'attractivité globale prend une forme un peu plus classique :

$$\text{att}_{G,n}(x) = \sum_{i=1}^K \frac{\mathbf{n}_0([PV_i])}{100} \cdot n_i(x_i)$$

et on a  $\text{att}_{G,n}([L]) = 0$  et  $\text{att}_{G,n}([H]) = 100$  (où  $[H] = (H_1, H_2, \dots, H_K)$ ).

Dans un tel cas (très fréquent en pratique),  $\frac{\mathbf{n}_0([PV_i])}{100}$  est souvent appelé « **poinds du point de vue  $PV_i$**  ».

On observera aussi qu'on a alors  $\forall x \in \mathbf{X}_0, \text{att}_{\text{Glob},n}(x) = \mathbf{n}_0(x) \quad (\beta = 0)$

### Proposition 1

si  $\begin{cases} n, m \in \mathcal{X}Ech_{1+2+3}, \\ \forall i \in \mathbb{N}_{0,K}, \{ \mathbf{P}_i, \mathbf{I}_i, \mathbf{?}_i, \mathbf{P}_i^e, \mathbf{R}_i^b \} \text{ est une information cardinale} \end{cases}$

alors  $\exists \sigma \in \mathbb{R}_+^*, \omega \in \mathbb{R}$  tels que  $\text{att}_{G,m} = \sigma \cdot \text{att}_{G,n} + \omega$

Démonstration : soient  $n, m \in \mathcal{X}Ech_{1+2+3}$ .

$\forall i \in \mathbb{N}_{0,K}, \exists \alpha_i \in \mathbb{R}_+^*, \beta_i \in \mathbb{R}$  tels que  $m_i = \alpha_i \cdot n_i + \beta_i$

$\forall x \in \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_K,$

$$\begin{aligned} \text{att}_{G,m}(x) &= \sum_{i=1}^K \frac{m_0([PV_i]) - m_0([L])}{m_i(H_i) - m_i(L_i)} \cdot m_i(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^K \frac{\alpha_0 \cdot n_0([PV_i]) + \beta_0 - (\alpha_0 \cdot n_0([L]) + \beta_0)}{\alpha_i \cdot n_i(H_i) + \beta_i - (\alpha_i \cdot n_i(L_i) + \beta_i)} \cdot (\alpha_i \cdot n_i(x_i) + \beta_i) \\ &= \sum_{i=1}^K \frac{\alpha_0 \cdot n_0([PV_i]) - \alpha_0 \cdot n_0([L])}{\alpha_i \cdot n_i(H_i) - \alpha_i \cdot n_i(L_i)} \cdot (\alpha_i \cdot n_i(x_i) + \beta_i) \\ &= \alpha_0 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^K \frac{n_0([PV_i]) - n_0([L])}{n_i(H_i) - n_i(L_i)} \cdot n_i(x_i)}_{\text{att}_{\text{Glob},n}(x)} + \underbrace{\alpha_0 \sum_{i=1}^K \frac{n_0([PV_i]) - n_0([L])}{n_i(H_i) - n_i(L_i)} \cdot \frac{\beta_i}{\alpha_i}}_{\omega} \end{aligned}$$

□

## 2.3. Comparaison globale des éléments de $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_K$

Soient  $a$  et  $b \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_K$

Définitions : on dira que

$$\begin{array}{l}
 \text{a est globalement plus attractif que b} \\
 \Leftrightarrow \\
 \forall n \in \mathcal{X}ech_{1+2+3}, \quad att_{G,n}(a) \geq att_{G,n}(b) \\
 \text{et} \\
 \exists \mu \in \mathcal{X}ech_{1+2+3} : att_{G,\mu}(a) > att_{G,\mu}(b)
 \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{a est globalement aussi attractif que b} \\
 \Leftrightarrow \\
 \forall n \in \mathcal{X}ech_{1+2+3}, \quad att_{G,n}(a) = att_{G,n}(b)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{a et b sont globalement incomparables} \\
 \Leftrightarrow \\
 \exists n \in \mathcal{X}ech_{1+2+3}, \quad att_{G,n}(a) < att_{G,n}(b) \\
 \text{et} \\
 \exists \mu \in \mathcal{X}ech_{1+2+3} : att_{G,\mu}(a) > att_{G,\mu}(b)
 \end{array}$$

La formulation un peu lourde (1) peut être simplifiée si on n'envisage pas d'information de type 3 sur au moins un point de vue fondamental :

**Proposition 2** :

si  $[\exists i_0 \in \mathbb{N}_{1,K} \mid \mathbf{R}_{i_0}^b = \emptyset \text{ et } \{a_{i_0}, b_{i_0}\} \not\subset \mathbf{I}_{i_0}(H_{i_0}) \cup \mathbf{I}_{i_0}(L_{i_0}) \text{ et } (a_{i_0}, b_{i_0}) \notin \mathbf{I}_{i_0}]$ ,

alors

$$\begin{array}{l}
 \text{a est globalement plus attractif que b} \\
 \Leftrightarrow \\
 \forall n \in \mathcal{X}ech_{1+2+3}, \quad att_{G,n}(a) > att_{G,n}(b)
 \end{array}$$

«  $\Leftarrow$  » est évidente.

Démonstration de «  $\Rightarrow$  » :

Supposons que :  $\forall n \in \mathcal{X}Ech_{1+2+3}, \text{ att}_{G,n}(a) \geq \text{ att}_{G,n}(b)$

Soit  $m \in \mathcal{X}Ech_{1+2+3}$  : il suffit de démontrer que  $\text{ att}_{G,m}(a) > \text{ att}_{G,m}(b)$ ,

donc que  $\text{ att}_{G,m}(a) \neq \text{ att}_{G,m}(b)$ . (\*)

On a vu au chapitre 1 que

$m_i \in \mathcal{E}ch_{1+2}(\mathbf{X}_i, \mathbf{P}_i, \mathbf{I}_i, \mathbf{P}_i^e) \Leftrightarrow$  les éléments de  $m_i(\mathbf{X}_i)$  constituent une solution d'un système d'équations-inéquations (dédites des règles de mesure) à  $N_i$  inconnues  $x_1, x_2, \dots, x_{N_i}$ , système que nous noterons  $\text{Syst}_i$  ( $N_i = \#\mathbf{X}_i$ ).

Procédons « par l'absurde » : supposons que  $\text{ att}_{G,m}(a) = \text{ att}_{G,m}(b)$

c'est-à-dire que 
$$\sum_{i=1}^K \frac{m_0([\text{PV}_i]) - m_0([\text{L}])}{m_i(H_i) - m_i(L_i)} \cdot (m_i(a_i) - m_i(b_i)) = 0$$

Nous supposons que  $a_{i_0} \notin \mathbf{I}_{i_0}(H_{i_0}) \cup \mathbf{I}_{i_0}(L_{i_0})$  ( la démonstration étant analogue si  $b_{i_0} \notin \mathbf{I}_{i_0}(H_{i_0}) \cup \mathbf{I}_{i_0}(L_{i_0})$  ).

Considérons  $m' = (m_0, m_1, \dots, m_{i_0-1}, m'_{i_0}, m_{i_0+1}, \dots, m_K)$

$$\text{ où } m'_{i_0} : \mathbf{X}_{i_0} \rightarrow \mathbb{R} : u \rightarrow \begin{cases} m_{i_0}(u) + \varepsilon & \text{si } u \in \mathbf{I}_{i_0} a_{i_0} \\ m_{i_0}(u) & \text{sinon} \end{cases}$$

Si  $|\varepsilon|$  « suffisamment petit », alors  $m'_{i_0} \in \mathcal{E}ch_{1+2}(\mathbf{X}_{i_0}, \mathbf{P}_{i_0}, \mathbf{I}_{i_0}, \mathbf{P}_{i_0}^e)$  car

- les égalités de  $\text{Syst}_{i_0}$  sont vérifiées par « construction » de  $m'_{i_0}$  ;
- les inégalités strictes de  $\text{Syst}_{i_0}$  sont vérifiées (puisque  $|\varepsilon|$  « suffisamment petit ») ;
- il n'y a pas d'inégalités non strictes dans  $\text{Syst}_{i_0}$  (puisque  $\mathbf{R}_{i_0}^b = \emptyset$ ) ;

En outre,  $m'_{i_0}(H_{i_0}) = m_{i_0}(H_{i_0})$  et  $m'_{i_0}(L_{i_0}) = m_{i_0}(L_{i_0})$

( puisque  $a_{i_0} \notin \mathbf{I}_{i_0}(H_{i_0}) \cup \mathbf{I}_{i_0}(L_{i_0})$  ).

Il est maintenant évident que, si  $\varepsilon < 0$ , alors  $\text{att}_{G,m}(a) < \text{att}_{G,m}(b)$  puisque

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^K \frac{m'_0([PV_i]) - m'_0([L])}{m'_i(H_i) - m'_i(L_i)} \cdot (m'_i(a) - m'_i(b)) \\ &= \sum_{i=1}^K \frac{m_0([PV_i]) - m_0([L])}{m_i(H_i) - m_i(L_i)} \cdot (m_i(a) - m_i(b)) + \varepsilon \cdot \frac{m_0([PV_{i_0}]) - m_0([L])}{m_{i_0}(H_{i_0}) - m_{i_0}(L_{i_0})} \\ &= \varepsilon \cdot \frac{m_0([PV_{i_0}]) - m_0([L])}{m_{i_0}(H_{i_0}) - m_{i_0}(L_{i_0})} < 0 \quad : \quad \text{contradiction.} \end{aligned}$$

□

**Corollaire :**

si  $[\forall i \in \mathbb{N}_{0,K}, \mathbf{R}_i^b = \phi]$ ,

alors

$$\begin{aligned} & \mathbf{a} \text{ est globalement plus attractif que } \mathbf{b} \\ & \Leftrightarrow \\ & \forall n \in \mathcal{X}ech_{1+2+3}, \quad \text{att}_{G,n}(a) > \text{att}_{G,n}(b) \end{aligned}$$

démonstration :

si  $[\exists i_0 \in \mathbb{N}_{1,K} \mid \{a_{i_0}, b_{i_0}\} \not\subset \mathbf{I}_{i_0}(H_{i_0}) \cup \mathbf{I}_{i_0}(L_{i_0}) \text{ et } (a_{i_0}, b_{i_0}) \notin \mathbf{I}_{i_0}]$ , on retrouve l'hypothèse de la proposition 2 (puisque  $\mathbf{R}_{i_0}^b = \phi$ ).

Supposons donc que :  $\forall i \in \mathbb{N}_{1,K}, a_i \mathbf{I}_i b_i \text{ ou } \{a_i, b_i\} \subset \mathbf{I}_i(H_i) \cup \mathbf{I}_i(L_i)$

Il est évident qu'alors, pour  $m \in \mathcal{X}ech_{1+2+3}$ , on peut écrire  $\text{att}_{G,m}(a) - \text{att}_{G,m}(b)$

sous la forme

$$\text{att}_{G,m}(a) - \text{att}_{G,m}(b) = \sum_{i=1}^K (m_0([PV_i]) - m_0([L])) \cdot c_i \quad \text{où } \forall i \in \mathbb{N}_{1,K}, c_i \in \{-1, 0, 1\}$$

$\forall i \in \mathbb{N}_{1,K}$ , notons  $s(i) = \{j \in \mathbb{N}_{1,K} \mid [PV_i] \mathbf{I}_0 [PV_j]\}$

Comme  $\exists \mu \in \mathcal{X}ech_{1+2+3}$  tel que  $\text{att}_{G,\mu}(a) - \text{att}_{G,\mu}(b) > 0$ ,

$$\exists i_0 \in \mathbb{N}_{1,K} \text{ tel que } \sum_{j \in s(i_0)} c_j \neq 0.$$

Procédons « par l'absurde » : supposons que  $\text{att}_{G,m}(a) = \text{att}_{G,m}(b)$

c'est-à-dire que  $\sum_{i=1}^K (m_0([PV_i]) - m_0([L])) \cdot c_i = 0$

Considérons  $m' = (m'_0, m_1, \dots, m_K)$

$$\text{où } m'_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{R} : u \rightarrow \begin{cases} m_0(u) + \varepsilon & \text{si } u \in I_0 [PV_{i_0}] \\ m_0(u) & \text{sinon} \end{cases}$$

Si  $|\varepsilon|$  « suffisamment petit », alors  $m'_0 \in \mathcal{Ech}_{1+2}(X_0, P_0, I_0, P_0^e)$  car

- les égalités de  $\text{Syst}_0$  sont vérifiées par « construction » de  $m'_0$  ;
- les inégalités strictes de  $\text{Syst}_0$  sont vérifiées ( puisque  $|\varepsilon|$  « suffisamment petit » ) ;
- pas d'inégalités non strictes ( puisque  $R_0^b = \emptyset$  ).

En outre,  $\forall j \notin s(i_0), m'_0([PV_j]) = m_0([PV_j])$ .

Il est maintenant évident que, si on choisit  $\varepsilon$  de signe opposé à celui de  $\sum_{j \in s(i_0)} c_j$ ,

alors  $\text{att}_{G,m'}(a) < \text{att}_{G,m'}(b)$  puisque

$$\sum_{i=1}^K (m'_0([PV_i]) - m'_0([L])) \cdot c_i = \left( \sum_{j \in s(i_0)} c_j \right) \cdot \varepsilon < 0 : \quad \text{contradiction.}$$

□

**Proposition 3** : si  $[\forall i \in \mathbb{N}_{0,K}, \{P_i, I_i, ?_i, P_i^e, R_i^b\}]$  est une **information cardinale** ],

alors

<p>a est <b>globalement plus attractif</b> que b</p> <p><math>\Leftrightarrow</math></p> <p><math>\exists \mu \in \mathcal{Xech}_{1+2+3}, \text{att}_{G,\mu}(a) &gt; \text{att}_{G,\mu}(b)</math></p>
---

Démonstration : évident par proposition 1.

## A propos de signifiante

Soit  $\text{Pr}(n)$  une proposition logique où  $n$  représente un élément de  $\mathcal{X}Ech_{1+2+3}$

Par définition,

$$\begin{array}{c} \text{Pr}(n) \text{ est } \mathbf{signifiant} \\ \Leftrightarrow \\ [ \forall n \in \mathcal{X}Ech_{1+2+3}, \text{Pr}(n) ] \text{ ou } [ \forall n \in \mathcal{X}Ech_{1+2+3}, \text{non}(\text{Pr}(n)) ] \end{array}$$

Nous aurions pu traiter le problème de la comparaison globale de deux éléments de  $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_K$  dans ce cadre.

Cependant, en introduisant les quantificateurs «  $\forall$  » et «  $\exists$  » dans notre définition de « a globalement plus attractif que b », nous avons éliminé complètement la nécessité de recourir à la terminologie de la signifiante, puisqu'un énoncé tel que « a est globalement préféré à b » ne dépend plus d'un élément  $n$  de  $\mathcal{X}Ech_{1+2+3}$ , grâce à ces quantificateurs.

## 2.4. Algorithme de comparaison globale

Soient  $a$  et  $b \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_K$

Notons

$$M(a,b) = \sup_{n \in \mathcal{Ech}_{1+2+3}} \sum_{i=1}^K \frac{n_0([PV_i]) - n_0([L])}{n_i(H_i) - n_i(L_i)} \cdot (n_i(a_i) - n_i(b_i))$$

$$m(a,b) = \inf_{n \in \mathcal{Ech}_{1+2+3}} \sum_{i=1}^K \frac{n_0([PV_i]) - n_0([L])}{n_i(H_i) - n_i(L_i)} \cdot (n_i(a_i) - n_i(b_i))$$

**Proposition 4 :**

a est globalement plus attractif que b

$\Leftrightarrow$

$M(a,b) > 0$  et  $m(a,b) \geq 0$

Démonstration : évident.

**Calcul de M(a,b) et m(a,b).**

La décomposition qui va suivre a été réalisée dans le but d'utiliser la programmation linéaire pour déterminer  $M(a,b)$  et  $m(a,b)$  :

$$\begin{aligned} M(a,b) &= \sup_{n \in \mathcal{Ech}_{1+2+3}} \sum_{i=1}^K (n_0([PV_i]) - n_0([L])) \cdot \frac{n_i(a_i) - n_i(b_i)}{n_i(H_i) - n_i(L_i)} \\ &= \sup_{n_0 \in \mathcal{Ech}_{1+2+3}(X_0, \dots)} \sum_{i=1}^K [ (n_0([PV_i]) - n_0([L])) \cdot \sup_{n_i \in \mathcal{Ech}_{1+2+3}(X_i, \dots)} \frac{n_i(a_i) - n_i(b_i)}{n_i(H_i) - n_i(L_i)} ] \end{aligned}$$

De même,

$$m(a,b) = \inf_{n_0 \in \mathcal{Ech}_{1+2+3}(X_0, \dots)} \sum_{i=1}^K [ (n_0([PV_i]) - n_0([L])) \cdot \inf_{n_i \in \mathcal{Ech}_{1+2+3}(X_i, \dots)} \frac{n_i(a_i) - n_i(b_i)}{n_i(H_i) - n_i(L_i)} ]$$

Nous pouvons ainsi décomposer le calcul de  $m(a,b)$  et  $M(a,b)$  en 2 étapes .

1<sup>ère</sup> étape :  $\forall i \in \mathbb{N}_{1,K}$ , calcul (par programmation linéaire, si nécessaire) de

$$m_i(a,b) = \inf_{n_i \in \text{Ech}_{1+2+3}(X_i, \dots)} \frac{n_i(a_i) - n_i(b_i)}{n_i(H_i) - n_i(L_i)}$$

$$M_i(a,b) = \sup_{n_i \in \text{Ech}_{1+2+3}(X_i, \dots)} \frac{n_i(a_i) - n_i(b_i)}{n_i(H_i) - n_i(L_i)}$$

2<sup>ème</sup> étape : calcul (par programmation linéaire, si nécessaire) de

$$m(a,b) = \inf_{n_0 \in \text{Ech}_{1+2+3}(X_0, \dots)} \sum_{i=1}^K (n_0([PV_i]) - n_0([L])) \cdot m_i(a,b)$$

$$M(a,b) = \sup_{n_0 \in \text{Ech}_{1+2+3}(X_0, \dots)} \sum_{i=1}^K (n_0([PV_i]) - n_0([L])) \cdot M_i(a,b)$$

Remarque : lorsqu'on ne prend en compte que l'information de type 1 sur un point de vue particulier, l'utilisation de la programmation linéaire est tout à fait inutile pour le calcul de  $M_i(a,b)$  et  $m_i(a,b)$ , comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 5** :  $\forall i \in \mathbb{N}_{1,K}$ ,

$$\text{si } P_i^e = R_i^b = \phi,$$

$$\text{alors } M_i(a,b) \in \{-1, 0, 1, +\infty\} \text{ et } m_i(a,b) \in \{-\infty, -1, 0, 1\}$$

Démonstration : celle-ci devrait consister en une énumération de tous les cas du type

$$[b_i \mathbf{R} a_i \text{ ou } a_i \mathbf{R} b_i] \text{ et } [a_i \mathbf{R} H_i \text{ ou } H_i \mathbf{R} a_i] \text{ et } [a_i \mathbf{R} L_i \text{ ou } L_i \mathbf{R} a_i]$$

$$\text{et } [b_i \mathbf{R} H_i \text{ ou } H_i \mathbf{R} b_i] \text{ et } [b_i \mathbf{R} L_i \text{ ou } L_i \mathbf{R} b_i]$$

$$(\text{où } \mathbf{R} = P_i \text{ ou } I_i)$$

et un calcul de  $m_i(a,b)$  et  $M_i(a,b)$  dans chacun de ces cas, ce qui serait très long et très... fastidieux. Toutes ces situations ont bien sûr été prévues dans notre logiciel.

Nous nous contenterons d'en présenter quelques unes ci-après :

- si  $a_i \mathbf{P}_i H_i, L_i \mathbf{P}_i b_i$ , alors  $m_i(a,b) = 1$  et  $M_i(a,b) = +\infty$  ;

en effet,  $\forall n_i \in \mathcal{Ech}_1(\mathbf{X}_i, \mathbf{P}_i, \mathbf{I}_i)$ , les **seules** contraintes à respecter dans ce cas sont du type

$$n_i(a_i) > \dots > n_i(H_i) \quad \text{et} \quad n_i(b_i) < \dots < n_i(L_i)$$

$$\text{donc} \quad n_i(a_i) - n_i(b_i) > n_i(H_i) - n_i(L_i)$$

$$\text{donc} \quad \frac{n_i(a_i) - n_i(b_i)}{n_i(H_i) - n_i(L_i)} > 1 ;$$

comme,  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_i \in \mathcal{Ech}_1(\mathbf{X}_i, \mathbf{P}_i, \mathbf{I}_i)$  telle que

$$n_i(a_i) - n_i(H_i) < \varepsilon \quad \text{et} \quad n_i(L_i) - n_i(b_i) < \varepsilon ,$$

$$\text{donc telle que} \quad \frac{n_i(a_i) - n_i(b_i)}{n_i(H_i) - n_i(L_i)} < 1 + \frac{2\varepsilon}{n_i(H_i) - n_i(L_i)},$$

on a  $m_i(a,b) = 1$

- si  $H_i \mathbf{P}_i a_i, L_i \mathbf{I}_i b_i, a_i ?_i b_i$ , alors  $m_i(a,b) = -\infty$  et  $M_i(a,b) = 1$

- si  $H_i \mathbf{P}_i a_i, H_i \mathbf{P}_i b_i, a_i \mathbf{P}_i L_i, b_i \mathbf{P}_i L_i, a_i ?_i b_i$ , alors  $m_i(a,b) = -1$  et  $M_i(a,b) = 1$

etc...

Remarque : lorsqu'on ne prend en compte que l'information de type 1 sur tous les ensembles  $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_K$ , l'utilisation de la programmation linéaire peut être évitée en utilisant un algorithme de vérification construit sur les propositions suivantes :

**Proposition 6** : si  $[\forall i \in \mathbb{N}_{0,K}, \mathbf{P}_i^e = \mathbf{R}_i^b = \phi]$ ,

alors

1°) si  $[\exists i \in \mathbb{N}_{1,K} \mid M_i(a,b) = +\infty]$ , alors  $M(a,b) = +\infty$  (trivial)

2°) si  $[\exists i \in \mathbb{N}_{1,K} \mid m_i(a,b) = -\infty]$ , alors  $m(a,b) = -\infty$  (trivial)

3°) si  $\begin{cases} [\mathbf{PV}_1] (\mathbf{P} \cup \mathbf{I}) [\mathbf{PV}_2] (\mathbf{P} \cup \mathbf{I}) \dots (\mathbf{P} \cup \mathbf{I}) [\mathbf{PV}_K] \\ m_{i_0}(a,b) = -1 \quad \text{où} \quad i_0 = \min\{i \in \mathbb{N}_{1,K} \mid m_i(a,b) \neq 0\}, \\ [\mathbf{PV}_{i_0}] \mathbf{P} [\mathbf{PV}_{i_0+1}] \end{cases}$  (3.1)

alors  $m(a,b) < 0$

$$4^\circ) \quad \left\{ \begin{array}{l} [PV_1] (\mathbf{P} \cup \mathbf{I}) [PV_2] (\mathbf{P} \cup \mathbf{I}) \dots (\mathbf{P} \cup \mathbf{I}) [PV_K] \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$$\text{si } \left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \mathbb{N}_{1,K}, \left\{ \begin{array}{l} m_j(a,b) \neq -\infty \\ \# \{ i \in \mathbb{N}_{1,j} \mid m_i(a,b) = 1 \} \geq \# \{ i \in \mathbb{N}_{1,j} \mid m_i(a,b) = -1 \} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

alors  $m(a,b) \geq 0$ .

$$5^\circ) \quad \left\{ \begin{array}{l} [PV_1] \mathbf{P} [PV_2] \mathbf{P} \dots \mathbf{P} [PV_K] \end{array} \right. \quad (5.1)$$

$$\text{si } \left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \mathbb{N}_{1,K}, m_j(a,b) \neq -\infty \end{array} \right. \quad (5.2)$$

alors

$m(a,b) > 0$ $\Leftrightarrow$ $\forall j \in \mathbb{N}_{1,K}, \# \{ i \in \mathbb{N}_{1,j} \mid m_i(a,b) = 1 \} \geq \# \{ i \in \mathbb{N}_{1,j} \mid m_i(a,b) = -1 \}$
--

Démonstration de 3°) :

Soit  $n_0 \in \text{Ech}_1(\mathbf{X}_0, \dots)$  : par (3.1), on a  $n_0([PV_1]) \geq n_0([PV_2]) \geq \dots \geq n_0([PV_K])$

Notons, pour plus de simplicité,  $p_i = n_0([PV_i]) - n_0([L])$ .

$$\sum_{i=1}^K p_i \cdot m_i(a,b) = -p_{i_0} + \sum_{i=i_0+1}^K p_i \cdot m_i(a,b)$$

Comme on peut prendre  $p_{i_0} > \sum_{i=i_0+1}^K |p_i|$ , on a  $m(a,b) < 0$ . □

Démonstration de 4°) :

Soit  $n_0 \in \text{Ech}_1(\mathbf{X}_0, \dots)$  : par (1), on a  $n_0([PV_1]) \geq n_0([PV_2]) \geq \dots \geq n_0([PV_K])$

Notons, pour plus de simplicité,  $p_i = n_0([PV_i]) - n_0([L])$ .

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $\forall i \in \mathbb{N}_{1,K}, m_i(a,b) \neq 0$

(les termes nuls n'intervenant ni dans les hypothèses (4.1), (4.2) et (4.3), ni dans le calcul de  $m(a,b)$ ) ; sinon, il suffit de les renuméroter en « oubliant » les termes où  $m_i(a,b) = 0$ .

Nous allons « séparer » les  $m_i(a,b) = 1$  des  $m_i(a,b) = -1$ . Considérons les ensembles

- $\{ i \in \mathbb{N}_{1,K} \mid m_i(a,b) > 1 \}$ , dont les  $s$  éléments seront notés  $q_1 < q_2 < \dots < q_s$
- $\{ i \in \mathbb{N}_{1,K} \mid m_i(a,b) = -1 \}$ , dont les  $t$  éléments seront notés  $r_1 < r_2 < \dots < r_t$

Par hypothèse,  $s \geq t$ .

On a :  $\forall i \in \mathbb{N}_{1,t}, q_i < r_i$  (sinon, contradiction avec l'hypothèse (3))

Donc  $\forall i \in \mathbb{N}_{1,t}, p_{q_i} \geq p_{r_i}$

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^K p_i \cdot m_i(a,b) = \sum_{i=1}^s p_{q_i} - \sum_{i=1}^t p_{r_i} = \sum_{i=1}^t (p_{q_i} - p_{r_i}) + \sum_{i=t+1}^s p_{q_i} \geq 0$$

Ceci étant vérifié  $\forall n_0 \in \text{Ech}_1(\mathbf{X}_0, \dots)$ , on a  $m(a,b) \geq 0$ .

□

Démonstration de 5°) :

a) Supposons que  $\forall j \in \mathbb{N}_{1,K}, \# \{ i \in \mathbb{N}_{1,j} \mid m_i(a,b) = 1 \} \geq \# \{ i \in \mathbb{N}_{1,j} \mid m_i(a,b) = -1 \}$

Il faut prouver que  $m(a,b) > 0$  : la démonstration est presque identique à la précédente (il suffit de remplacer tous les «  $\geq$  » par des «  $>$  »).

b) Supposons que  $m(a,b) > 0$

Soit  $n_0 \in \text{Ech}_1(\mathbf{X}_0, \dots)$  : par (1), on a  $n_0([PV_1]) > n_0([PV_2]) > \dots > n_0([PV_K])$

Notons, pour plus de simplicité,  $p_i = n_0([PV_i]) - n_0([L])$ .

Il faut prouver que  $\forall j \in \mathbb{N}_{1,K}, \# \{ i \in \mathbb{N}_{1,j} \mid m_i(a,b) = 1 \} \geq \# \{ i \in \mathbb{N}_{1,j} \mid m_i(a,b) = -1 \}$

Par l'absurde : supposons que  $\exists j \in \mathbb{N}_{1,K}$  tel que

$$\# \{ i \in \mathbb{N}_{1,j} \mid m_i(a,b) = 1 \} < \# \{ i \in \mathbb{N}_{1,j} \mid m_i(a,b) = -1 \} \quad (*)$$

Prenons le plus petit des «  $j$  » tels que (\*) et notons-le toujours «  $j$  » !

Comme ci-dessus, « séparons » les  $m_i(a,b) = 1$  des  $m_i(a,b) = -1$ . Considérons les ensembles :

- $\{ i \in \mathbb{N}_{1,j} \mid m_i(a,b) = 1 \}$ , dont les  $s$  éléments seront notés  $q_1 < q_2 < \dots < q_s$
- $\{ i \in \mathbb{N}_{1,j} \mid m_i(a,b) = -1 \}$ , dont les  $t$  éléments seront notés  $r_1 < r_2 < \dots < r_t$

- Par définition de  $j$ , il est évident que
- $t = s+1$
  - $\forall i \in \mathbb{N}_{1,s}, q_i < r_i$

Soit  $n_0 \in \mathcal{Ech}_1(\mathbf{X}_0, \dots)$  construite comme suit (même notation  $p_i = n_0([PV_i]) - n_0([L])$ ) :

- $p_{r_t} > 0$  quelconque
- $p_{r_{t+1}}, \dots, p_k$  choisis tels que  $p_{r_{t+1}} > \dots > p_k > 0$  et  $\sum_{i=r_{t+1}}^k |p_i| < \frac{p_{r_t}}{2}$
- $p_1 > p_2 > \dots > p_{r_s}$  tels que  $\sum_{i=1}^s (p_{q_i} - p_{r_i}) < \frac{p_{r_t}}{2}$

On vérifie alors facilement que  $\sum_{i=1}^k p_i \cdot m_i(a,b) < 0$  : contradictoire avec  $m(a,b) > 0$

□

## 2.5. Comparaison globale d'actions potentielles

### 2.5.1. Impact d'une action potentielle

Soit une action potentielle  $a \in \mathbf{A}$

Définition : on appelle « **impact de  $a$  sur le point de vue  $PV_i$**  », que l'on note  $\pi_i(\mathbf{a})$ , l'unique niveau du descripteur  $D_i$  qui décrit la performance de  $\mathbf{a}$  sur  $PV_i$ .

Préciser les impacts des actions potentielles sur les différents points de vue fondamentaux revient à construire une fonction

$$\pi : \mathbf{A} \rightarrow X_1 \times X_2 \times \dots \times X_K : \mathbf{a} \rightarrow \pi(\mathbf{a}) = (\pi_1(\mathbf{a}), \pi_2(\mathbf{a}), \dots, \pi_K(\mathbf{a}))$$

Remarque : dans le cas particulier où les niveaux d'un descripteur  $D_i$  sont les actions potentielles (voir 2.1.2), la définition des impacts des actions sur le point de vue  $PV_i$  est évidemment implicite.

Exemple (suite)

Impacts des actions			
Actions	NB	Color	Speed
PH	NB1	col1	vit1
Conan	H1=NB2	H2=col2	H3=vit2
Espon	NB3	col3	vit3
Sister	NB4	col4	vit4
Nomark	L1=NB5	L2=col5	vit5
	NB6	col6	L3=vit6
			vit7

$$\pi(\text{PH}) = (\text{NB3}, \text{H2}, \text{vit5})$$

Impacts des actions			
Actions	NB	Color	Speed
PH	NB1	col1	vit1
Conan	H1=NB2	H2=col2	H3=vit2
Espon	NB3	col3	vit3
Sister	NB4	col4	vit4
Nomark	L1=NB5	L2=col5	vit5
	NB6	col6	L3=vit6
			vit7

$$\pi(\text{Conan}) = (\text{NB1}, \text{col4}, \text{vit3})$$

Impacts des actions			
Actions	NB	Color	Speed
PH	NB1	col1	vit1
Conan	H1=NB2	H2=col2	H3=vit2
Espon	NB3	col3	vit3
Sister	NB4	col4	vit4
Nomark	L1=NB5	L2=col5	vit5
	NB6	col6	L3=vit6
			vit7

$$\pi(\text{Espon}) = (\text{L1}, \text{H2}, \text{vit3})$$

Impacts des actions			
Actions	NB	Color	Speed
PH	NB1	col1	vit1
Conan	H1=NB2	H2=col2	H3=vit2
Espon	NB3	col3	vit3
Sister	NB4	col4	vit4
Nomark	L1=NB5	L2=col5	vit5
	NB6	col6	L3=vit6
			vit7

$$\pi(\text{Sister}) = (\text{NB6}, \text{col3}, \text{vit1})$$

Impacts des actions			
Actions	NB	Color	Speed
PH	NB1	col1	vit1
Conan	H1=NB2	H2=col2	H3=vit2
Espan	<b>NB3</b>	<b>col3</b>	<b>vit3</b>
Sister	NB4	col4	vit4
<b>Nomark</b>	L1=NB5	L2=col5	vit5
	NB6	col6	L3=vit6
			vit7

$$\pi(\text{Nomark}) = ( \text{NB3} , \text{col3} , \text{vit3} )$$

### 2.5.2. Comparaisons globales d'actions potentielles

Soient deux actions potentielles  $a, b \in \mathbf{A}$

Définitions : on dira que

1) « ***a est globalement plus attractive que b*** »

lorsque  $\pi(a)$  est globalement plus attractif que  $\pi(b)$

« ***a est globalement aussi attractive que b*** »

lorsque  $\pi(a)$  est globalement aussi attractif que  $\pi(b)$

« ***a et b sont globalement incomparables*** »

lorsque  $\pi(a)$  et  $\pi(b)$  sont globalement incomparables

2) « ***a domine b*** » lorsque  $\begin{cases} \forall i \in \text{IN}_{1,K} , \pi_i(a) (\mathbf{P} \cup \mathbf{I}) \pi_i(b) \\ \exists i \in \text{IN}_{1,K} : \pi_i(a) \mathbf{P} \pi_i(b) \end{cases}$

**Proposition 7** : [ a domine b ]  $\Rightarrow$  [ a est globalement plus attractive que b ]

(trivial).

### 2.5.3. Tableau des comparaisons globales d'actions potentielles

Notre mode d'exploitation de l'information préférentielle nous a permis d'intégrer, dans notre logiciel, un tableau des comparaisons globales des actions potentielles. Celui-ci affiche tous les couples (a,b) tels que « a domine b » ou « a est globalement plus attractive que b », compte tenu de l'information préférentielle disponible ou de l'information dont le décideur **J** a choisi de tenir compte.

*Exemple (suite)*

	PH	Conan	Espon	Sister	Nomark	[ H ]	[ L ]
PH	=	?	?	?	?		▲
Conan	?	=	+	?	+	?	▲
Espon	?		=	?			▲
Sister	?	?	?	=	?		?
Nomark	?		+	?	=		▲
[ H ]	▲	?	▲	+	▲	=	▲
[ L ]				?			=

Information locale				
	type 1	type 2	type 3	cardinale
NB	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Color	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speed	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Information globale			
type 1	type 2	type 3	cardinale
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

*Prise en compte de l'information locale de type 2 sur  $X_3$*

*Prise en compte de l'information globale de type 1 (sur  $X_0$ )*

Le signe ▲ en ligne a – colonne b signifie que « a domine b », compte tenu de l'information préférentielle sélectionnée.

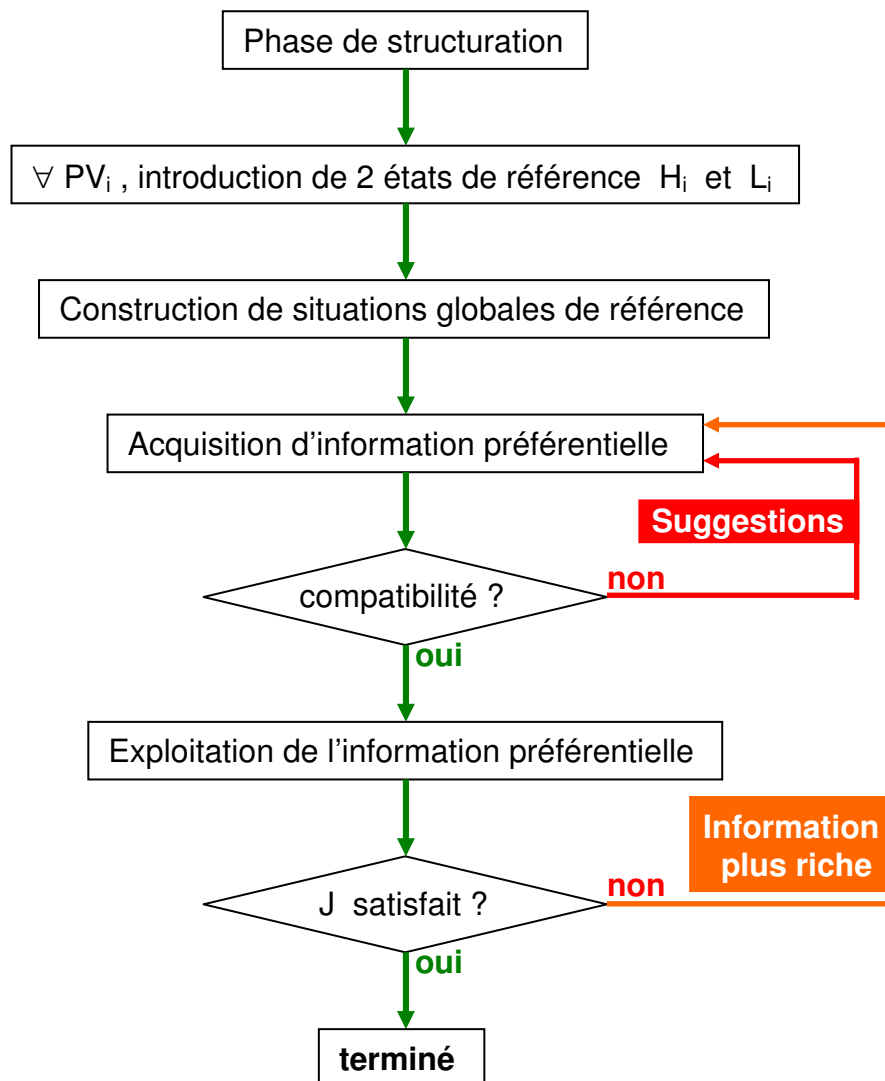
Le signe + en ligne a – colonne b signifie que « a est globalement plus attractive que b », compte tenu de l'information préférentielle sélectionnée.

Le signe ? en ligne a – colonne b signifie que « a et b sont globalement incomparables », compte tenu de l'information préférentielle sélectionnée.

On remarquera que, dans le logiciel,

- l'« information préférentielle concernant l'attractivité locale » est appelée « *information locale* » ;
- l'« information préférentielle concernant l'attractivité globale » est appelée « *information globale* » ;
- $[L] = (L_1, L_2, \dots, L_K)$  et  $[H] = (H_1, H_2, \dots, H_K)$  ont été intégrés dans le tableau des comparaisons globales.

Le premier intérêt pratique de ce tableau est de pouvoir éviter l'acquisition d'information préférentielle superflue ; comme il exploite instantanément toute modification de l'information, il suffira au décideur d'arrêter la discussion lorsqu'il s'estimera satisfait des comparaisons globales affichées.



Exemple (suite)

Le tableau page 110 montre que, compte tenu de l'information préférentielle précisée en 2.1.4, aucune action n'est « globalement plus attractive » que toutes les autres actions de **A**.

A ce stade, **J** n'a fourni qu'une information globale de type 1 (sur  $X_0$ ) (l'ensemble des situations globales de référence). Une façon d'enrichir l'information préférentielle pourrait être de fournir une information globale de type 2 (sur cet ensemble) :

	[ NB ]	[ Color ]	[ Speed ]	[ L ]
[ NB ]	nulle	modérée	positive	positive
[ Color ]		nulle	tr. faible	positive
[ Speed ]			nulle	positive
[ L ]				nulle

Dans ce cas, le tableau des comparaisons globales fait apparaître que, compte tenu de l'information préférentielle disponible, « Conan » est globalement plus attractive que « PH » :

	PH	Conan	Espon	Sister	Nomark	[ H ]	[ L ]
PH	=		?	?	?		▲
Conan	+	=	+	?	+	?	▲
Espon	?		=	?			▲
Sister	?	?	?	=	?		?
Nomark	?		+	?	=		▲
[ H ]	▲	?	▲	+	▲	=	▲
[ L ]				?			=

Information locale					Information globale			
	type 1	type 2	type 3	cardinale	type 1	type 2	type 3	cardinale
NB	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Color	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speed	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Prise en compte de l'information globale de type 2 (sur  $X_0$ )

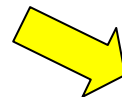
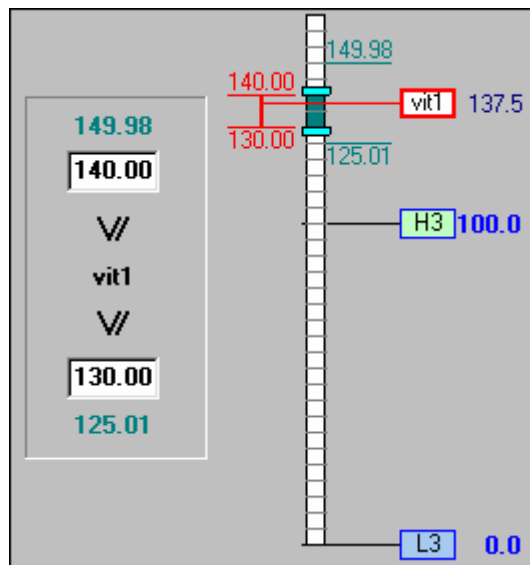
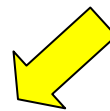
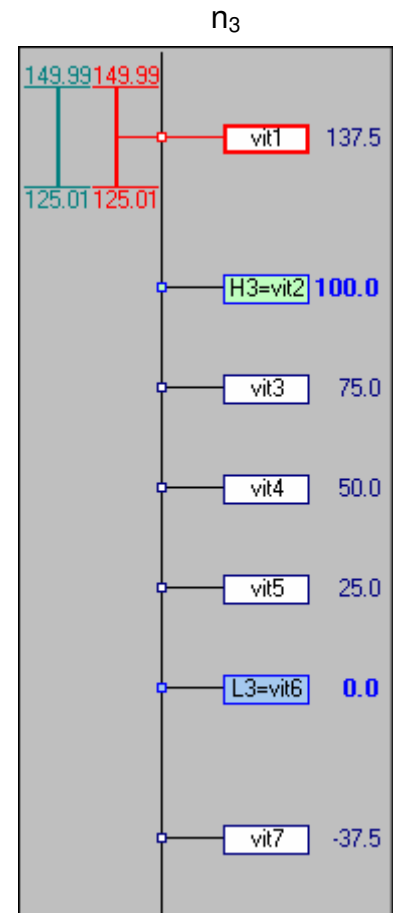
« Conan » globalement plus attractive que « PH »

A nouveau, ce tableau montre que, compte tenu de l'information préférentielle disponible, aucune action n'est « globalement plus attractive » que toutes les autres actions de  $\mathbf{A}$ .

$J$  pourrait alors, par exemple, s'aider d'une première échelle  $n_3$  de type 1+2 sur  $X_3$  (une échelle MACBETH transformée), pour fournir une information locale de type 3 sur  $X_3$ :

Vitesse d'impression noir et blanc							
	vit1	H3=vit2	vit3	vit4	vit5	L3=vit6	vit7
vit1	nulle	modérée	forte	positive	positive	positive	positive
H3=vit2		nulle	faible	forte	positive	positive	positive
vit3			nulle	faible	forte	positive	positive
vit4				nulle	faible	forte	positive
vit5					nulle	faible	forte
L3=vit6						nulle	modérée
vit7							nulle

$\{ P_3, I_3, P_3^e \}$



$1.3 \leq \frac{\text{vit1} - L_3}{H_3 - L_3} \leq 1.4$

$$1.3 \leq \frac{\Delta_{\text{att}}(\text{vit}_1, L_3)}{\Delta_{\text{att}}(H_3, L_3)} \leq 1.4$$

*c'est-à-dire*

$$\mathbf{R}_3^b = \{ ( (\text{vit}_1, L_3), (H_3, L_3) ), (1.3, 1.4) \}$$

Le tableau des comparaisons globales met alors en évidence que, compte tenu de toute l'information préférentielle disponible, « Conan » est globalement plus attractive que toutes les autres actions de  $\mathbf{A}$  :

Comparaisons globales							
	PH	Conan	Espon	Sister	Nomark	[ H ]	[ L ]
PH	=	?	?	?	?		▲
Conan	+	=	+	+	+	?	▲
Espon	?		=	?			▲
Sister	?		?	=	?		?
Nomark	?		+	?	=		▲
[ H ]	▲	?	▲	+	▲	=	▲
[ L ]				?			=

Information locale				Information globale				
	type 1	type 2	type 3	cardinale	type 1	type 2	type 3	cardinale
NB	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Color	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speed	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Prise en compte de l'information locale de type 3 sur  $X_3$

« Conan » globalement plus attractive que « PH », « Espon », « Sister » et « Nomark »

## 2.5.4. Analyse de robustesse

Notre méthodologie permet aussi à J d'effectuer une analyse de « **robustesse** » des résultats présentés en **désélectionnant** une partie de l'information préférentielle et en observant les conséquences de cette modification sur le tableau des comparaisons globales.

### Exemple (suite)

Si on ne prend pas en compte l'information globale de type 2 (sur  $X_0$ ), on constate que :

- « Conan » **reste** globalement plus attractive que « Espon » ,
- « Conan » **reste** globalement plus attractive que « Sister » ,
- « Conan » **reste** globalement plus attractive que « Nomark » ,

### MAIS

- « Conan » **n'est plus** globalement plus attractive que « PH » .

	PH	Conan	Espon	Sister	Nomark	[H]	[L]
PH	=	?	?	?	?		▲
Conan	?	=	+	+	+	?	▲
Espon	?		=	?			▲
Sister	?		?	=	?		?
Nomark	?		+	?	=		▲
[H]	▲	?	▲	+	▲	=	▲
[L]				?			=

Information locale					Information globale			
	type 1	type 2	type 3	cardinale	type 1	type 2	type 3	cardinale
NB	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Color	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speed	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

On ne prend pas en compte l'information globale de type 2 (sur  $X_0$ )

« Conan » **n'est pas** globalement plus attractive que « PH »

## Remarque

Dans le cas  $\exists i \in \mathbb{N}_{0,K}$  tel que  $\#R_i^b > 1$ , le logiciel offre la possibilité d'affiner l'analyse de robustesse, en permettant d'observer, lors de toute « sélection ou désélection » d'une information élémentaire de type 3, les modifications dans le tableau des comparaisons globales.

### Exemple (suite)

Supposons que  $J$  ait ajouté l'information de type 3 suivante sur  $X_3$  :

<input checked="" type="checkbox"/>	$1.3 \leq \frac{vit1 - L3}{H3 - L3} \leq 1.4$	$( 130 \leq n_3(vit1) \leq 140 )$
<input checked="" type="checkbox"/>	$0.7 \leq \frac{vit3 - L3}{H3 - L3} \leq 0.8$	$( 70 \leq n_3(vit3) \leq 80 )$
<input checked="" type="checkbox"/>	$0.2 \leq \frac{vit5 - L3}{H3 - L3} \leq 0.3$	$( 20 \leq n_3(vit5) \leq 30 )$

On peut alors observer que :

<input checked="" type="checkbox"/>	$1.3 \leq \frac{vit1 - L3}{H3 - L3} \leq 1.4$
<input checked="" type="checkbox"/>	$0.7 \leq \frac{vit3 - L3}{H3 - L3} \leq 0.8$
<input checked="" type="checkbox"/>	$0.2 \leq \frac{vit5 - L3}{H3 - L3} \leq 0.3$

**Comparaisons globales**

	PH	Conan	Espon	Sister	Nomark	[H]	[L]
PH	=	?	+	?	?		▲
Conan	?	=	+	+	+	?	▲
Espon			=	?			▲
Sister	?		?	=	?		?
Nomark	?		+	?	=		▲
[H]	▲	?	▲	+	▲	=	▲
[L]				?			=

Information locale				Information globale				
	type 1	type 2	type 3	cardinale	type 1	type 2	type 3	cardinale
NB	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Color	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speed	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

$$R_3^b = \left\{ \left( (vit1, L3), (H3, L3) \right), (1.3, 1.4) \right\}, \left( (vit3, L3), (H3, L3) \right), (0.7, 0.8) \right\}, \\ \left( (vit5, L3), (H3, L3) \right), (0.2, 0.3) \right\}$$

$$(\#R_3^b = 3)$$

<input type="checkbox"/>	$1.3 \leq \frac{vit1 - L3}{H3 - L3} \leq 1.4$
<input checked="" type="checkbox"/>	$0.7 \leq \frac{vit3 - L3}{H3 - L3} \leq 0.8$
<input checked="" type="checkbox"/>	$0.2 \leq \frac{vit5 - L3}{H3 - L3} \leq 0.3$

	PH	Conan	Espon	Sister	Nomark	[H]	[L]
PH	=	?	+	?	?		▲
Conan	?	=	+	+	+	?	▲
Espon			=	?			▲
Sister	?		?	=	?		?
Nomark	?		+	?	=		▲
[H]	▲	?	▲	+	▲	=	▲
[L]				?			=

Information locale					Information globale			
	type 1	type 2	type 3	cardinale	type 1	type 2	type 3	cardinale
NB	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Color	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speed	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

$R_3^b = \{ ((vit3, L3), (H3, L3)), (0.7, 0.8) \}, ((vit5, L3), (H3, L3)), (0.2, 0.3) \}$   
 (  $\#R_3^b = 2$  ) : aucun changement par rapport au tableau précédent !

<input type="checkbox"/>	$1.3 \leq \frac{vit1 - L3}{H3 - L3} \leq 1.4$
<input checked="" type="checkbox"/>	$0.7 \leq \frac{vit3 - L3}{H3 - L3} \leq 0.8$
<input type="checkbox"/>	$0.2 \leq \frac{vit5 - L3}{H3 - L3} \leq 0.3$

	PH	Conan	Espon	Sister	Nomark	[H]	[L]
PH	=	?	?	?	?		▲
Conan	?	=	+	+	+	?	▲
Espon	?		=	?			▲
Sister	?		?	=	?		?
Nomark	?		+	?	=		▲
[H]	▲	?	▲	+	▲	=	▲
[L]				?			=

Information locale					Information globale			
	type 1	type 2	type 3	cardinale	type 1	type 2	type 3	cardinale
NB	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Color	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speed	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

$R_3^b = \{ ((vit3, L3), (H3, L3)), (0.7, 0.8) \}$   
 (  $\#R_3^b = 1$  ) : « PH » n'est plus globalement plus attractive que « Espon ».

etc...







### 2.5.5. Analyse de robustesse « générique »

Soient deux actions  $a, b \in \mathbf{A}$ .

Nous avons inclus dans notre logiciel une détection systématique de la combinaison « la moins riche » d'informations locale et globale permettant d'affirmer que  $a$  est globalement plus attractive que  $b$  lorsque :

- 1) on prend en compte le même type d'information locale sur tous les points de vue fondamentaux ;
- 2) le type d'information locale est au moins aussi riche que le type d'information globale.

Les « combinaisons » d'informations prises en compte sont donc les suivantes :

information locale	information globale	symbole
type 1	type 1	
type 2	type 1	
type 2	type 2	
type 3	type 1	
type 3	type 2	
type 3	type 3	

Remarque : il est un cas où il n'est pas possible de distinguer la moins riche entre deux combinaisons : [ type 2 et type 2 ] ou [ type 3 et type 1 ]. Dans ce cas, le logiciel affichera les deux symboles correspondants.

#### Exemple (suite)

Les résultats affichés sur le tableau de robustesse ci-après sont obtenus en ne prenant en compte que l'information de type 3 « sélectionnée » (voir fin du paragraphe précédent).

	PH	Conan	Espon	Sister	Nomark	[ H ]	[ L ]
PH	=		?	?	?		▲
Conan	⚡	=	📱	👉	📱	?	▲
Espon	?		=	?			▲
Sister	?		?	=	?		?
Nomark	?		📱	?	=		▲
[ H ]	▲	?	▲	📱	▲	=	▲
[ L ]				?			=

On peut lire, sur ce tableau, que :

- une information locale de type 1 et une information globale de type 1 sont suffisantes pour pouvoir affirmer que « Conan » est globalement plus attractive que « Espon » ;
- une information locale de type 2 et une information globale de type 1 sont suffisantes pour pouvoir affirmer que « Conan » est globalement plus attractive que « Nomark » et que « Nomark » est globalement plus attractive que « Espon » ;
- une information locale de type 2 et une information globale de type 2 sont suffisantes pour pouvoir affirmer que « Conan » est globalement plus attractive que « PH » ;
- une information locale de type 3 et une information globale de type 1 sont suffisantes pour pouvoir affirmer que « Conan » est globalement plus attractive que « Sister » .

On pourrait certes faire les mêmes observations à l'aide du tableau des comparaisons globales vu au paragraphe précédent, mais on ne les visualiserait jamais ensemble.

## Conclusion

Ce travail avait un double objectif :

- fournir une base mathématique solide pour l'approche MACBETH
- concevoir et mettre au point un logiciel permettant d'utiliser en pratique cette approche.

L'idée « MACBETH », due à C.A. Bana e Costa et J.-C. Vansnick, remonte au début des années 90 et a consisté au départ en une réflexion sur la manière d'aider une personne **J** à fournir une information cardinale concernant l'attractivité des éléments d'un ensemble fini ( voir Bana e Costa et Vansnick, 1993 et 1994 ).

Ses fondements étaient

- un mode de questionnement original consistant à demander des jugements absolus de différence d'attractivité entre deux éléments en termes de six catégories sémantiques,
- un nouveau mode de passage du *sémantique* au *quantitatif* consistant à faire correspondre à chaque catégorie sémantique un intervalle de la droite réelle sur base de règles de mesurage (et non en associant arbitrairement à chaque catégorie un nombre réel),
- l'idée de tester, compte tenu des règles de mesurage adoptées, la cohérence des jugements fournis par **J**
- le désir, en cas d'incohérence, de pouvoir en discuter avec **J**  
et, en cas de cohérence, de pouvoir soumettre à la critique de **J** une première échelle numérique.

Le premier chapitre de ce travail constitue essentiellement les bases mathématiques que nous avons imaginées pour encadrer et développer ces premières idées .

Notre travail a notamment porté sur

- ō le développement de techniques permettant
  - de tester la cohérence des jugements de **J** (cohérence qui au fil du temps a plutôt été appelée consistance) ,
  - de déterminer, en cas d'incohérence, les jugements qui peuvent en être à l'origine ,
  - de proposer des suggestions pour y remédier ;

- la mise au point
  - de programmes fournissant, en cas de cohérence des jugements, une première représentation numérique ( échelle MACBETH ) ,
  - de techniques facilitant la discussion, avec J, de cette échelle ;
- le développement, à côté du mode de questionnement de base et du mode de questionnement MACBETH, d'un troisième mode de questionnement qui permet de valoriser une information, certes déjà difficile, mais pourtant moins exigeante qu'une information cardinale.

L'idée « MACBETH » de départ, qui visait essentiellement à faciliter la construction d'une échelle cardinale, fut assez rapidement prolongée par C.A. Bana e Costa et J.-C. Vansnick en une approche d'aide multicritère à la décision générale, qui reçut le nom d'approche MACBETH ( voir Bana e Costa et Vansnick, 1997 ).

Le travail mathématique et informatique présenté dans le second chapitre de ce travail concerne cette seconde phase du développement de MACBETH.

Dans ce contexte, notre travail a principalement porté sur

- la définition précise, dans le cadre d'un modèle d'agrégation additif, de la notion d'attractivité globale,
- la formalisation rigoureuse de la notion de comparaison globale de deux actions, ce qui permet d'éviter tout problème de signifiante,
- la mise au point d'un logiciel effectuant (quasi instantanément) les comparaisons globales des actions, ce qui permet, sur le plan pratique,
  - soit d'aider à réduire progressivement l'incomparabilité des actions ( recueil d'une information juste requise pour l'aide à la décision )
  - soit d'effectuer une analyse de robustesse quand on dispose d'information très riche.

Ce logiciel ( ou des versions précédentes - car nous avons été intégré à l'équipe MACBETH depuis quelques années ) a déjà été utilisé dans de nombreuses applications réelles comme par exemple

l'évaluation d'appels d'offres pour le métro de Porto, au Portugal  
( voir J.L. Porto, 1999 ),

l'évaluation d'entreprises textiles dans l'Etat de Santa Caterina, au Brésil  
( voir Bana e Costa *et al.*, 1999a )

l'évaluation d'options stratégiques pour le Ministère de la Défense Britannique  
( confidentiel ),

l'évaluation pilote de mesures de programmes communautaires pour la  
Commission Européenne ( voir C3E, 1995 ),

...

Divers articles ont aussi déjà été publiés à propos d'applications de l'approche  
MACBETH ( voir Bana e Costa et Vansnick, 1997, Bana e Costa et Vansnick, 1999b,  
Bana e Costa, 2001a, Bana e Costa *et al.*, 2001b, 2002a, 2002b ).

Si notre logiciel a ainsi pu montrer son intérêt, nous savons qu'il est possible de  
l'améliorer afin qu'il puisse, à l'avenir, fournir une aide encore accrue dans le cadre  
d'une étude d'aide à la décision.

Dans cette optique, nous envisageons notamment la possibilité de

- généraliser le système de « détection d'inconsistances – suggestions » aux  
inconsistances de type 3 ( voir 1.5 et 1.6 )
- prévoir une analyse de robustesse élargie au cas où on accepte de s'écarter d'une  
représentation numérique donnée sur un ou plusieurs points de vue
- permettre l'utilisation d'un modèle de points de vue dit « hiérarchique »

.....

Mais, à chaque jour, suffit sa peine !

## Bibliographie

- Bana e Costa, C.A., Vansnick, J.C. (1993), « Sur la quantification des jugements de valeur : l'approche MACBETH », *Cahiers du Lamsade*, 117, 33 pages.
- Bana e Costa, C.A., Vansnick, J.C. (1994), « MACBETH – An interactive path towards the construction of cardinal value functions », *International Transactions in Operational Research*, Vol.1, 4 (489-500).
- Bana e Costa, C.A., Vansnick, J.C. (1997), « Applications of the MACBETH approach in the framework of an additive aggregation model », *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 6, 2 (107-114).
- Bana e Costa, C.A., Corrêa, E.C., Ensslin, L., Vansnick, J.C. (1999a), « Decision Support Systems in action : integrated application in a multicriteria decision aid process », *European Journal of Operational Research*, 113 (315-335).
- Bana e Costa, C.A., Vansnick, J.C. (1999b), « The MACBETH approach : Basic ideas, software and an application », in N. Meskens, M. Roubens (eds.), *Advances in Decision Analysis*, Kluwer Academic Publishers (131-157).
- Bana e Costa, C.A. (2001a), « The use of multicriteria decision analysis to support the search for less conflicting policy options in a multi-actor context : case study », *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 10, 2 (111-125).
- Bana e Costa, C.A., Nunes da Silva, F., Vansnick, J.C. (2001b), « Conflict dissolution in the public sector », *European Journal of Operational Research*, 130/2, 388-401.
- Bana e Costa, C.A., Corrêa, E.C., De Corte, J.M., Vansnick, J.C. (2002a), "Facilitating bid evaluation in public call for tenders: a socio-technical approach", *OMEGA: International Journal of Management Science*, 30, 3 (227-242).
- Bana e Costa, C.A., da Costa Lobo, M.L., Ramos, I.A., Vansnick, J.C. (2002b), « Multicriteria Approach for Strategic Town Planning : The Case of Barcelos », in D. Bouyssou, E. Jacquet-Lagrèze, P. Perny, R. Słowiński, D. Vanderpooten, P. Vincke (eds.), *Aiding Decisions with Multiple Criteria: Essays in Honor of Bernard Roy*, Kluwer Academic Publishers (429-456).
- Belton, V., Stewart, T. J. (2002), *Multiple Criteria Decision Analysis : an Integrated Approach*, Kluwer Academic Publishers.

- C3E (1995), *Evaluation Pilote Multicritère du Hainaut - Rapport d'Expérience*, European Commission, DG XVI/02, Brussels.
- Doignon, J.P. (1987), « Threshold representations of multiple semiorders », *SIAM J of Alg. Disc. Meth.*, 8, 1 (77-84).
- Fishburn, P.C. (1964), *Decision and Value Theory*, John Wiley.
- Fishburn, P.C. (1970), *Utility Theory for Decision Making*, John Wiley.
- Fishburn, P.C. (1973), *Les mathématiques de la décision*, Mouton/Gauthier – Villars.
- French, S. (1988), *Decision Theory : An Introduction to the Mathematics of Rationality*, Ellis Horwood Limited.
- Harche, F., Thompson, G.L. (1994), « The column subtraction algorithm : an exact method for solving weighted set covering, packing and partitioning problems », *Computers Ops Res.*, Vol.21, 6 (689-705).
- Keeney, R.L. (1992), *Value-Focused Thinking : A Path to Creative Decision-making*, Harvard University Press.
- Mangasarian, O.L. (1969), *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill.
- Miller, G.A. (1956), « The magical number seven plus or minus two: some limits on our capacity for processing information » , *Psychological Review*, 63, 2 (81-97).
- Mousset, C., Vansnick, J.C. (submitted), « About the representation of a precardinal information », *Journal of Mathematical Psychology*.
- Pirlot, M., Vincke, P. (1997), *Semiorders : Properties, Representations, Applications* , Kluwer Academic Publishers.
- Porto, J.L. (1999), « Analyse multicritère dans le cadre des appels d'offres pour la construction de travaux publics et privés: le cas du Métro de Porto au Portugal », « *Newsletter of the European Working Group "Multicriteria Aid for Decisions"* », 15 (1-2).
- <http://www.inescc.pt/~ewgmcda/OpPorto.html>

- Roberts, F.S. (1979), *Measurement Theory with Applications to Decision-making, Utility and the Social Sciences*, Addison-Wesley.
- Roubens, M., Vincke, P. (1985), *Preference Modelling*, Springer-Verlag.
- Roy, B. (1985), *Méthodologie Multicritère d'Aide à la Décision*, Economica.
- Roy, B., Bouyssou, D. (1993), *Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et Cas*, Economica.
- Tversky, A. (1969), « Intransitivity of Preferences », *Psychological Review*, Vol.76, 1 (31-48).
- Vansnick, J.C. (1987), « Intensity of Preference » in Y. Sawaragi, K. Inoue and H. Nakayama (eds.), *Toward Interactive and Intelligent Decision Support Systems*, Vol.2, Springer-Verlag (220-229).
- von Winterfeldt, D., Edwards, W. (1986), *Decision Analysis and Behavioral Research*, Cambridge University Press.

## Annexe : théorème de l'alternative de Motzkin

Soient trois matrices  $A \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{r \times m}$  et  $C \in \mathbb{R}^{q \times m}$ ,  $A \neq \mathbf{0}$ .

Alors,

ou bien le système 
$$\begin{cases} A \cdot X > \mathbf{0} \\ B \cdot X = \mathbf{0} \\ C \cdot X \geq \mathbf{0} \end{cases}$$
 admet une solution  $X \in \mathbb{R}^m$

ou bien il existe  $Y \in \mathbb{R}^p$ ,  $Z \in \mathbb{R}^r$ ,  $U \in \mathbb{R}^q$  tels que

$$\begin{cases} {}^tA \cdot Y + {}^tB \cdot Z + {}^tC \cdot U = \mathbf{0} \\ Y \geq \mathbf{0}, \quad Y \neq \mathbf{0} \\ U \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

(voir Mangasarian, 1969)

On peut tirer, de ce théorème, le **corollaire** suivant :

Soient deux matrices  $A \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $A \neq \mathbf{0}$ .

Alors,

ou bien le système 
$$\begin{cases} A \cdot X > \mathbf{0} \\ B \cdot X = \mathbf{0} \end{cases}$$
 admet une solution  $X \in \mathbb{R}^m$

ou bien il existe  $Y \in \mathbb{R}^p$ ,  $V, W \in \mathbb{R}^r$  tels que

$$\begin{cases} {}^tA \cdot Y + {}^tB \cdot (V - W) = \mathbf{0} \\ Y \geq \mathbf{0}, \quad Y \neq \mathbf{0} \\ V \geq \mathbf{0}, \quad W \geq \mathbf{0} \\ \forall i \in \mathbb{N}_{1,r}, V_i \cdot W_i = 0 \end{cases}$$

**Démonstration** : On prend  $C = \mathbf{0}$  dans l'énoncé du théorème de Motzkin et on définit  $V$  et  $W$  de la façon suivante :

$$\forall i \in \mathbb{N}_{1,r}, \quad V_i = \begin{cases} Z_i & \text{si } Z_i \geq 0 \\ \mathbf{0} & \text{si } Z_i < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad W_i = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } Z_i \geq 0 \\ -Z_i & \text{si } Z_i < 0 \end{cases} \quad \square$$



<b>1.6. Traitement des inconsistances de type 3</b> .....	58
1.6.1. Traiter l'inconsistance.....	58
1.6.2. Eviter l'inconsistance.....	59
1.6.3. Suggestions ?.....	60
<b>1.7. L'échelle MACBETH</b> .....	61
1.7.2. Définition « rigoureuse » de l'échelle MACBETH.....	65
1.7.3. Unicité de l'échelle MACBETH de base ?.....	66
1.7.4. Présentation de l'échelle MACBETH.....	68
<b>1.8. Discussion autour d'une échelle</b> .....	69
1.8.1. Intervalles « libres » et « liés ».....	69
1.8.2. Calcul des intervalles « libres ».....	71
1.8.3. Calcul des intervalles « liés ».....	73
1.8.4. Généralisation à une information de type 1+2+3.....	78
<b>1.9. Simplifications du mode de questionnement 3</b> .....	79
1.9.1. Première simplification.....	79
1.9.2. Deuxième simplification.....	80
1.9.3. Troisième simplification.....	80
1.9.4. Quatrième simplification.....	81
<b>Chapitre 2 : l'agrégation dans le cadre de l'approche d'aide multicritère à la décision MACBETH.</b> .....	82
<b>2.1. Introduction à la méthodologie MACBETH</b> .....	84
2.1.1. Structuration du problème.....	84
2.1.2. Spécification de 2 états de référence.....	87
2.1.3. Construction de situations globales de référence.....	88
2.1.4. Acquisition d'une information préférentielle.....	90
2.1.5. Consistance de l'information préférentielle ?.....	92
<b>2.2. Construction d'une échelle d'attractivité globale</b> .....	93
<b>2.3. Comparaison globale des éléments de <math>X_1 \times X_2 \times \dots \times X_K</math></b> .....	96
<b>2.4. Algorithme de comparaison globale</b> .....	101
A propos de signifiante.....	106
<b>2.5. Comparaison globale d'actions potentielles</b> .....	107
2.5.1. Impact d'une action potentielle.....	107
2.5.2. Comparaisons globales d'actions potentielles.....	108
2.5.3. Tableau des comparaisons globales d'actions potentielles.....	109
2.5.4. Analyse de robustesse.....	114
2.5.5. Analyse de robustesse « générique ».....	117
<b>Conclusion</b> .....	119
<b>Annexe : théorème de l'alternative de Motzkin</b> .....	125